

В.А. Светлицкий

Статистическая механика и теория надежности

Издательство МГТУ
имени Н.Э. Баумана

В.А. Светлицкий

Статистическая механика и теория надежности

2158

Рекомендовано учебно-методическим
объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебника для студентов,
обучающихся по специальностям
«Динамика и прочность машин», «Ракетостроение»,
«Космические летательные аппараты
и разгонные блоки»

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана
2002

УДК 621.01:624.07(075.8)
ББК 22.317
С24

Рецензенты:
член-корр. РАН И.А. Махутов,
д-р техн. наук, проф. В.А. Постнов

Светлицкий В.А.

С24 Статистическая механика и теория надежности. М. —
Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — с. 504.

ISBN 5-7038-1772-2

Изложены основные разделы статистической механики, основы теории надежности и их использование в практике проектирования приборов, машин и конструкций в различных отраслях промышленности. Описана теория случайных колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами. Приведены методы численного решения прикладных задач статистической динамики; рассмотрены теория и численные методы определения надежности элементов конструкций, а также нетрадиционные задачи, при решении которых нельзя воспользоваться методами статистической динамики.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен аспирантам и инженерам-механикам, работающим в различных отраслях машиностроения.

ББК 621.01:624.07(075.8)
УДК 22.317

ISBN 5-7038-1772-2

© В.А. Светлицкий, 2002
© Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002

Предисловие

Развитие новой техники потребовало более глубокого понимания физических особенностей работы проектируемых конструкций в реальных условиях, что необходимо как для увеличения точности расчетов, так и для повышения их надежности.

Было установлено, что классические детерминированные возмущения не являются основными, а методы классической механики, основанные на понятии детерминизма, не являются достаточными для понимания и объяснения физических эффектов, возникающих при работе приборов, находящихся на движущихся объектах, при вибрации двигателей летательных аппаратов, движении транспортного средства, действии ветровых и сейсмических нагрузок. Возникла необходимость создания новой физической модели при исследовании этих динамических процессов и, в частности, нового математического аппарата, позволяющего учесть внешние возмущения, которые не являются детерминированными. Таким математическим аппаратом стала теория случайных процессов, которая была достаточно хорошо разработана применительно к задачам радиотехники и автоматического регулирования, где эффект от случайных возмущений оказался соизмеримым с эффектом от детерминированных возмущений и игнорирование случайных возмущений приводило бы к неверным результатам. Поэтому теория случайных процессов была привлечена к решению конкретных задач, относящихся к радиотехнике и автоматическому регулированию, много раньше, чем в других областях техники, в частности, раньше, чем для исследования механических систем, где случайными возмущениями, как правило, пренебрегали.

Во многих прикладных задачах такое пренебрежение случайными возмущениями, особенно когда они действительно являются малыми, вполне допустимо и решение задачи не требует привлечения статистической механики. Если же случайные возмущения соизмеримы (по вероятностным характеристикам) с известными силами и, особенно, когда на систему действуют только случайные возмущения, классические методы расчета становятся неприемлемыми и для получения численных результатов надо использовать вероятностные методы. Поэтому внедрение в практику проектирования статистических методов расчета является необходимым условием для создания надежных конструкций.

Повышение надежности новой техники, рассчитанной на эксплуатацию в экстремальных условиях, при высоких требованиях к точности и надежности функционирования и одновременном уменьшении материалоемкости невозможно без использования в практике проектирования методов статистической механики.

Первые четыре главы настоящего учебника посвящены изложению основных положений теории вероятности и случайных процессов. Рассматриваются случайные величины и случайные функции и их вероятностные характеристики; функции распределения плотности вероятности, математические ожидания и дисперсии. Приводятся различные виды законов распределения, встречающихся в практических задачах. Рассмотрены нестационарные и стационарные случайные процессы, имеющие большое прикладное значение при анализе колебаний механических систем. Приведены основные результаты спектральной теории стационарных случайных функций и использования спектрального представления стационарных случайных функций при анализе установившихся колебаний. Изложена теория марковских процессов.

В главах 5—8 рассматриваются случайные колебания систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами. Изложение теории случайных колебаний проводится аналогично изложению классической теории колебаний, что позволяет наиболее наглядно установить, чем эти разделы механики (детерминированные колебания и случайные колебания) родственны и чем они отличаются друг от друга.

Методы анализа случайных колебаний, изложенные в книге, дают возможность: исследовать динамические процессы, возникающие в механических системах, определить вероятностные характеристики обобщенных координат системы и их производных для систем с конечным числом степеней свободы, получить вероятностные характеристики напряженно-деформированного состояния для систем с распределенными параметрами.

Девятая глава посвящена основам теории надежности. Изложены методы численного определения вероятности безотказной работы механических систем при однократном или малом числе нагружений и ограниченном времени процесса.

Использование методов статистической механики в расчетной практике возможно только, когда имеется статистическая информация о случайных возмущениях, получить которую в необходимом для проведения расчетов объеме не всегда возможно. При изложении теоретических основ статистической механики принимается, что необходимая информация о случайных возмущениях известна. Однако практически это не всегда возможно, так как требует очень большого объема экспериментальных исследований.

Получение вероятностных характеристик возмущений представляет собой проблему несоизмеримо более сложную, чем последующее решение уравнений состояния системы. Поэтому в учебник включена глава, в которой изложены теория и численные методы исследования задач динамики механических систем, когда имеющаяся информация о случайных возмущениях недостаточна для проведения расчетов с использованием статистической механики.

Введение

Очень часто при исследовании динамических процессов, возникающих, например, в механических системах, приходится сталкиваться с анализом возможных воздействий, природа которых нам полностью не ясна. Эти воздействия могут вызываться как внешними неконтролируемыми (случайными) возмущениями, так и неконтролируемыми изменениями геометрии и параметров системы: например, неровности дороги (рис. В.1, а) или аэродромного покрытия (рис. В.1, б), вызывающие вибрации движущихся по ним объектов (рис. В.1), газодинамические и технологические эксцентриситеты тяги реактивного двигателя, разбросы параметров систем амортизации (рис. В.2).

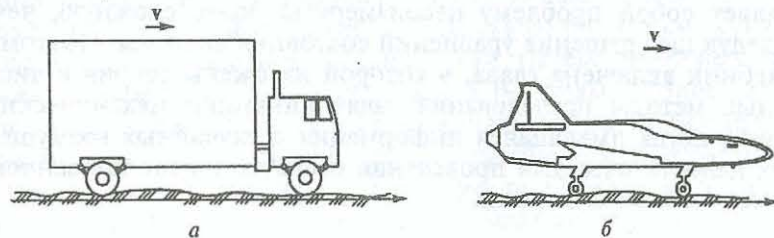


Рис. В.1

Если эти неконтролируемые воздействия внешних сил и разбросы параметров конструкции никаких существенных неприятностей в поведение системы не вносят и ими можно пренебречь, то получаем практически точное решение. В классической механике, в частности в классической теории колебаний, принято считать, что при данных начальных условиях (точно известных) и известных силах каждому моменту времени соответствует единственное состояние системы, а их последо-

вательность во времени разворачивается в однозначно определенную «траекторию». Такую однозначную связь состояния системы со временем принято называть *детерминированной*. Детерминированная связь между состоянием системы и временем полностью исключает существование в природе различного рода неконтролируемых воздействий.

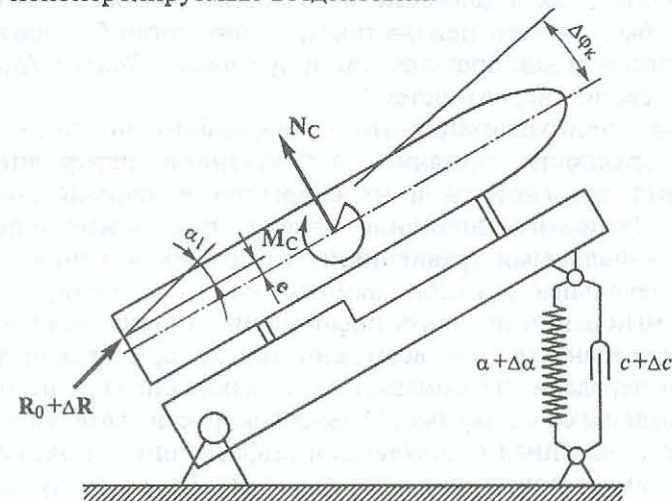


Рис. В.2

Классическая теория колебаний ограничивалась детерминированными процессами, практически не уделяя внимания анализу случайных процессов.

В развитии классической техники был период, когда случайность рассматривалась как досадная помеха, от которой, в принципе, можно избавиться, если более аккуратно поставить опыт. Считалось, что разбросы начальных данных и разбросы сил принципиального значения не имеют и их можно сделать сколь угодно малыми, воспользовавшись более точными средствами измерения. Если случайность и допускалась, то только в микромире (работы Максвелла, Больцмана по теории газов), а в макромире случайность рассматривалась как следствие нашего не очень глубокого понимания законов природы. Особенно четко эту точку зрения сформулировал Лаплас: «Разум-

ное существо, которое в каждый данный момент знало бы все движущие силы природы и имело бы полную картину состояния, в котором природа находится, могло бы — если бы только его ум был в состоянии достаточно проанализировать эти данные — выразить одним уравнением как движение самых больших тел мира, так и движение мельчайших атомов. Ничего не осталось бы для него неизвестным, и оно могло бы обозреть одним взглядом как прошлое, так и будущее». (Лаплас. Аналитическая теория вероятностей.)

Правда, при реализации этого утверждения возникают некоторые трудности, связанные с получением информации о положении тел системы и их скоростей в данный момент времени. Например, движение молекул газа можно описать дифференциальными уравнениями, но для их решения необходимы начальные условия в данный момент времени, т.е. мы должны мгновенно получить информацию о положении молекул в пространстве, что возможно только при бесконечной скорости передачи информации, но никакие сигналы не могут быть переданы со скоростью, большей скорости света. Поэтому трудность, связанная с получением информации о положении молекул, имеет принципиальное значение. Второе допущение, которое молчаливо использовалось, заключается в том, что в принципе возможны абсолютно точные измерения (можно получить абсолютно точные значения координат молекул и их первых производных). Это допущение противоречит принципу неопределенности Гейзенберга.

Таким образом, получить точную информацию о начальном состоянии молекул газа принципиально нельзя, а тем самым нельзя предсказать и поведение молекул газа во времени. Строго однозначная зависимость между следствием и причиной требует непрерывного копирования окружающего мира, т.е. совершенно исключает появление нового, качественно отличного явления. Если бы это было так, то была бы невозможна эволюция окружающего нас мира с непрерывной сменой и качественным изменением форм жизни. Все это говорит о том, что случайность является не следствием нашего невежества, а объективно существующей реальностью.

Как доказательство реальности случайности может рассматриваться принцип наименьшего принуждения Гаусса, вывод

которого использует методы, разработанные для анализа вероятностных задач. Принцип наименьшего принуждения Гаусса формулируется следующим образом [11, 43]: *истинное движение системы, находящейся под действием сил и подчиненной неосвобождающим связям без трения, отличается от движений, совершающихся при тех же начальных условиях, тем свойством, что для истинного движения мера отклонения от свободного движения, т.е. принуждение, есть минимум.* Принуждением в данный момент Гаусс называет меру отклонения системы, движущейся под действием внешних активных сил (с учетом голономных и неголономных связей, наложенных на систему), от свободного движения, которое она имела бы, начиная с рассматриваемого момента, под действием тех же внешних сил, если бы с этого момента были устранены наложенные на нее связи.

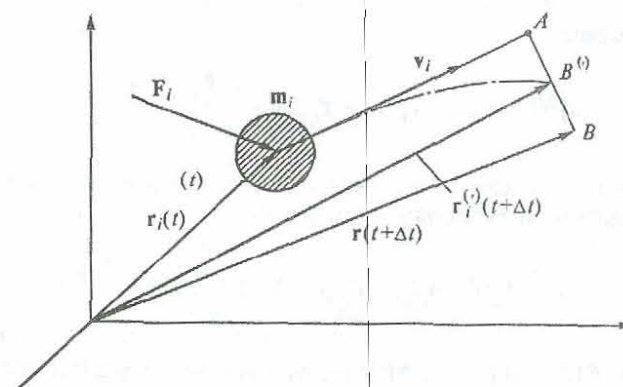


Рис. В.3

Напомним математическую формулировку и запись этого принципа. Рассмотрим положения материальной точечной массы m_i в моменты времени t и $t + \Delta t$ (рис. В.3). Разложим функцию $r_i(t + \Delta t)$ в ряд и ограничимся квадратичной частью разложения

$$r_i(t + \Delta t) = r_i(t) + \dot{r}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{r}_i \Delta t^2. \quad (\text{В.1})$$

Вектор $r_i(t + \Delta t)$ характеризует положение массы m_i с учетом наложенных на ее движение связей. Если бы связи отсут-

ствовали, то положение точки в момент $t + \Delta t$ определялось бы вектором $\mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t)$, который с точностью до величин третьего порядка малости можно представить в виде

$$\mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i^{(0)}(t) + \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \Delta t^2,$$

или (так как $\mathbf{r}_i^{(0)}(t) = \mathbf{r}_i(t)$, $\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)}(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$)

$$\mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \Delta t^2. \quad (\text{B.2})$$

При отсутствии связей уравнение движения точки имеет вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \mathbf{F}_i, \quad (\text{B.3})$$

поэтому имеем

$$\mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \Delta t^2. \quad (\text{B.4})$$

Расстояние между положениями точки в момент $t + \Delta t$ при действии связей и без связей равно

$$\mathbf{B}^{(0)} \mathbf{B} = \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t + \Delta t) - \mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t) = \frac{1}{2} \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right) \Delta t^2. \quad (\text{B.5})$$

Вектор $\mathbf{AB}^{(0)}$ определяет отклонение материальной точки при ее действительном движении от положения, в котором она оказалась бы при свободном движении. За меру отклонения точки от свободного движения Гаусс принимает пропорциональную квадрату отклонения $|\Delta \mathbf{r}_i|^2$ величину z_i , которую называют принуждением:

$$z_i = \frac{1}{2} m_i \left| \ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right|^2. \quad (\text{B.6})$$

Для всех точек системы имеем

$$z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left| \ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right|^2, \quad (\text{B.7})$$

или в скалярной форме записи,

$$z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{j=1}^3 \left(\ddot{x}_{ij} - \frac{F_{ij}}{m_i} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} z_i^{(0)}, \quad (\text{B.8})$$

где

$$z_i^{(0)} = \sum_{j=1}^3 \left(\ddot{x}_{ij} - \frac{F_{ij}}{m_i} \right)^2.$$

Принцип Гаусса состоит в том, что в любой момент времени для истинного движения системы сравнительно с кинематически возможным движением принуждение имеет наименьшее значение:

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} z_i^{(0)} = \min. \quad (\text{B.9})$$

Идея меры отклонения системы от свободного движения в форме суммы величин, пропорциональных квадратам отклонений материальных точек системы, тесно связана с работами Гаусса по теории ошибок, в частности с методом наименьших квадратов, позволяющим определить неизвестную величину с наименьшей средней квадратичной ошибкой. Метод наименьших квадратов, относящийся к анализу случайных явлений, приводит к соотношениям, аналогичным соотношению (B.9).

В теории наименьших квадратов основная задача формулируется следующим образом: имеются неизвестные функции y_i и их известные значения y_{i0} , тогда ошибки измерения равны

$$\delta_i = y_i - y_{i0}.$$

Если y_{i0} имеют разные дисперсии δ_i , то вводятся множители p_i , зависящие от δ_i . В предположении, что ошибки δ_i подчиняются нормальному закону, доказывается следующая теорема. Для того чтобы неизвестные y_i приняли наиболее вероятные значения, необходимо, чтобы

$$z = \sum_{i=1}^k p_i \delta_i^2$$

приняло минимальное значение, а при

$$p_i = \frac{m_i}{2}, \quad \delta_i^2 = z_i^2 \quad (1)$$

и $k = n$ это выражение превращается в (В.9).

Возвращаясь к принципу Гаусса, с учетом изложенного результата из теории ошибок можно его сформулировать в терминах теории вероятностей, а именно: *истинное движение системы отличается от кинематически возможного тем, что имеет наибольшую вероятность*. Связь между методом наименьших квадратов и принципом наименьшего принуждения Гаусса представляет собой нечто большее, чем просто аналогия, т.е. отличие истинного движения тела от возможного носит вероятностный характер. Принцип Гаусса имеет существенное преимущество перед принципом Даламбера: он дает возможность получить уравнения движения системы при **любых неголономных связях**, т.е. принцип Гаусса является наиболее общим принципом механики и этот принцип допускает вероятностную трактовку! В современной физике пришлось ясно осознать тот факт, что случайность нельзя полностью исключить и ее надо учитывать как составную часть любой теории.

Однако эта точка зрения разделялась не всеми исследователями. Многие физики и механики считали, что учет случайности является временным отступлением от классических теорий, что по мере накопления знаний роль случая будет сведена к нулю. Познавая в будущем более глубокий уровень физических процессов, можно будет объяснить явления, ныне для нас случайные, как проявление полностью детерминированных процессов, которые в настоящее время скрыты от нашего взора.

Сторонники противоположной точки зрения на случайность считают, что только вероятностные методы анализа процессов могут дать правильный ответ. По мнению сторонников вероятностной трактовки законов природы, классическая механика является частным случаем статистической механики, так как абсолютно точное знание начальных условий и сил

принципиально невозможно не только в микромире, но и в макромире.

По мнению ряда ученых, детерминизм есть математическая условность, позволяющая упрощать исследование многих сложных процессов, в которых можно ограничиться изучением одних лишь средних значений.

Рассмотрим шар (рис. В.4), движущийся в направлении x между двумя жесткими стенками, находящимися на расстояниях $\pm l$ от начала координат [10]. Пусть в начальный момент времени шар находился в начале координат и под действием импульса силы получил скорость $\dot{x}$. Теоретически мы можем предсказать дальнейшее движение шара и его точное положение между стенками в любой момент времени t (предполагая, что имеет место абсолютно упругий удар шара о стенки), т.е. движение шара является полностью детерминированным, однако в реальной ситуации определить абсолютно точно начальную скорость нельзя. Мы ее знаем с определенной пусть очень малой погрешностью $\Delta \dot{x}_0$, поэтому положение шара (координата x) тоже будет определяться с погрешностью, равной

$$\Delta x = \Delta \dot{x}_0 t,$$

которая при достаточно большом времени превысит расстояние $2l$ между стенками, и в дальнейшем мы можем только сказать, что шар находится где-то между стенками — ответ, который вряд ли можно назвать детерминированным.

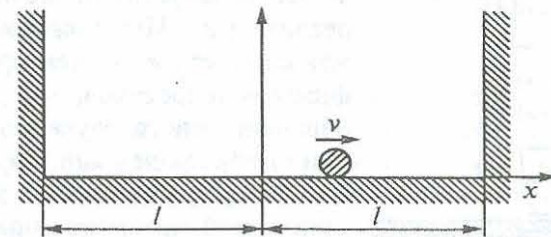


Рис. В.4

Рассмотренные точки зрения диаметрально противоположны и имеют чисто философское значение. С прикладной точки зрения, ни один из физических процессов нельзя считать строго детерминированным, так же как нельзя считать и полностью случайным. К какой категории отнести данный конкретный процесс, целиком зависит от точности имеющихся исходных данных и от того, каковы конечные результаты и с какой точностью необходимо их получить.

Имеется много прикладных задач, которые могут быть описаны точными математическими соотношениями, т.е. практически их можно считать детерминированными, как, например, движение спутника по орбите. Но не менее обширен класс физических процессов, которые носят явно недетерминированный характер. К таким физическим процессам принадлежат, например, колебания транспортного средства при движении по дороге со случайными неровностями (см. рис. В.1, а), колебания упругих систем под действием случайной ветровой нагрузки (рис. В.5), старт ракет при случайных эксцентриситетах тяги (см. рис. В.2) и т.д. В приведенных примерах эффект действия

случайных возмущений играет весьма существенную, а иногда и определяющую роль, поэтому пренебрегать случайными возмущениями недопустимо.

Основным общим свойством случайных процессов является неопределенность ожидаемого поведения для любой одиночной реализации процесса и явно выраженные статистические черты совокупности большого числа реализаций. Инженера-расчетчика в меньшей степени, чем философов и физиков-теоретиков, интересует, каков наш мир: чисто случайный или причинно обусловленный. Гораздо больше его интересует разумное решение поставленной перед ним прикладной задачи. Если ему известно все, что надо для решения задачи, и он может оценить влияние разброса исходных дан-

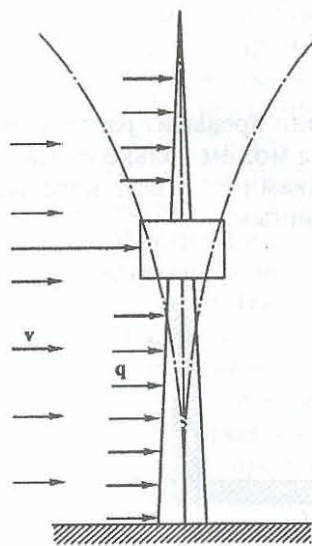


Рис. В.5

ных на конечный результат и установить, что этим влиянием можно пренебречь, то он использует методы классической механики. Если же неопределенность исходных данных или неопределенность в задании действующих на систему сил велика, то ему приходится обращаться к методам, позволяющим ликвидировать эту неопределенность, — в частности, к методам теории вероятностей и статистической механики. То, что когда-нибудь в будущем эта неопределенность будет устранена, для инженера-расчетчика в данный момент является слабым утешением.

Одно из предубеждений против распространения вероятностных методов анализа механических систем связано с невозможностью однозначного количественного предсказания поведения системы, как это можно сделать, основываясь на законах и методах классической механики. Многие исследователи придерживаются убеждения, что единственный вид предсказания, которое имеет право называться научным, — это точное количественное предсказание будущих событий. Можно услышать претензии на неполноту статистических методов в том смысле, что они не позволяют делать определенные выводы и предсказания относительно индивидуальных событий. Однако, когда требуется предсказать результаты, характеризующие поведение большого числа отдельных случайных событий, статистические методы дают более содержательную информацию, и предсказание, основанное на этих методах, столь же определено, как и предсказание поведения отдельного тела, основанное на методах классической механики.

Для применения методов теории вероятностей необходимым условием является возможность многократного осуществления случайного события в практически однородных условиях. Основная трудность при применении вероятностных методов в расчетной практике заключается в том, что вероятностные характеристики случайных функций можно получить, только имея большое число реализаций случайного процесса, что может быть сопряжено с большими техническими трудностями в проведении экспериментов или с большими

экономическими затратами. Так, например, для получения вероятностных характеристик случайных неровностей дороги или аэродромного покрытия (см. рис. В.1) надо иметь набор записей микропрофилей различных участков дороги (грунтовой, булыжник и т.д.), при том, что получение этих записей очень трудоемко. Но процесс накопления статистической информации о случайных возмущениях продолжается, и поэтому роль вероятностных методов расчета непрерывно растет.

В настоящее время одним из основных методов анализа случайных процессов служит корреляционная теория. Корреляционная теория позволяет при известных вероятностных характеристиках входа получить аналогичные вероятностные характеристики выхода. Следует еще раз подчеркнуть, что эти характеристики имеют смысл как характеристики множества процессов, а не отдельного процесса. Если, например, по дороге со случайными неровностями движется 1000 одинаковых автомобилей с одной и той же скоростью, то можно предсказать, в среднем, как данная дорога (вход) действует на автомобиль: например, определить математические ожидания и дисперсии напряжений (выход) в сечениях рамы автомобиля. Если же по ограниченному отрезку дороги движется один автомобиль, то получить вероятностные характеристики выхода (без дополнительных предположений) нельзя. Еще более убедительным примером является одиночный старт ракеты (см. рис. В.2).

При движении по направляющей на ракету действуют случайные силы, вызванные эксцентриситетами тяги (вход), поэтому в момент схода с направляющей она получает случайные разбросы (выход) угла $\Delta \varphi_k$ и угловой скорости $\Delta \dot{\varphi}_k$. Используя корреляционную теорию, можно формально определить математические ожидания (точнее средние значения) разбросов ($\Delta \varphi_k$ и $\Delta \dot{\varphi}_k$) и их дисперсии, но достоверность этих результатов очень мала.

В примере со стартом ракеты имеет место более сложная задача учета неопределенности изменения случайных эксцентриситетов тяги во времени, так как неизвестно, какой из воз-

можных случайных законов изменения эксцентриситетов тяги будет реализован при данном единичном старте. Если бы запускалась 1000 ракет, то мы могли бы использовать вероятностные характеристики входа (эксцентриситетов тяги) и по-

лучить вероятностные характеристики выхода ($\Delta \varphi_k$ и $\Delta \dot{\varphi}_k$) для всей серии пусков. При одиночном запуске этого сделать нельзя, но можно утверждать, что с увеличением числа запус-

ков получающиеся значения $\Delta \varphi_k$ и $\Delta \dot{\varphi}_k$ все ближе, в среднем, приближаются к своим теоретическим значениям. Обычно при исследовании случайных процессов в механических системах, в частности нестационарных процессов, подразумевается (одно из допущений, позволяющих использовать математический аппарат теории случайных процессов), что условие массовости процесса выполняется. Для стационарных случайных процессов принятие гипотезы об эргодичности процесса позволяет вместо множества реализаций рассматривать одну реализацию и получить информацию, достаточную в рамках корреляционной теории для предсказания поведения системы. Для многих прикладных задач такой подход к изучению случайных процессов оказывается вполне достаточным, поэтому корреляционная теория и получила столь широкое распространение.

Имея алгоритм определения вероятности безотказной работы, можно, изменяя конструктивные параметры системы, повысить эту вероятность, т.е. спроектировать более надежное изделие. Но не всегда вероятностные оценки качества бывают приемлемыми. Часто требуется, чтобы выполнялись гарантированные критерии качества процесса. Например, при запуске одной ракеты необходимо, чтобы она гарантированно попала в заданную область. Вероятностная оценка того, что она попадет в заданную область, например, с вероятностью, равной 0,9, не позволяет быть уверенным в том, что она действительно попадет в заданную область.

Оценка случайного процесса или результатов испытаний методами теории вероятностей не носит абсолютный характер и в зависимости от требований к конечным результатам может быть истолкована по-разному. О возможных различных взгля-

дах на один и тот же конечный результат говорится в поэме М.Д. Кендалла [4]. (Она приведена в приложении 4.)

Инженер-расчетчик должен самостоятельно выбирать методы расчета в зависимости от имеющейся информации о случайных возмущениях.

Глава 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Во многих областях техники приходится встречаться с особыми явлениями, которые принято называть *случайными*. Рассмотрим, например, процесс изготовления однотипных деталей. Можно установить, что размеры деталей будут колебаться около некоторого установленного значения. Эти отклонения носят случайный характер, поэтому измерения обработанных деталей не дают возможности представить размеры следующей детали, однако для больших партий деталей отклонения размеров начинают подчиняться определенным закономерностям, которые изучаются специальной математической дисциплиной — теорией вероятностей. Теория вероятностей отражает закономерности, присущие случайным событиям (явлениям) массового характера. Имеется много монографий по теории вероятностей, в которых подробно изложены основные понятия и методы теории вероятностей и теории случайных функций, например [12, 13, 17]. Поэтому в данной главе приведены лишь те положения и результаты, относящиеся к теории вероятностей, которые используются в последующих главах книги.

§ 1.1. Основные понятия теории вероятностей

Одно из основных достоинств теории вероятностей, которое позволяет ее эффективно использовать, например, в практике проектирования механических конструкций, заключается в том, что она дает возможность количественно оценить такие эмоциональные понятия, как «вероятно», «мало вероятно», «большая вероятность» и т.д. Как известно, чтобы спроектировать машину, прибор, летательный аппарат и т.д., надо получить численные значения параметров конструкции и критериев ее качества (работоспособности), к которым относятся и

вероятностные критерии качества. Для сравнения конструкций по вероятностным критериям надо знать численные значения вероятностей (например, вероятности безотказной работы). Теория вероятностей и основанные на ней разделы статистической механики механических систем позволяют это сделать.

Явления, которые могут реализоваться или нет, называют *случайными событиями*. Например, порыв ветра, действующий на телебашню (см. рис. В.5), является случайным событием. Событие, которое обязательно произойдет, называют *достоверным*. Событие, которое не может осуществиться, называют *невозможным*. Для того чтобы установить, произойдет или не произойдет некоторое случайное событие, необходимо провести эксперимент или, как принято говорить, провести испытания.

Исследования показывают, что события, случайные при единичном испытании, при большом числе испытаний (при неизменных условиях опыта) начинают подчиняться некоторым неслучайным закономерностям, которые получили название *вероятностных*. Число появлений событий при испытаниях характеризуется частотой события W . *Частотой события W* называют отношение числа испытаний n , при которых событие произошло, к числу всех проведенных испытаний N .

При этом подразумевается, что исходы событий в серии опытов взаимно независимы (случайные события называют *независимыми*, если появление или отсутствие одного из них никак не сказывается на появлении другого).

Частота событий в какой-то степени может рассматриваться как внутренняя характеристика явления, однако она есть случайная величина, зависящая от конкретной серии испытаний. При очень большом числе испытаний частота W почти перестает изменяться, приближаясь к некоторой величине P , которую называют *вероятностью*.

Следует отметить, что характер приближения частоты к вероятности при увеличении числа опытов несколько отличается от стремления к пределу, как это понимается в высшей математике. В высшей математике, когда говорится о стремлении переменной x_n с ростом n к постоянному пределу a , то это означает, что разность $|x_n - a|$ становится меньше любого положительного числа ϵ для всех значений n , начиная с некоторого достаточно большого числа. Относительно частоты со-

бытия и его вероятности такого утверждения сделать нельзя, так как вполне возможно, что при большом числе опытов частота события будет значительно отклоняться от его вероятности. Но такое значительное отклонение является тем менее вероятным, чем больше число опытов. В теории вероятностей существует понятие «сходимость по вероятности», т.е. случайная величина x_n с ростом n сходится по вероятности к величине a , когда вероятность неравенства $|x_n - a| < \epsilon$ при увеличении n неограниченно приближается к единице. Это утверждение составляет содержание теоремы Бернулли: «При неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов можно утверждать, что частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности».

Поэтому, если событие A повторяется большое число (N) раз и при этом в n случаях событие обладает признаком B , а исходы событий в этой последовательности взаимно независимы, то вероятность появления признака

$$P(B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}.$$

Зная вероятность события, можно, не проводя никаких опытов, предсказать, с какой частотой будет появляться это событие при большом числе опытов. Можно также сказать, что вероятность события представляет собой меру возможности появления события при одном опыте.

Статистическое определение вероятности позволяет установить:

- 1) вероятность достоверного события (равную единице);
- 2) вероятность невозможного события (равную нулю);
- 3) вероятность произвольного случайного события A (равную положительному числу, не превосходящему единицу, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$).

Если имеются два события A и B , причем вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет, то такие два события называют *независимыми*. Событие A называют *зависимым* от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет. Вероятность события A , вычисленную при условии, что имело

место событие B , называют *условной вероятностью события A и обозначают $P(A|B)$* .

1.2.1. Основные теоремы теории вероятностей

1. Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.1)$$

2. Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения (совмещения) двух событий A и B равна произведению вероятности A на условную вероятность события B , т.е.

$$P(AB) = P(A) P(B|A). \quad (1.2)$$

Вероятность произведения двух событий можно выразить и через условную вероятность события A . В этом случае

$$P(AB) = P(B) P(A|B).$$

Вероятность совместного осуществления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(AB) = P(A) P(B). \quad (1.3)$$

3. Формула полной вероятности. Следствием теорем сложения вероятностей и умножения вероятностей является так называемая формула полной вероятности. Пусть требуется определить вероятность события A , которое может произойти вместе с одним из событий B_j ($j = 1, 2, \dots, n$), образующих полную группу несовместных событий, которые называют *гипотезами*. Несколько событий в данном опыте образуют группу событий, если в результате опыта непременно должно реализоваться хотя бы одно из них. Так как гипотезы B_j образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинациях с какой-либо из этих гипотез, т.е.

$$A = B_1A + B_2A + \dots + B_nA.$$

Поскольку гипотезы B_j несовместимы, то и комбинации B_jA также несовместимы, поэтому, применяя к ним теорему сложения, получаем

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_jA).$$

Воспользовавшись теоремой умножения, для каждого из слагаемых в правой части полученного соотношения окончательно имеем

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j). \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) называют *формулой полной вероятности*.

4. Формула Байеса (теорема гипотез). Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула Байеса. Пусть имеется полная группа несовместных гипотез B_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны $P(B_j)$. В результате проведенного опыта имело место событие A . Возникает вопрос, как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением этого события?

Воспользуемся формулой условной вероятности $P(B_j|A)$ для каждой гипотезы и теоремой умножения:

$$P(AB_j) = P(A) P(B_j|A) = P(B_j) P(A|B_j).$$

Из полученного соотношения следует, что

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) P(A|B_j)}{P(A)}.$$

Согласно формуле для полной вероятности (1.14), окончательно получаем

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) P(A|B_j)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j)}. \quad (1.5)$$

§ 1.2. Функция распределения и плотность вероятности случайной величины

Функция распределения. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие о случайной величине. Случайной называют величину, которая в результате опыта может принять то или иное значение, заранее неизвестное. Эта величина может быть как дискретной, так и непрерывной. Она будет полностью определена с вероятностной точки зрения, если будет известно, с какой вероятностью возможно появление каждого из принимаемых случайной величиной значений. Такое соответствие называют *законом распределения дискретной случайной величины*. Закон распределения дискретной случайной величины X , которая в результате опыта примет одно из $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ возможных значений, можно представить в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ряд распределения

x_1	x_2	x_3	...	x_n
P_1	P_2	P_3	...	P_n

Зная ряд распределения случайной дискретной величины, можно получить функцию, характеризующую это распределение:

$$F(x) = \sum_{x_j < x} P(X = x_j). \quad (1.6)$$

Неравенство $x_j < x$ под знаком суммы указывает, что суммирование распространяется на все значения x_j , которые меньше x . Функцию $F(x)$ называют *функцией распределения случайной величины x* . Когда переменная x проходит через возможное значение X , функция $F(x)$ меняется скачкообразно, причем величина скачка равна вероятности P_j появления значения x_j . Несовместные события x_j образуют полную группу, поэтому

$$F(x) = \sum_{j=1}^n P_j = 1,$$

т.е. функция распределения больше единицы быть не может.

Для непрерывной случайной величины под *вероятностью события* понимают вероятность события $X < x$, где x — некоторая текущая переменная. В этом случае вероятность $P(X < x)$ есть некоторая функция от x , которую по аналогии с дискретной случайной величиной называют *функцией распределения*:

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.7)$$

Функцию $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*. Функция распределения является самой универсальной характеристикой случайных величин как дискретных, так и непрерывных.

Функция распределения должна удовлетворять условию

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (1.8)$$

Из определения функции $F(x)$, данного в (1.7), следует, что ни при каких сколь угодно больших x функция $F(x)$ не может быть больше единицы (так как $F(x)$ есть вероятность, а вероятность не может быть больше единицы):

$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Так как вероятность $P(X < x)$ не может быть меньше нуля, то из (1.7) следует, что

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Примерный вид функции распределения для непрерывной случайной величины показан на рис. 1.1. При решении прикладных вероятностных задач часто бывает необходимым определять вероятности того, что случайная величина X примет значение, заключенное в некотором ограниченном интервале, например, в интервале (a, b) . Условимся для определенности левый конец a интервала (a, b) включать в интервал, а правый конец b не включать. Тогда попадание случайной величины X на интервал (a, b) равносильно выполнению неравенства

$$a \leq X < b.$$

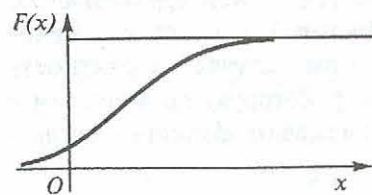


Рис. 1.1

Выразим вероятность этого события через функцию распределения случайной величины X . Рассмотрим три события: событие A , состоящее в том, что $X < b$; событие B , состоящее в том, что $X < a$; событие C , состоящее в том, что $a \leq X < b$.

Так как

$$A = B + C,$$

то по теореме сложения вероятностей (1.1) имеем

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b)$$

или

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X < b).$$

Поэтому окончательно получаем

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (1.9)$$

Плотность вероятности. Рассмотрим непрерывную случайную величину X с известной непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$. Найдем вероятность того, что случайная величина попала в интервал $(x, x + \Delta x)$:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x), \quad (1.10)$$

т.е. вероятность P есть приращение функции распределения на этом участке. Понятно, что чем меньше Δx , тем меньше и вероятность того, что X окажется в интервале $(x, x + \Delta x)$. Поэтому левую часть равенства (1.10) можно заменить на

$$\Delta P(x < X < x + \Delta x).$$

Рассмотрим отношение вероятности ΔP к длине интервала при Δx , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Ограничиваясь линейной частью разложения $F(x + \Delta x)$ в ряд, получим

$$\frac{dP}{dx} = F'(x). \quad (1.11)$$

Введем обозначения

$$F'(x) = f(x), \quad (1.12)$$

поэтому

$$dP = f(x) dx.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения непрерывной случайной величины* X . Из (1.12) следует

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (1.13)$$

Устремив верхний предел к бесконечности, получим

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Вероятность того, что случайная величина X находится в интервале (x_1, x_2) , равна

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (1.14)$$

Примерный вид функции плотности вероятности показан на рис. 1.2. Вероятность $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ численно равна заштрихованной площади на рис. 1.2. Функция распределения случайной величины и ее плотность вероятности являются различными формами выражения закона распределения случайной величины.

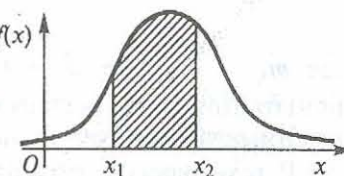


Рис. 1.2

§ 1.3. Числовые характеристики случайных величин и их основные свойства

Полной характеристикой случайной переменной величины (или системы случайных величин) является закон распределения, заданный функцией $F(x)$ или плотностью распределения $f(x)$. На практике, однако, такая исчерпывающая характеристика не всегда может быть получена вследствие ограниченности экспериментальных результатов или из-за сложности их проведения либо из-за большой их стоимости. В этих случаях вместо законов распределения используют приближенное описание случайной величины, полученное с помощью минимального числа неслучайных характеристик, отражающих наиболее существенные особенности распределений. Часто бывает достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие существенные свойства распределения случайной величины, например, среднее значение, относительно которого группируются возможные значения случайной величины или число, характеризующее степень разброса случайной величины от ее среднего значения. Такие неслучайные характеристики, которые в сжатой форме позволяют выразить наиболее существенные особенности распределения, называются *числовыми характеристиками случайной величины*. Например, для одной случайной величины X такими числовыми (неслучайными) характеристиками являются ее математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание. Простейшей числовой характеристикой дискретной случайной величины X в данной серии опытов является ее среднее арифметическое значение

$$M[X] = m_x' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (1.15)$$

где m_x' — среднее значение случайной величины; N — число испытаний; x_i — значения случайной величины, которые она принимала при этих испытаниях; M — операция осреднения.

В технической литературе используются еще два обозначения для операции осреднения $\langle \rangle$, E . В дальнейшем для операции осреднения принято обозначение M [14].

Если некоторые значения x_j , принимаемые случайной величиной X , повторяются n_j раз, то все значения x_j можно разбить на R групп и выражение (1.15) представить в виде

$$m_x' = \sum_{j=1}^R \frac{n_j}{N} x_j = \sum_{j=1}^k W_j x_j \left(\sum_{j=1}^k n_j = N \right), \quad (1.16)$$

где W_j — частота (статистическая вероятность P_j) появления x_j .

Поэтому для дискретной случайной величины ее среднее значение равно

$$m_x^{(1)} = \sum_{j=1}^k x_j P_j.$$

Для непрерывной случайной величины X математическое ожидание равно

$$M[x] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x dP = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (1.17)$$

Дисперсия. Для характеристики разброса значений дискретной случайной величины в данной серии опытов можно взять среднее значение какой-нибудь положительной меры отклонения случайной величины от ее среднего значения, например, квадрат разности между значениями случайной величины и ее средним значением:

$$M[\overset{\circ}{X}^2] = D_x' = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} (x_i - m_x')^2 = \sum_{i=1}^k \overset{\circ}{x}_i^2 \quad (\overset{\circ}{x}_i = x_i - m_x'), \quad (1.18)$$

где $\overset{\circ}{x}_i = x_i - m_x'$ называется *центрированной случайной величиной*.

Величина D_x' называется *статистической дисперсией случайной величины* X . При практических расчетах удобнее использовать величину

$$\sigma_x' = \sqrt{D_x'}, \quad (1.19)$$

которая называется *статистическим средним квадратическим отклонением*.

Для непрерывной случайной величины дисперсия и среднее квадратическое отклонение равны

$$D_x = M[\overset{\circ}{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx; \quad (1.20)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Вероятность отклонения случайной величины от ее среднего значения на некоторую величину можно оценить, воспользовавшись формулой П.Чебышева:

$$P(|X - m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D_x}{\alpha^2}. \quad (1.21)$$

1.3.1. Основные свойства математического ожидания и дисперсии

1. Математическое ожидание детерминированной величины равно этой величине:

$$M[c] = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c.$$

2. Математическое ожидание случайной величины, умноженной на детерминированный множитель,

$$M[cX] = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x) dx = cm_x. \quad (1.22)$$

3. Дисперсия детерминированной величины C равна нулю:

$$M[\overset{\circ}{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (c - c)^2 f(x) dx = 0.$$

4. Дисперсия случайной величины, умноженной на детерминированный множитель,

$$M[(cX)^2] = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = c^2 D_x. \quad (1.23)$$

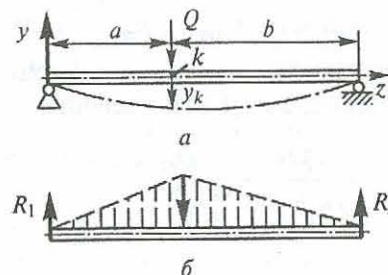


Рис. 1.3

Пример 1.1. На стержень (рис. 1.3) действует случайная сила Q с известными характеристиками m_Q и D_Q . Требуется определить математические ожидания и дисперсии реакций, прогиба в точке приложения силы Q и максимального нормального напряжения в стержне в сечении k . Жесткость балки на изгиб EJ_x .

Найдем реакции R_1 и R_2 прогиба y_k в точке приложения силы и максимальное нормальное напряжение в сечении k по формулам, полученным для детерминированных сил:

$$R_1 = \frac{b}{a+b} Q; \quad R_2 = \frac{a}{a+b} Q;$$

$$y_k = \frac{a^2 b^2}{3EJ_x(a+b)} Q; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{ab}{(a+b)W_x} Q.$$

Воспользовавшись предыдущими результатами, получим вероятностные характеристики R_1 , R_2 , y_k и $\sigma_{\max}$:

$$m_{R_1} = \frac{b}{a+b} m_Q; \quad m_{R_2} = \frac{a}{a+b} m_Q;$$

$$m_{y_k} = \frac{a^2 b^2}{3EJ_x(a+b)} m_Q; \quad m_{\sigma_{\max}} = \frac{ab}{(a+b)W_x} m_Q;$$

$$D_{R_1} = M[\overset{\circ}{R}_1^2] = \frac{b^2}{(a+b)^2} D_Q; \quad D_{R_2} = \frac{a^2}{(a+b)^2} D_Q;$$

$$D_{y_k} = \left[\frac{a^2 b^2}{3 E J_x (a + b)} \right]^2 D_Q; \quad D_{\sigma_{\max}} = \frac{a^2 b^2}{(a + b)^2 W_x^2} D_Q.$$

Оценим вероятность того, что разность $(\sigma_{\max} - m_{\sigma_{\max}})$ примет значение, превышающее предел текучести материала балки. Воспользовавшись неравенством Чебышева (1.21), получим

$$P[(\sigma_{\max} - m_{\sigma_{\max}}) \geq \sigma_T] \leq \frac{a^2 b^2}{(a + b)^2 W_x^2} \frac{D_Q}{\sigma_T^2}.$$

§ 1.4. Законы распределения плотности вероятности

Законы теории вероятностей представляют собой математическое выражение реальных закономерностей, проявляющихся в массовых случайных явлениях. К таким математическим законам, в первую очередь, относятся законы распределения случайных величин (и более общие законы распределения случайных функций). Как правило, законы распределения случайных величин устанавливаются на основании экспериментальных исследований, но иногда могут быть получены и теоретически. Пример теоретического определения закона распределения приведен в конце данного параграфа.

1. **Закон распределения плотности вероятности**, когда случайная величина X принимает с вероятностью $P = 1$ одно единственное значение $x = a$. В этом случае

$$f(x) = \delta(x - a), \quad (1.24)$$

где $\delta(x - a)$ — дельта-функция.

Основные свойства дельта-функции даны в приложении 1.

2. **Нормальный закон распределения плотности вероятности (закон Гаусса)** (рис. 1.4), который является одним из наиболее распространенных и часто применяемых на практике, характеризуется плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (1.25)$$

3. **Закон распределения плотности вероятности Релея**. Во многих прикладных задачах случайные величины могут принимать только положительные значения (амплитуды колебаний, потенциальная энергия упругой системы при случайных деформациях, кинетическая энергия системы при случайных скоростях и др.). Например, на массу m (рис. 1.5) действует случайный по величине импульс J , который сообщает массе m случайную скорость $\dot{x}$, что эквивалентно случайной ки-

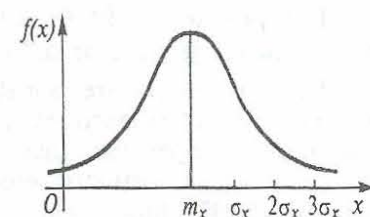


Рис. 1.4

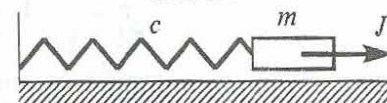


Рис. 1.5

нетической энергии $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, не зависящей от знака скорости $\dot{x}$.

Случайные величины, принимающие только положительные значения, часто подчиняются функции распределения Релея:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2a^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

В этом случае функция плотности вероятности (рис. 1.6)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-x^2/2a^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

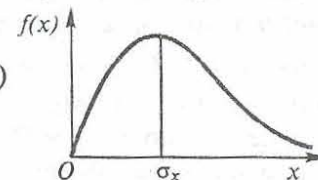


Рис. 1.6

Математическое ожидание и среднеквадратическое значение X соответственно равны

$$m_x = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-x^2/2a^2} dx = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \\ \sigma_x = 0,655a.$$

Распределение Релея является однопараметрическим, так как m_x и σ_x зависят от одного параметра a .

Если в результате обработки экспериментальных данных получился закон распределения, который можно принять за закон распределения Релея, то параметр a равен максимальному значению плотности вероятности (см. рис. 1.6). Производная $f(x)$ (1.27) равна

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) e^{-x^2/2a^2} = 0, \quad (1.28)$$

поэтому максимальное значение $f(x)$ достигается при $x = a$.

4. Закон распределения Пуассона. Дискретную случайную величину X (безразмерную) называют *распределенной по закону Пуассона*, если ее возможные значения равны $0, 1, 2, \dots, n$, а вероятность того, что $X = n$, выражается зависимостью

$$P(X = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a},$$

где $a > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной по закону Пуассона, равны: $m_x = a$ и $D_x = a$.

Это свойство распределения используют при проверке правдоподобия гипотезы о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Если статистические характеристики $m_x^{(1)}$ и $D_x^{(1)}$ близки, то это может служить подтверждением справедливости предположения, что случайная величина X распределена по закону Пуассона.

5. Закон равномерного распределения плотности вероятности. Если возможные значения непрерывной случайной величины лежат в пределах некоторого определенного интервала и, кроме

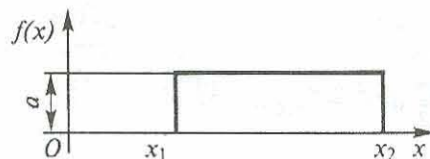


Рис. 1.7

того, известно, что в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны, то о такой случайной величине говорят, что она имеет равномерное распределение (рис. 1.7).

В этом случае

$$f(x) = \begin{cases} a, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & x < x_1 \text{ или } x > x_2 \end{cases} \quad \left(a = \frac{1}{x_2 - x_1} \right), \quad (1.29)$$

где a — плотность распределения; (x_1, x_2) — интервал возможных значений случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной равномерно на интервале (x_1, x_2) , соответственно равны

$$m_x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad D_x = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}.$$

6. Закон распределения плотности вероятности модуля случайной величины, распределенной по нормальному закону. Случайная величина Y равна модулю случайной величины X , т.е. $Y = |X|$. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Закон распределения плотности вероятности Y имеет вид

$$f(y) = f(|x|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \left[e^{-\frac{(y-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} + e^{-\frac{(y+m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \right], \quad (1.30)$$

где m_x и σ_x — параметры нормального закона распределения случайной величины X . Математическое ожидание и дисперсия случайной величины равны

$$m_y = 2 \left[m_x \Phi_0 \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) + \sigma_x \varphi \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) \right];$$

$$\sigma_y = \sigma_x^2 + m_x^2 - m_y^2,$$

где

$$\Phi_0 \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$\varphi \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Графики изменения $f(y)$ в зависимости от m_x приведены на рис. 1.8.

В частном случае, когда $m_x = 0$,

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (1.31)$$

7. Закон логарифмически нормального распределения плотности вероятности. Рассмотрим случайные величины, связанные соотношением $x = \lg y$. Если случайная величина x распределена нормально, то

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma [\lg y]} e^{-\frac{(\lg y - \lg m)^2}{2\sigma^2 [\lg y]}}. \quad (1.32)$$

Характер поведения функции $f(y)$ для ряда значений σ при $\lg m = 1$ показан на рис. 1.9.

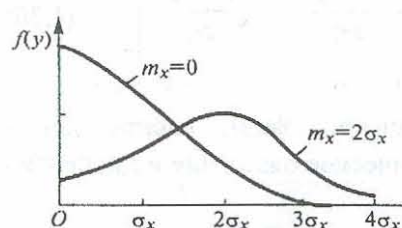


Рис. 1.8

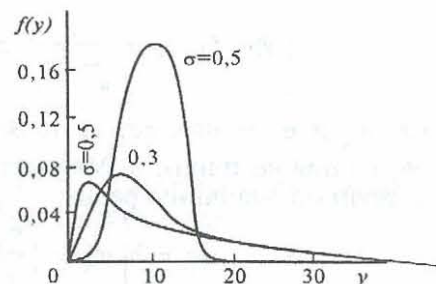


Рис. 1.9

8. Закон гамма-распределения. Для этого закона

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

где $\alpha > -1$; $\beta > 0$; $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt$ — гамма-функция.

Параметры гамма-распределения

$$\alpha = \left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 1; \quad \beta = \frac{\sigma_x^2}{m_x}.$$

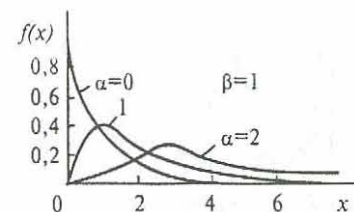


Рис. 1.10

На рис. 1.10 даны графики плотности вероятности при $\beta = 1$ для $\alpha = 0$; 1; 2. При больших значениях α гамма-распределение переходит в нормальное. Если положить в (1.33) $\beta = \frac{1}{\lambda}$ и $\alpha = k$, где k — целое положительное число, то получим плотность вероятности Эрланга

$$f(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0), \quad (1.34)$$

которая используется в теории надежности.

9. Закон распределения плотности вероятности Вейбулла. Функция распределения и плотность распределения Вейбулла при $x \geq x_a$, $\gamma > 0$ имеют вид

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{(x - x_a)^\gamma}{x_0}}; \quad (1.35)$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{x_0} (x - x_a)^{\gamma-1} e^{-\frac{(x - x_a)^\gamma}{x_0}}, \quad (1.36)$$

где x_a , x_0 и γ — свободные параметры.

В частном случае, когда $x_a = 0$ и $x_0 = 1$, получаем

$$f(x) = \gamma x^{\gamma-1} e^{-x\gamma} \quad (x > 0, \gamma > 0). \quad (1.37)$$

График функции $f(x)$ для ряда значений γ показан на рис. 1.11.

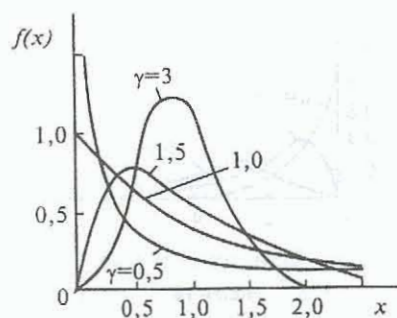


Рис. 1.11

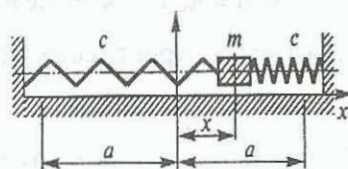


Рис. 1.12

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, подчиняющейся распределению (1.37), соответственно равны

$$m_x = \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right);$$

$$\sigma_x^2 = \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right).$$

В качестве примера аналитического определения плотности вероятности рассмотрим следующую задачу.

Точечная масса m (рис. 1.12) совершает гармонические колебания (установившиеся колебания под действием гармонической силы).

В этом случае смещение массы m в произвольный момент

$$x = a \sin \omega t,$$

где a — амплитуда колебаний.

Требуется найти плотность вероятности события, заключающегося в том, что в случайный момент времени точка m окажется на расстоянии x от положения равновесия. Можно считать, что вероятность того, что масса в произвольный момент времени окажется в интервале $(x, x + dx)$, пропорциональна длине интервала dx и обратно пропорциональна скорости движения точки, т.е.

$$dP(x < X < x + dx) = c_1 \frac{dx}{\dot{x}} = c_1 \frac{dx}{dx/dt} = c_1 dt,$$

где c_1 — коэффициент пропорциональности.

Так как

$$dP = f(x) dx,$$

то после преобразований получим

$$f(x) = c_1 \frac{dt}{dx}.$$

Из этого выражения для $f(x)$ исключим время t , воспользовавшись законом движения массы m :

$$\frac{dx}{dt} = a \omega \cos \omega t = a \omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} =$$

$$= a \omega \sqrt{1 - (x/a)^2} = \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Получим

$$f(x) = \frac{c_1}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Найдем значение c_1 из условия нормирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx = 1.$$

После вычислений получим $c_1 = \omega/\pi$. Окончательное выражение для плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

На рис. 1.13 приведен график функции плотности вероятности $f(x)$.

Функция распределения

$$F(x) = \int_{-a}^x f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Вероятность нахождения массы m в произвольный момент времени в интервале (x_1, x_2)

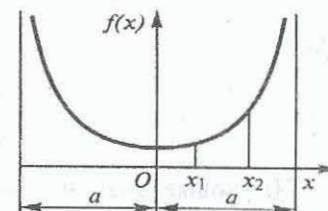


Рис. 1.13

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_2}{a} - \arcsin \frac{x_1}{a} \right).$$

§ 1.5. Определение вероятности попадания нормально распределенной случайной величины на заданный участок

Вероятность попадания случайной величины на участок (x_1, x_2) определяем из соотношения (1.9).

Функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (1.38)$$

Введя обозначение $\frac{x-m_x}{\sigma} = t$, получим интеграл вероятностей

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t).$$

Тогда

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где

$$t_1 = \frac{x_1 - m_x}{\sigma}; \quad t_2 = \frac{x_2 - m_x}{\sigma}.$$

Числовые значения $\Phi(t_2)$ и $\Phi(t_1)$ приводятся в справочниках.

Найдем вероятность попадания случайной величины X на отрезки длиной σ (рис. 1.14).

Вероятность попадания X на отрезок $(m_x, m_x + \sigma)$

$$P = (m_x < X < m_x + \sigma) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где

$$t_2 = \frac{m_x + \sigma - m_x}{\sigma} = 1; \quad t_1 = \frac{m_x - m_x}{\sigma} = 0,$$

поэтому

$$P(m_x < X < m_x + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(0).$$

Взяв значения $\Phi(1)$ и $\Phi(0)$ из таблиц справочника по высшей математике, окончательно получим

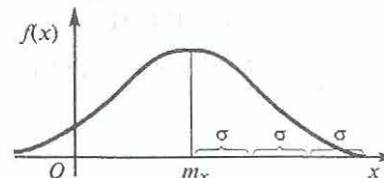


Рис. 1.14

$$P(m_x < X < m_x + \sigma) = 0,341.$$

Аналогично находим вероятность попадания X в следующие отрезки длины σ :

$$P(m_x + \sigma < X < m_x + 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,136;$$

$$P(m_x + 2\sigma < X < m_x + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0,012.$$

Сумма этих трех вероятностей приблизительно равна 0,5 (с точностью до 1 %). Это значит, что для нормально распределенной случайной величины все рассеяние практически укладывается на участок $m_x \pm 3\sigma$. Полученный результат позволяет по известным значениям математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины приблизительно указать интервал ее возможных значений (такой способ оценки называют «правилом трех сигм»). Этой приближенной оценкой можно пользоваться только в том случае, когда реализацией события, имеющего малую вероятность, можно пренебречь.

Пример 1.2. На безынерционный стержень действует периодическая сила $F = F_0 \cos \omega t$ со случайной нормально распределенной амплитудой F_0 (рис. 1.15).

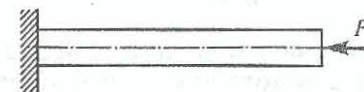


Рис. 1.15

Ее вероятностные характеристики $m_{F_0} = 6,5 \text{ Н}$, $\sigma_{F_0} = 2,4 \text{ Н}$. Требуется определить вероятность того, что сила, действующая на стержень, находится в интервале 100...120 Н.

Определяем значения t_2 и t_1 :

$$t_2 = \frac{120 - 65}{24} = 2,292; \quad t_1 = \frac{100 - 65}{24} = 1,458.$$

Вероятность появления амплитуды силы, находящейся в интервале 100...120 Н,

$$P(100 < F_0 < 120) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 0,0614.$$

§ 1.6. Системы случайных величин и их числовые характеристики

Рассмотрим наиболее простой случай — систему двух случайных величин X , Y .

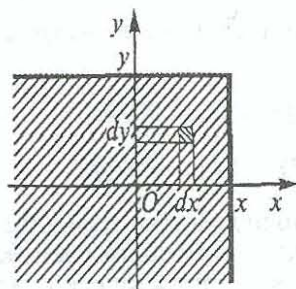


Рис. 1.16

Совместной функцией распределения двух случайных величин X и Y называют вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$, т.е.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (1.39)$$

Геометрически соотношение (1.39) представляет собой вероятность попадания случайной точки в заштрихованную область (рис.1.16).

Двухмерную плотность вероятности можно ввести по аналогии с одномерной, а именно:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x; y \leq Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.40)$$

Из соотношения (1.40) следует, что $f(x, y) dx dy$ есть вероятность того, что точка попала в бесконечно малый прямоугольник (рис. 1.16). Вероятность того, что точка попала в некоторую конечную область B плоскости, равна

$$P = \iint_B f(x, y) dx dy. \quad (1.41)$$

Функция распределения и плотность вероятности связаны соотношением

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (1.42)$$

Из формулы (1.42) следует

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad (1.43)$$

Функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- 2) $F(-\infty, y) = 0$ при любом y ;
- 3) $F(x, -\infty) = 0$ при любом x ;
- 4) $F(x, \infty) = P(X < x) = F_1(x)$;
- 5) $F(\infty, x) = P(Y < y) = F_2(y)$;
- 6) $F(\infty, \infty) = 1$.

Функция $f(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (1.44)$$

Можно получить плотности вероятности каждой случайной величины через совместную плотность вероятности по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad (1.45)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (1.46)$$

Случайные величины X и Y называют *зависимыми*, если события, заключающиеся в выполнении неравенств $X < x$ и $Y < y$, зависимы хотя бы при одной паре значений x и y .

Условные законы распределения. Условным законом распределения одной из величин (X, Y) , входящих в систему, называют ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, т.е.

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y | X < x)$$

или

$$F(x, y) = F_2(y) F_1(x | Y < y). \quad (1.47)$$

Дифференцируя сначала по x , а затем по y , получаем (теорема умножения законов распределения [12])

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) = f_1(x) f_2(y | x) \quad (1.48)$$

или

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) = f_2(y) f_1(x | y). \quad (1.49)$$

Соотношения (1.48) и (1.49) называют теоремой умножения законов распределения. Из (1.48) и (1.49) находим условные законы распределения через безусловные:

$$f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}; \quad f(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

или

$$f(y | x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}; \quad f(x | y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}.$$

Для условных плотностей выполняются условия:

$$f(x | y) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x | y) dx = 1$$

и

$$f(y | x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y | x) dy = 1.$$

Случайные величины X и Y считают независимыми, если события, заключающиеся в выполнении неравенств $X < x$, $Y < y$, независимы при любых значениях x и y . Для независимых случайных величин X, Y совместная функция распределения (на основании правила умножения вероятностей независимых событий)

$$F(x, y) = P(X < x) P(Y < y) \quad (1.50)$$

или

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y). \quad (1.51)$$

Дифференцируя соотношение (1.51) сначала по x , а затем по y , получаем

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} = f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (1.52)$$

Числовые характеристики системы двух случайных величин. Для установления «связи» между двумя случайными величинами X и Y вводится неслучайная числовая характеристика — корреляционный момент K_{xy} , который для дискретных случайных величин равен

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) P_{ij},$$

где P_{ij} — вероятность того, что система (X, Y) примет значение (x_i, y_j) . Для непрерывных случайных величин корреляционный (взаимно корреляционный) момент равен

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ — совместный закон распределения плотности вероятности системы случайных величин (X, Y) .

В качестве примера совместного закона распределения двух случайных величин приведем нормальный закон распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)} \left[\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}. \quad (1.53)$$

Для двух случайных непрерывных величин имеем следующие вероятностные характеристики:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy, \quad (1.54)$$

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy;$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy, \quad (1.55)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy;$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy. \quad (1.56)$$

Для независимых случайных величин $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, поэтому из формулы (1.56) получаем

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) (x - m_x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) (y - m_y) dy = (m_x - m_x)(m_y - m_y) = 0.$$

Следовательно, если корреляционный момент двух случайных величин отличен от нуля, то это указывает на наличие зависимости между ними. Случайные величины, для которых корреляционный момент равен нулю, называют *некоррелированными*. Из формулы (1.56) следует, что корреляционный мо-

мент характеризует не только зависимость величин, но и их рассеяние. Если, например, одна из величин X или Y мало отклоняется от своего математического ожидания, то корреляционный момент будет мал, какой бы зависимостью эти величины ни были связаны, поэтому для устранения этого недостатка вводится безразмерная характеристика — коэффициент корреляции (или нормированные корреляционные моменты):

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1.57)$$

где σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения случайных величин X и Y . Коэффициент корреляции может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Коэффициент r_{xy} изменяется в пределах

$$-1 < r_{xy} < 1. \quad (1.58)$$

Докажем справедливость соотношения (1.58). Рассмотрим случайную величину z :

$$z = \sigma_y X \pm \sigma_x Y,$$

где σ_x, σ_y — среднеквадратичные значения случайных центрированных величин X и Y . Дисперсия случайной величины Z равна

$$D_Z = M[Z^2] = \sigma_y^2 D_x + \sigma_x^2 D_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy}.$$

Дисперсия больше нуля, поэтому

$$\sigma_y^2 D_x + \sigma_x^2 D_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} \geq 0,$$

или (так как $D_x = \sigma_x^2, D_y = \sigma_y^2$)

$$\sigma_y \sigma_x \pm K_{xy} \geq 0.$$

Из последнего соотношения следует

$$|K_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

или

$$|r_{xy}| \leq 1. \quad (1.59)$$

Найдем, например, r_{xy} для линейно связанных случайных центрированных величин Y и X :

$$Y = aX.$$

Дисперсия D_y равна $a^2 D_x$. Взаимно корреляционный момент

$$K_{xy} = M[XY] = aM[X^2] = aD_x,$$

поэтому

$$r_{xy} = \frac{aD_x}{a\sigma_x\sigma_x} = 1.$$

Справедливо и обратное: если коэффициент корреляции r_{xy} близок к единице, то связь случайных величин X и Y мало отличается от линейной. Коэффициент корреляции r_{xy} (1.57), устанавливающий степень взаимосвязи между двумя случайными функциями, не имеет строгого функционального характера. Корреляционная зависимость, в отличие от функциональной, используется, когда одна из величин зависит не только от второй величины, но и от ряда случайных факторов, учесть которые при установлении связи между величинами невозможно.

Зависимость между случайными величинами X и Y проявляется в том, что условная вероятность появления, например, Y_j при реализации события x_k отличается от безусловной вероятности, т.е. влияние одной случайной величины на другую характеризуется условным распределением одной из них при фиксированном значении другой. Практическое использование коэффициента корреляции при количественной оценке степени взаимосвязанности (зависимости) двух случайных величин, как правило, справедливо, когда закон распределения нормальный. В этом случае из равенства $K_{xy} = 0$ следует независимость случайных величин. Для оценки меры зависимости двух произвольных случайных величин использовать K_{xy} нельзя, так как даже при функциональной связи двух величин (однозначной зависимости) корреляционный момент может быть равен нулю, т.е. понятия некоррелированности и независимости не эквивалентны.

Выясним более подробно, эквивалентно ли понятие некоррелированности случайных величин понятию независимости. Было показано, что две независимые случайные величины всегда являются некоррелированными. Возникает вопрос — справедливо ли обратное утверждение? Рассмотрим пример. Система двух случайных величин (X, Y) имеет равномерную плотность вероятности внутри окружности радиуса R (область D на рис. 1.17). Совместная плотность распределения случайных величин X и Y выражается формулой

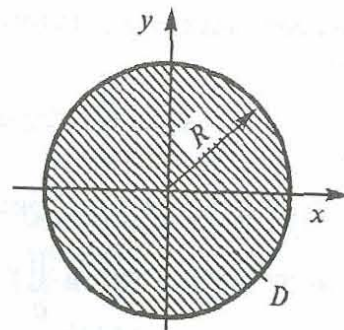


Рис. 1.17

$$f(x, y) = \begin{cases} a & \text{при } x^2 + y^2 < R^2; \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Из условия нормировки функции $f(x, y)$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \iint_D dx dy = 1,$$

поэтому

$$a = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Покажем, что в этом примере случайные величины X и Y являются зависимыми. Если случайная величина Y приняла значение 0, то случайная величина X может с равной вероятностью принимать все значения от $-R$ до $+R$. Если же случайная величина Y приняла значение R , то случайная величина X может принять только одно-единственное значение, равное нулю, т.е. диапазон возможных значений X зависит от того, какое значение приняла величина Y . Поэтому случайные величины X и Y являются зависимыми. Теперь выясним, являются ли они коррелированными. Найдем их взаимно корреля-

ционный момент K_{xy} (случайные величины X и Y центрированные):

$$K_{xy} = \iint_D xyf(xy)dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D xy dx dy.$$

Так как оси x, y (см. рис. 1.17) являются осями симметрии области D , то интеграл $\iint_D xy dx dy$ равен нулю, т.е. $K_{xy} = 0$.

Полученный результат говорит о том, что случайные величины X и Y не коррелированы. Поэтому из некоррелированности случайных величин не всегда следует их независимость. Однако при практических расчетах коэффициент корреляции дает качественную информацию о взаимозависимости двух случайных величин. Например, если $r_{xy} > 0$, то при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем тоже возрасти и при $r_{xy} < 0$ при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию в среднем убывать.

Дисперсии и корреляционные моменты для двух случайных величин можно представить в виде матрицы

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (K_{xx} = D_x, \quad K_{yy} = D_y). \quad (1.60)$$

Для системы n случайных величин дисперсии и корреляционные моменты можно, как и для систем двух случайных величин, представить в виде корреляционной матрицы

$$K = \begin{bmatrix} K_{x_1 x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_n x_1} & K_{x_n x_2} & \dots & K_{x_n x_n} \end{bmatrix}, \quad K_{x_i x_i} = D_{x_i}, \quad (1.61)$$

или в виде нормированной корреляционной матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_n} \\ r_{x_2 x_1} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_n x_1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Числовые характеристики суммы и произведения двух случайных величин. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y]. \quad (1.63)$$

Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенный корреляционный момент:

$$D(X + Y) = D_x + D_y + 2K_{xy}. \quad (1.64)$$

Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс корреляционный момент:

$$M[XY] = M[X] M[Y] + K_{xy}. \quad (1.65)$$

Дисперсия произведения независимых случайных величин равна

$$D(XY) = M[X^2] \cdot M[Y^2] - m_x^2 m_y^2, \quad (1.66)$$

где $M[X^2] = D_x + m_x^2$, $M[Y^2] = D_y + m_y^2$.

Для центрированных случайных величин

$$D(\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}) = D_x D_y. \quad (1.67)$$

§ 1.7. Комплексные случайные величины

Часто при решении прикладных задач приходится рассматривать не только действительные, но и комплексные случайные величины, поэтому возникает необходимость в обобщении понятия математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции на комплексные случайные величины. *Комплекс-*

ной случайной величиной называют такую случайную величину, возможные значения которой — комплексные числа, т.е.

$$Z = X + iY, \quad (1.68)$$

где X, Y — действительные случайные числа; i — мнимая единица.

Особенно большую роль комплексные величины играют в теории случайных функций.

Рассматривая выражение (1.68) как сумму случайных величин, получаем в соответствии с (1.63) математическое ожидание случайной величины Z :

$$m_z = m_x + im_y. \quad (1.69)$$

Дисперсией комплексной случайной величины Z называют математическое ожидание от квадрата модуля центрированной случайной величины $\overset{\circ}{Z}$:

$$D_z = M[|\overset{\circ}{Z}|^2], \quad (1.70)$$

где $|\overset{\circ}{Z}|$ — модуль центрированной случайной величины.

При таком определении дисперсия комплексной случайной величины всегда действительна и положительна, т.е. сохраняется основное свойство дисперсии.

$$\text{Так как } |\overset{\circ}{Z}|^2 = \overset{\circ}{Z} \overset{\circ}{Z}^* = \overset{\circ}{X}^2 + \overset{\circ}{Y}^2,$$

где $\overset{\circ}{Z}^*$ — сопряженная комплексная величина, то из (1.70) получаем

$$D_z = M[\overset{\circ}{X}^2 + \overset{\circ}{Y}^2] = D_x + D_y. \quad (1.71)$$

Корреляционный момент двух комплексных случайных величин $X = X_1 + iX_2$ и $Y = Y_1 + iY_2$ в частном случае, когда $X = Y$, должен быть равен дисперсии D_x . Это имеет место, если принять

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}^*], \quad (1.72)$$

где $\overset{\circ}{Y}^*$ — центрированная сопряженная случайная величина.

Действительно, при таком определении корреляционного момента при $X = Y$ получаем

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}^*] = D_x.$$

Для произвольных комплексных случайных величин

$$K_{xy} = M[(\overset{\circ}{X}_1 + i\overset{\circ}{X}_2)(\overset{\circ}{Y}_1 - i\overset{\circ}{Y}_2)] = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2} + i(K_{x_2y_1} - K_{x_1y_2}). \quad (1.73)$$

Корреляционный момент комплексных случайных величин зависит от порядка, в котором берутся случайные величины, а именно при изменении порядка случайных величин их корреляционный момент переходит в комплексную сопряженную величину

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}^*] = M[\overset{\circ}{X}^* \overset{\circ}{Y}] = K_{yx}^*. \quad (1.74)$$

§ 1.8. Числовые характеристики функций случайных аргументов

Часто при решении различных технических задач, связанных с анализом случайных явлений, приходится рассматривать случайные функции, зависящие от случайных величин, законы распределения которых известны. Зная законы распределения аргументов сложной функции, можно установить и ее закон распределения. Но, как правило, при решении прикладных задач бывает достаточно числовых характеристик функции от случайных аргументов, получить которые существенно проще, чем закон распределения.

Рассмотрим задачу определения числовых характеристик функции y от случайного аргумента x при известном законе распределения аргумента x , т.е. требуется определить m_y и D_y , если

$$y = \varphi(x). \quad (1.75)$$

Для прерывной случайной величины X известны вероятности появления дискретных значений x_j , известен закон распределения ($x_j \rightarrow p_j$). Поэтому из (1.75) имеем ($y_j \rightarrow p_j$), где $y_j = \varphi(x_j)$, т.е. получаем табл. 1.2:

Таблица 1.2

Ряд распределения $\varphi(x_j)$

$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\varphi(x_3)$	...	$\varphi(x_n)$
p_1	p_2	p_3	...	p_n

Эта таблица аналогична табл. 1.1, определяющей закон распределения случайной величины X . В табл. 1.2 $\varphi(x_j)$ не обязательно идут в возрастающей последовательности, кроме того, возможны совпадения $\varphi(x_j)$ при разных x_j , но всегда можно расположить величины $\varphi(x_j)$ в порядке возрастания, объединить столбцы с равными $\varphi(x_j)$, сложив их вероятности, т.е. получить таблицу, полностью соответствующую функции распределения. Поэтому для дискретной случайной величины Y математическое ожидание равно

$$M[Y] = M[\varphi(x)] = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) p_j = m_y^{(1)}. \quad (1.76)$$

Для непрерывной случайной величины Y

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx = m_y. \quad (1.77)$$

Дисперсия функции, зависящей от одного случайного аргумента,

$$D_y = D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x) dx. \quad (1.78)$$

Для функции, зависящей от двух случайных аргументов,

$$Z = \varphi(X, Y) \quad (1.79)$$

математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy = m_z; \quad (1.80)$$

$$D_z = D[\varphi(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y) - m_z]^2 f(x, y) dx dy. \quad (1.81)$$

В первой главе были приведены в кратком изложении основные разделы теории вероятностей.

Для более глубокого изучения теории вероятностей можно, например, рекомендовать следующие учебники и монографии [12, 13, 29, 30].

Глава 2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОЦЕССЫ)

В инженерной практике приходится иметь дело со случайными величинами, зависящими от непрерывно изменяющихся неслучайных аргументов, например, от времени t и координат x, y, z . Такие случайные величины называются *случайными функциями*.

На рис. 2.1 приведены записи $X_j(t)$ случайной функции $X(t)$, зависящей от времени. Каждая конкретная запись называется *реализацией случайной функции $X(t)$* . Совокупность всех возможных реализаций, которые может дать случайное явление $X(t)$, называется *случайным, или стохастическим, процессом*. Соответствующую научную дисциплину, которая занимается изучением случайных процессов, зависящих от времени, можно назвать *динамикой случайных явлений*.

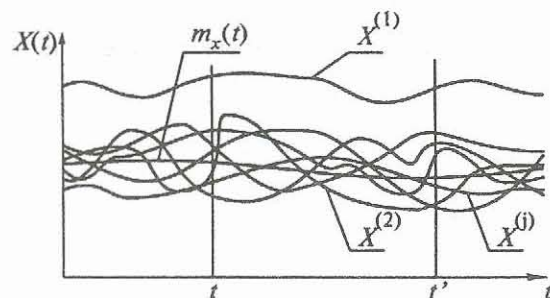


Рис. 2.1

Случайную функцию $X(t)$, зависящую только от t , будем называть *случайным процессом* по аналогии с динамическим детерминированным процессом. Случайную функцию, завися-

щую от координат и времени, принято называть *случайным пространственно-временным процессом* или, когда это не приводит к недоразумению, более лаконично — *случайным процессом*.

Во введении приводились примеры динамических систем, исследование которых требует решения дифференциальных уравнений возмущенного движения, вызванного случайными силами, изменяющимися во времени. Эти задачи относятся к «динамическим случайным явлениям», т.е. к случайным процессам. Например, случайной функцией является разброс ΔR тяги двигателя R , который зависит от времени (см. рис. В.2). Следует отметить, что при изучении случайных процессов исследуют не свойства отдельных случайных функций $X_j(t)$, характеризующих процесс, а свойства всего множества функций в целом. Это дает возможность при анализе движения механической системы, находящейся под воздействием случайных возмущений, исследовать ее поведение не по отношению к какому-либо одному воздействию, а по отношению к целой совокупности возможных случайных воздействий.

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. Предположим, что произведено « n » независимых опытов, в результате которых получено « n » реализаций $X_j(t)$ (см. рис. 2.1). Каждая реализация есть неслучайная функция, но предсказать, как будет изменяться $X_j(t)$, до опыта нельзя. Ставшее известным при опыте изменение $X_j(t)$ от нуля до t_1 не позволяет предсказать поведение $X_j(t)$ при $t > t_1$, т.е. $X_j(t)$ при $t > t_1$ неопределенно. Если зафиксировать аргумент $t = t_1$, то случайная функция $X(t)$ превратится в случайную величину X , которая является предметом рассмотрения в теории вероятностей. Условимся называть эту случайную величину *сечением случайной функции $X(t)$, соответствующим данному моменту t_1* (см. рис. 2.1). При $t = t_1$ получаем n значений случайной функции. Можно, зафиксировав время, рассматривать изменение процесса по множеству испытаний. Поэтому каждая реализация, характеризующая процесс, зависит от двух неслучайных аргументов — дискретного номера реализации и непрерывного времени. Например, если записывать вертикальные ускорения в какой-либо точке автомашины (см. рис. В.1, а), то при каждом проезде по одной

и той же дороге с одной и той же скоростью получаем одну реализацию $X_j(t)$; совокупность этих реализаций определяет случайный процесс.

В инженерной практике наибольший интерес представляет анализ случайных колебаний машин, приборов и конструкций, от которых очень существенно зависит их работоспособность (усталостная прочность, надежность и ресурс). Нет ни одной отрасли промышленности, где бы при проектировании новой техники не использовались при расчетах те или иные разделы статистической механики и, в частности, один из основных разделов, посвященный теории и численным методам анализа случайных процессов.

Рассмотрим более подробно колебания механических систем, вызванные случайными возмущениями. На рис. В.2 показан старт ракеты с наклонной направляющей. Из-за случайных суммарных технологических и газодинамических эксцентриситетов (линейного e и углового α), переменных во времени тяга R направлена не по оси ракеты, что приводит к появлению двух случайных возмущений — силы $N_c = |R|\alpha$ и момента $M_c = |R|e$ (кроме разброса тяги ΔR). На рис. В.1, а показан автомобиль, который движется по дороге со случайными неровностями ($h(x)$). Так как при постоянной скорости $x = vt$, то $h(vt)$ является случайной функцией, зависящей от времени.

На рис. В.5 показано высотное сооружение (например, телебашня), на которое действует ветровая нагрузка (распределенная аэродинамическая сила $q(t)$), имеющая из-за случайной составляющей скорости потока случайную составляющую, т.е.

$$q(t) = q_0(t) + \Delta q(t),$$

где $q_0(t)$ — детерминированная составляющая распределенной нагрузки; $\Delta q(t)$ — случайная составляющая распределенной нагрузки, зависящая от времени.

Нагрузки q_0 и Δq соответственно зависят от $v_0(t)$ и $\Delta v(t)$, где $v_0(t)$ — модуль детерминированной составляющей скорости ветра; $\Delta v(t)$ — модуль проекции случайной составляющей скорости потока на направление вектора v_0 . Если скорость ветра по высоте постоянна (не зависит от z), то случайная распре-

деленная нагрузка $q(t)$ зависит только от времени. В общем случае скорость ветра v для высоких сооружений может зависеть и от координаты z . Поэтому

$$v(t, z) = v_0(z, t) + \Delta v(z, t),$$

где $\Delta v(z, t)$ — одномерная векторная случайная функция.

При действии случайной ветровой нагрузки на элементы конструкций типа пластин и оболочек возникающая распределенная аэродинамическая нагрузка зависит от двух координат и времени (рис. 2.2):

$$q = q(t, x, y).$$

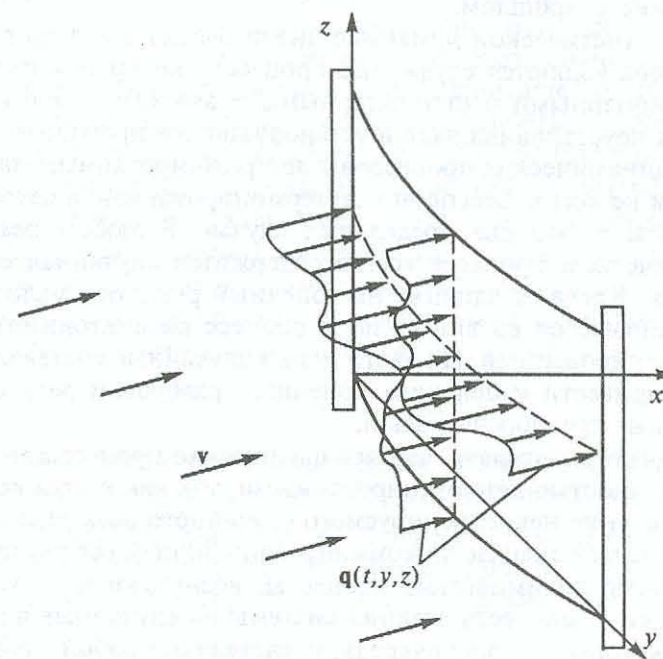


Рис. 2.2

В инженерной практике приходится иметь дело с различными случайными процессами, методы описания которых в значительной степени зависят от их природы, поэтому целесо-

образно случайные процессы как-то классифицировать, чтобы облегчить их выбор при исследовании прикладных задач, что требует введения соответствующей терминологии, которая позволяла бы отвечать на вопрос: какой конкретно случайный процесс рассматривается.

Напомним, что в классической аналитической динамике и теории колебаний рассматриваются детерминированные процессы (под динамическим процессом понимается реакция системы на внешнее детерминированное возмущение, изменение которого во времени известно точно). Основная особенность детерминированных процессов заключается в том, что поведение процесса в будущем можно точно предсказать, зная его поведение в прошлом.

В статистической динамике аналогом детерминированных процессов являются случайные процессы, которые могут быть нестационарными и стационарными — аналоги детерминированных неуставившихся и уставившихся процессов. Отнесение динамических процессов к детерминированным или случайным не всегда бесспорно. Детерминированные и случайные процессы — это два предельных случая. В любом реальном динамическом процессе всегда содержится случайная составляющая. Когда ее влияние на конечный результат мало — она не принимается во внимание и процесс рассматривается как детерминированный. Но часто малые случайные составляющие могут привести к большим конечным разбросам результатов, которыми пренебречь нельзя.

Можно утверждать, что все физические процессы не являются полностью детерминированными, так как всегда возможно появление неконтролируемого случайного возмущения, которое сделает вначале детерминированный процесс случайным. Случайные динамические процессы, возникающие в механических системах, есть реакция системы на случайные внешние силы, которые, в свою очередь, представляют собой случайные процессы.

Чтобы исследовать случайное движение механической системы, необходимо иметь, как минимум, подробную информацию о случайных внешних силах, например, вероятностных характеристиках случайных процессов. Поэтому данная глава посвящена изложению общей теории случайных функций —

случайных процессов, частным случаем которых являются случайные процессы, описывающие внешние нагрузки («вход»), действующие на механические системы. Без знания вероятностных характеристик «входа» невозможно получить вероятностные характеристики «выхода», которые необходимы для оценки «прочности» конструкции.

§ 2.1. Вероятностные характеристики нестационарных случайных функций

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$ (см. рис. 2.1), которая при каждом фиксированном значении аргумента t является случайной величиной, полной вероятностной характеристикой которой является ее закон распределения при данном значении x . Этот закон распределения называется *одномерным законом распределения случайной величины X* , зависящей от параметра t , и может быть задан одномерной плотностью вероятности $f(x, t)$. Однако для случайной функции $X(t)$ одномерный закон распределения $f(x, t)$ не является ее полной характеристикой. Функция $f(x, t)$ характеризует только закон распределения $X(t)$ для данного, хотя и произвольного t . Зная $f(x, t)$, нельзя ответить на вопрос о зависимости случайных величин $X(t)$ при различных t . Более полной характеристикой случайной функции $X(t)$ является двумерный закон распределения

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad (2.1)$$

представляющий собой распределение системы двух случайных величин $X(t_1)$, $X(t_2)$ (см. рис. 2.1) для двух произвольных сечений случайной функции $X(t)$. Но и эту характеристику в общем случае нельзя назвать исчерпывающей, так как еще более полной характеристикой является трехмерный закон распределения

$$f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3). \quad (2.2)$$

Теоретически можно неограниченно увеличивать число аргументов и получать при этом все более подробную информацию о случайной функции. Однако использовать в расчетной практике столь громоздкие характеристики, зависящие от мно-

гих аргументов, практически невозможно. Поэтому в прикладных задачах анализа случайных динамических процессов, как правило, используются только одномерные и двумерные распределения. Теория случайных функций, использующая только одномерные и двумерные законы распределения, называется *корреляционной теорией*.

В первой главе было показано, что в теории вероятностей очень большую роль играют неслучайные числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание и дисперсия — для одной случайной величины, математические ожидания и корреляционная матрица — для системы случайных величин. Числовые характеристики представляют собой весьма гибкий и мощный математический аппарат, позволяющий сравнительно просто решать многие практические задачи. Искусство пользоваться ими составляет основу прикладной теории вероятностей.

Для случайных функций также вводятся простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин, и устанавливаются правила действий с этими характеристиками. Такой аппарат оказывается достаточным для решения многих практических задач. В отличие от числовых характеристик случайных величин, представляющих собой определенные числа, характеристики случайных функций в общем случае не числа, а функции.

Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$ при фиксированном t . В этом сечении мы имеем обычную случайную величину. Определим ее математическое ожидание. Очевидно, в общем случае математическое ожидание зависит от t , т.е. представляет собой некоторую функцию t (см. рис. 2.1):

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (2.3)$$

Таким образом, *математическим ожиданием случайной функции $X(t)$* называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции. Аналогичным образом определяется дисперсия случайной функции.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D_x(t) = D[X(t)]. \quad (2.4)$$

Дисперсия случайной функции при каждом t характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего, иными словами, «степень случайности» случайной функции.

Так же как и для случайных величин, $D_x(t)$ есть неотрицательная функция. Извлекая из нее квадратный корень, получаем функцию $\sigma_x(t)$ — среднее квадратическое отклонение случайной функции:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (2.5)$$

Математическое ожидание и дисперсия представляют собой весьма важные характеристики случайной функции; однако для описания основных особенностей случайной функции этих характеристик недостаточно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, наглядно изображенные семействами реализаций на рис. 2.3, а и б.

Случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеют почти одинаковые математические ожидания и дисперсии; однако характер изменения реализаций этих случайных функций совершенно различен. Для случайной функции $X_1(t)$ (рис. 2.3, а) характерна ярко выраженная зависимость между ее значениями при различных t . Напротив, случайная функция $X_2(t)$ (рис. 2.3, б) имеет беспорядочный колебательный характер. Для такой случайной функции характерно быстрое уменьшение зависимости между ее значениями при t' и t при увеличении интервала $t' - t$.

Внутренняя структура этих случайных процессов совершенно различна, но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией. Поэтому вводится еще одна неслучайная характеристика, которая называется *корреляционной функцией* (иначе — автокорреляционной функцией). Корреляционная функция характеризует степень зависимости

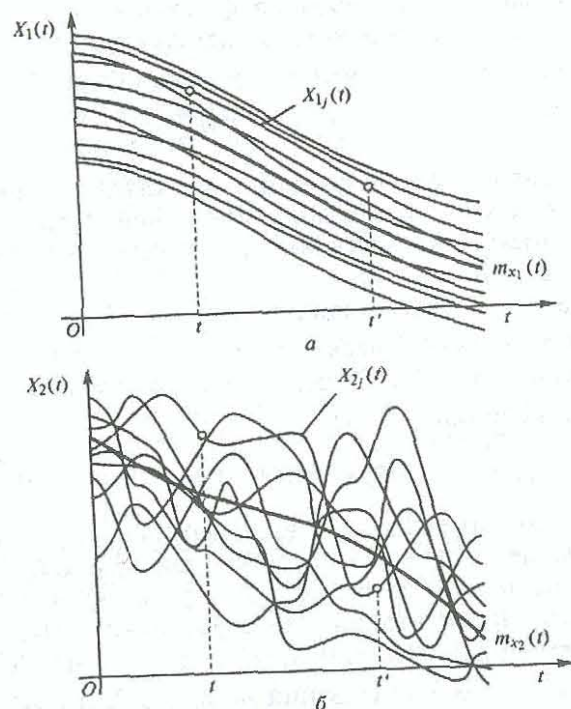


Рис. 2.3

между сечениями случайной функции, относящимися к двум различным моментам времени (t и t').

Рассмотрим два сечения случайной функции $X_1(t)$ (рис. 2.3, а), относящихся к различным моментам: t и t' . Очевидно, что при близких значениях t и t' величины $X_1(t)$ и $X_1(t')$ связаны тесной зависимостью: если величина $X_1(t)$ приняла какое-то значение, то и величина $X_1(t')$ с большой вероятностью примет значение, близкое к нему. Для случайной функции $X_2(t)$ это далеко не очевидно. При увеличении интервала между сечениями t , t' зависимость между $X_j(t)$ и $X_j(t')$ вообще должна ослабевать.

Степень зависимости величин $X(t)$ и $X(t')$ может быть в значительной мере охарактеризована их корреляционным моментом.

Таким образом, корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t, t')$, которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')], \quad (2.6)$$

где

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t), \quad \overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$$

($\overset{\circ}{X}(t)$, $\overset{\circ}{X}(t')$ — центрированные случайные функции.)

При одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях рассмотренные в качестве примера случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеют совершенно различные корреляционные функции. Корреляционная функция случайной функции $X_1(t)$ (см. рис. 2.3, а) медленно убывает по мере увеличения промежутка (t, t'); напротив, корреляционная функция случайной функции $X_2(t)$ (см. рис. 2.3, б) быстро убывает с увеличением этого промежутка.

Корреляционная функция $K_x(t, t')$, когда ее аргументы совпадают, равна дисперсии случайной функции:

$$K_x(t, t') = M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right] = D_x(t). \quad (2.7)$$

Так как корреляционный момент двух случайных величин $X(t)$ и $X(t')$ не зависит от последовательности, в которой эти величины рассматриваются, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т.е. не меняется при перемене аргументов местами:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \quad (2.8)$$

Качественный характер изменения K_x от t и t' показан на рис. 2.4.

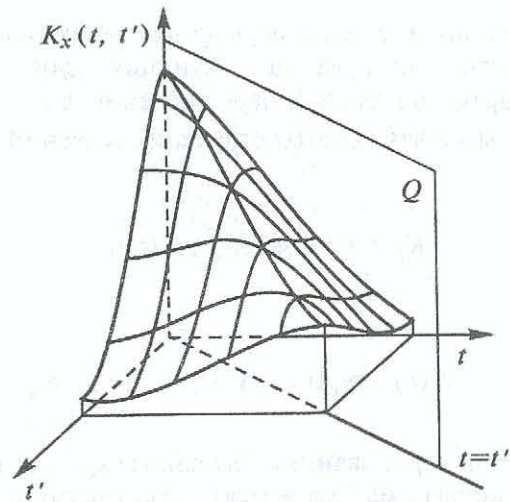


Рис. 2.4

Вместо корреляционной функции $K_x(t, t')$ можно пользоваться нормированной корреляционной функцией

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')}, \quad (2.9)$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t)$, $X(t')$. Нормированная корреляционная функция аналогична нормированной корреляционной матрице системы случайных величин. Она удовлетворяет условию, аналогичному условию (1.59):

$$|r_x(t, t')| \leq 1,$$

так как

$$|K_x(t, t')| \leq \sigma_x(t) \sigma_x(t').$$

При $t' = t$ нормированная корреляционная функция равна единице:

$$r_x(t, t) = \frac{K_x(t, t)}{[\sigma_x(t)]^2} = \frac{D_x(t)}{[\sigma_x(t)]^2} = 1.$$

Рассмотрим, как изменяются основные характеристики случайной функции при прибавлении неслучайного слагаемого и при умножении на неслучайный множитель. Эти неслучайные слагаемые и множители могут быть как постоянными величинами, так в общем случае и функциями t .

Прибавив к случайной функции $X(t)$ неслучайное слагаемое $\varphi(t)$, получаем новую случайную функцию:

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t). \quad (2.10)$$

По теореме сложения математических ожиданий имеем

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t), \quad (2.11)$$

т.е. при прибавлении к случайной функции неслучайного слагаемого к ее математическому ожиданию прибавляется неслучайное слагаемое.

Получим корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $Y(t)$:

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[\overset{\circ}{Y}(t) \overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = \\ &= M[(X(t) + \varphi(t) - m_x(t) - \varphi(t))(X(t') + \varphi(t') - m_x(t') - \varphi(t'))] = \\ &= M[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = K_x(t, t'); \end{aligned}$$

$$D_y(t) = D_x(t),$$

т.е. от прибавления неслучайного слагаемого корреляционная функция и дисперсия случайной функции не меняются.

Умножим случайную функцию $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$:

$$Y(t) = \varphi(t) X(t). \quad (2.12)$$

Вынося неслучайную функцию $\varphi(t)$ за знак математического ожидания, имеем

$$m_y(t) = M[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) m_x(t), \quad (2.13)$$

т.е. при умножении случайной функции на неслучайный множитель ее математическое ожидание умножается на тот же множитель.

Получим корреляционную функцию и дисперсию:

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[\overset{\circ}{Y}(t) \overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = \\ &= M[\varphi(t) \varphi(t')(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = \\ &= \varphi(t) \varphi(t') K_x(t, t'); \\ D_y(t) &= \varphi^2(t) D_x(t), \end{aligned} \quad (2.14)$$

т.е. при умножении случайной функции на неслучайную функцию $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на $\varphi(t) \varphi(t')$, а дисперсия — на $\varphi^2(t)$.

В частности, когда $\varphi(t) = c$ (не зависит от t), корреляционная функция умножается на c^2 .

Пример 2.1. Требуется определить нормированную корреляционную функцию, если случайная функция

$$X(t) = Ae^{-\alpha t},$$

где A — случайная величина с известным математическим ожиданием m_A и дисперсией D_A .

Математическое ожидание случайной функции

$$m_x = M[Ae^{-\alpha t}] = e^{-\alpha t} m_A.$$

Корреляционная функция случайной функции

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[(Ae^{-\alpha t} - m_A e^{-\alpha t})(Ae^{-\alpha t'} - m_A e^{-\alpha t'})] = \\ &= e^{-\alpha t} e^{-\alpha t'} M[(A - m_A)^2] = e^{-\alpha(t+t')} D_A. \end{aligned}$$

Дисперсия случайной функции $X(t)$

$$D_x(t) = D_A e^{-2\alpha t}.$$

Средние квадратические отклонения $X(t)$ для моментов времени t и t' соответственно равны

$$\sigma_x(t) = \sigma_A e^{-\alpha t};$$

$$\sigma_x(t') = \sigma_A e^{-\alpha t'}.$$

Нормированная корреляционная функция

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')} = \frac{D_A e^{-\alpha(t+t')}}{\sigma_A^2 e^{-\alpha(t+t')}} = 1.$$

Полученный результат говорит о том, что между значениями случайной функции $X(t)$ в разные моменты времени t и t' имеется линейная зависимость.

Пример 2.2. Требуется определить корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, если

$$X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

где A и B — случайные величины, для которых известны m_A , m_B , σ_A , σ_B и K_{AB} ($m_A = m_B = 0$).

По определению,

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[(A \sin \omega t + B \cos \omega t)(A \sin \omega t' + B \cos \omega t')] = \\ &= M[A^2 \sin \omega t \sin \omega t' + AB \sin \omega t \cos \omega t' + \\ &\quad + AB \cos \omega t \sin \omega t' + B^2 \cos \omega t \cos \omega t'], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \sin \omega t \sin \omega t' M[A^2] + \sin \omega(t+t') M[AB] + \\ &\quad + \cos \omega t \cos \omega t' M[B^2]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \sigma_A^2 \sin \omega t \sin \omega t' + K_{AB} \sin \omega(t+t') + \\ &\quad + \sigma_B^2 \cos \omega t \cos \omega t'. \end{aligned}$$

В частном случае, когда $K_{AB} = 0$, $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, имеем

$$K_x(t, t') = \sigma_A^2 \cos \omega(t-t').$$

§ 2.2. Системы случайных функций и их вероятностные характеристики

Рассмотрим систему двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, характеризующих различные случайные процессы. Например, при старте на ракету действуют случайная сила N_c и случайный момент M_c (см. рис. В.2). Поэтому при исследовании возмущенного движения ракеты полезно знать о корреляционной зависимости этих случайных функций.

Рассмотрим второй смешанный момент от вещественных центрированных случайных функций $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{Y}$ для различных моментов времени:

$$M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{Y}(t')] = K_{xy}(t, t'), \quad (2.15)$$

где $K_{xy}(t, t')$ — взаимная корреляционная функция.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций называется неслучайная функция двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $X(t)$ и случайной функции $Y(t)$.

Взаимная корреляционная функция не удовлетворяет условию симметрии относительно своих аргументов, т.е.

$$K_{xy}(t, t') \neq K_{xy}(t', t),$$

но при одновременной перестановке моментов времени и индексов имеем

$$K_{xy}(t, t') = K_{xy}(t', t). \quad (2.16)$$

Если взаимная корреляционная функция K_{xy} не равна тождественно нулю, то случайные функции X и Y по аналогии со случайными величинами называют коррелированными; если же K_{xy} тождественно равна нулю, то такие случайные функции называют некоррелированными.

В прикладных задачах удобно использовать нормированную взаимную корреляционную функцию

$$r_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_y(t')}. \quad (2.17)$$

Как и для системы двух случайных величин, можно ввести корреляционную матрицу

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx}(t, t') & K_{xy}(t, t') \\ K_{yx}(t, t') & K_{yy}(t, t') \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Для системы n вещественных случайных функций имеем корреляционную матрицу

$$K = \begin{bmatrix} K_{x_1 x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_n x_1} & K_{x_n x_2} & \dots & K_{x_n x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Рассматривая случайные функции $X_j(t)$ как компоненты n -го вектора, матрицу K (2.19) можно представить в более компактной форме записи, используя диадное (тензорное) произведение двух векторов

$$K = M[\overset{\circ}{X}(t) \otimes \overset{\circ}{X}(t')].$$

Для комплексных случайных функций по аналогии с комплексными случайными величинами взаимная корреляционная функция равна

$$K_{xy}(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{Y}^*(t')], \quad (2.20)$$

где $\overset{\circ}{Y}^*$ — центрированная сопряженная случайная функция. Корреляционная функция (2.20) в частном случае при $t = t'$ и $X = Y$ есть дисперсия случайной комплексной функции X , которая должна быть положительной, что имеет место в том случае, если берется произведение комплексной функции $X(t)$ на сопряженную функцию $X^*(t)$:

$$D_x(t) = M[\dot{X}(t) \dot{X}^*(t)] = M[(\dot{X}_1(t) + i\dot{X}_2(t))(\dot{X}_1(t) - i\dot{X}_2(t))] = \\ = M[(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2)].$$

Покажем, что для комплексных случайных функций выполняется условие

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}^*(t', t). \quad (2.21)$$

Корреляционные функции $K_{xy}(t, t')$ и $K_{yx}(t', t)$ в более подробной записи равны

$$K_{xy}(t, t') = M[(X_1(t) + iX_2(t))(Y_1(t') - iY_2(t'))] = \\ = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2} + i(K_{x_1y_2} - K_{x_2y_1}); \\ K_{yx}(t', t) = M[(Y_1(t') + iY_2(t'))(X_1(t) - iX_2(t))] = \\ = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2} - i(K_{x_1y_2} - K_{x_2y_1}).$$

Поэтому сопряженная функция $K_{yx}^*(t', t)$ равна $K_{xy}(t, t')$.

В соответствии с (2.21) элементы корреляционной матрицы для комплексных случайных функций, симметричные относительно главной диагонали, являются комплексными сопряженными функциями.

Пример 2.3. Имеются две случайные функции $X_1 = A \cos \omega_1 t$, $X_2 = B \cos \omega_2 t$. Амплитуды A и B являются случайными величинами с известными вероятностными характеристиками m_A , m_B , D_A , D_B и K_{AB} . Требуется определить взаимную корреляционную функцию и найти значение этой функции при $t = t'$.

По соотношению (2.15)

$$K_{x_1x_2} = M[(A - m_A) \cos \omega_1 t (B - m_B) \cos \omega_2 t] = \\ = K_{AB} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t'.$$

При $t = t'$

$$K_{x_1x_2}(t, t) = K_{AB} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t.$$

Пример 2.4. На рис. 2.5 показана балка, нагруженная сосредоточенными, случайными по величине моментами M_{x_0} и M_{y_0} с известными вероятностными характеристиками m_x , m_y , D_x , D_y и K_{xy} . Требуется найти: 1) математическое ожидание и дисперсию максимального нормального напряжения в произвольном сечении; 2) максимальное значение максимального напряжения в опасном сечении, считая, что максимальное напряжение имеет нормальное распределение.

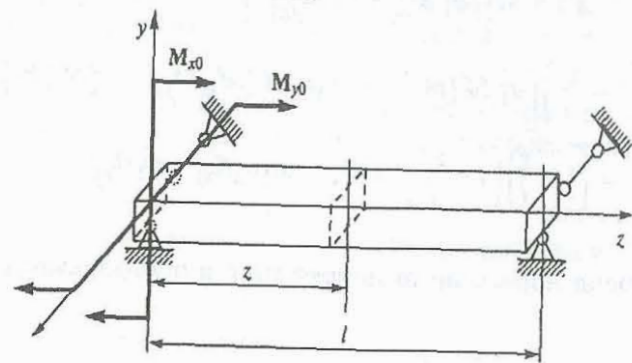


Рис. 2.5

Изгибающие моменты в произвольном сечении

$$M_x = M_{x_0} \left(1 - \frac{z}{l}\right);$$

$$M_y = M_{y_0} \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

Максимальное нормальное напряжение в произвольном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_1}{J_x} + \frac{M_y x_1}{J_y} = a_1 M_{x_0} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + a_2 M_{y_0} \left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

где x_1 , y_1 — координаты точки, максимально удаленной от нейтральной линии, $a_1 = y_1/J_x$, $a_2 = x_1/J_y$.

Математическое ожидание максимального нормального напряжения

$$m_{\sigma_m} = a_1 \left(1 - \frac{z}{l}\right) m_x + a_2 \left(1 - \frac{z}{l}\right) m_y.$$

Корреляционная функция максимального нормального напряжения

$$\begin{aligned} K_{\sigma_m}(z, z') &= M \left[\left(a_1 M_{x_0} + a_2 M_{y_0} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{l} \right) \left(1 - \frac{z'}{l} \right) \right] = \\ &= \left(1 - \frac{z}{l} \right) \left(1 - \frac{z'}{l} \right) \left[a_1^2 M[M_{x_0}^2] + 2a_1 a_2 M[M_{x_0} M_{y_0}] + a_2^2 M[M_{y_0}^2] \right] = \\ &= \left(1 - \frac{z}{l} \right) \left(1 - \frac{z'}{l} \right) (a_1^2 D_x + 2a_1 a_2 K_{xy} + a_2^2 D_y). \end{aligned}$$

Дисперсия нормального напряжения в произвольном сечении

$$D_{\sigma_m} = \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2 (a_1^2 D_x + 2a_1 a_2 K_{xy} + a_2^2 D_y).$$

В рассматриваемом примере опасным сечением является сечение при $z = 0$, поэтому, воспользовавшись правилом трех сигм, получим

$$\max \sigma_m = m_{\sigma_m} + 3\sigma_{\sigma_m}.$$

Если предельное состояние для стержня связано с появлением пластических деформаций, то конструктивные параметры стержня при известных случайных моментах должны выбираться из условия

$$\max \sigma_m = \frac{\sigma_T}{n_{Tl}},$$

где σ_T — предел текучести материала, из которого сделан стержень; n_{Tl} — коэффициент безопасности.

§ 2.3. Линейные преобразования случайных функций

Рассмотрим линейные преобразования случайных функций, когда с помощью линейных операторов L устанавливается связь между «входом» и «выходом»:

$$Y(t) = L[X(t)]. \quad (2.22)$$

Имеется в виду статистическая связь между входом и выходом, когда по известным вероятностным характеристикам случайной функции $X(t)$ надо определить вероятностные характеристики $Y(t)$.

Рассмотрим наиболее часто употребляемые при исследовании случайных колебаний линейные преобразования случайных функций.

1. В случае, если вход X и выход Y — случайные n -мерные векторы — связаны линейным соотношением вида

$$Y(t) = B(t)X(t),$$

где $B(t)$ — матрица ($n \times n$), элементы которой $b_{ji}(t)$ являются неслучайными функциями, математические ожидания компонент y_j вектора Y , корреляционная матрица $K(t, t')$ и взаимно корреляционные функции $K_{y_i y_j}$ равны

$$m_{y_j}(t) = M \left[\sum_{i=1}^n b_{ji} x_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n b_{ji} m_{x_i}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$K(t, t') = M[\overset{\circ}{Y}(t) \otimes \overset{\circ}{Y}(t')] = \begin{bmatrix} K_{y_1 y_1} & K_{y_1 y_2} & \dots & K_{y_1 y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{y_n y_1} & K_{y_n y_2} & \dots & K_{y_n y_n} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

где

$$K_{y_j y_i} = M[\overset{\circ}{Y}_j(t) \overset{\circ}{Y}_i(t')] = \sum_{p=1}^n \sum_{v=1}^n b_{jp}(t) b_{iv}(t') K_{x_p x_v}(t, t').$$

Дисперсия компонент вектора Y

$$D_{y_i}(t) = \sum_{p=1}^n \sum_{v=1}^n b_{ip}(t) b_{iv}(t) K_{x_p x_v}(t, t'). \quad (2.24)$$

2. Интеграл от случайной функции $X(t)$

$$Y(t) = \int_0^t X(t_1) dt_1. \quad (2.25)$$

Считая, что операции осреднения и интегрирования перестановочны, находим математическое ожидание:

$$m_y(t) = M \left[\int_0^t X dt_1 \right] = \int_0^t M[X] dt_1 = \int_0^t m_x(t_1) dt_1. \quad (2.26)$$

Перестановка операции математического ожидания с другими линейными математическими операциями используется и в последующих преобразованиях.

Корреляционная функция

$$K(t, t') = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = \\ = M \left\{ \int_0^t [X(t_1) - m_x(t_1)] dt_1 \int_0^{t'} [X(t^{(1)}) - m_x(t^{(1)})] dt^{(1)} \right\}. \quad (2.27)$$

Произведение двух интегралов под знаком математического ожидания в (2.27) можно записать как двойной интеграл

$$\int_0^t \int_0^{t'} (X(t_1) - m_x(t_1))(X(t^{(1)}) - m_x(t^{(1)})) dt_1 dt^{(1)},$$

поэтому

$$K_y(t, t') = M \left[\int_0^t \int_0^{t'} (X(t_1) - m_x(t_1))(X(t^{(1)}) - m_x(t^{(1)})) dt_1 dt^{(1)} \right] =$$

$$= \int_0^t \int_0^{t_1} M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t^{(1)}) - m_x(t^{(1)}))] dt_1 dt^{(1)} = \\ = \int_0^t \int_0^{t_1} K_x(t_1, t^{(1)}) dt_1 dt^{(1)}. \quad (2.28)$$

Пример 2.5. Балка, показанная на рис. 2.6, находится под действием случайной распределенной нагрузки $q(z)$. Вероятностные характеристики нагрузки известны, т.е. известны математическое ожидание $m_q(z)$ в зависимости от z и корреляционная функция $K_q(z, z')$. Требуется определить вероятностные характеристики реакций R_1 и R_2 .

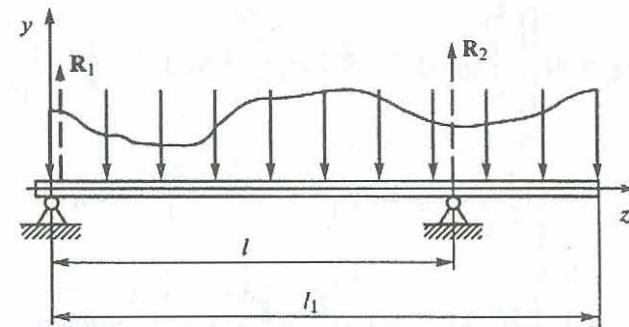


Рис. 2.6

Рассматривая равновесие балки, получаем два уравнения:

$$R_1 + R_2 = \int_0^{l_1} q(z) dz; \quad R_2 l = \int_0^{l_1} q(z) z dz. \quad (2.29)$$

Из системы (2.29) находим математические ожидания реакций:

$$m_{R_1} + m_{R_2} = \int_0^{l_1} m_q(z) dz;$$

$$Im_{R_2} = \int_0^{l_1} m_q(z) dz.$$

Центрированные случайные величины $\overset{\circ}{R}_1$ и $\overset{\circ}{R}_2$ равны

$$\overset{\circ}{R}_1 = \int_0^{l_1} (q(z) - m_q(z)) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz;$$

$$\overset{\circ}{R}_2 = \int_0^{l_1} (q(z) - m_q(z)) \left(\frac{z}{l}\right) dz.$$

Дисперсии реакций

$$D_{R_1} = M \left[\left(\int_0^{l_1} q_0(z_1) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz_1 \right) \left(\int_0^{l_1} q_0(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz \right) \right] =$$

$$= M \left[\int_0^{l_1} \int_0^{l_1} q_0(z_1) q_0(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz dz_1 \right] =$$

$$= \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} M[q_0(z_1) q_0(z)] \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz dz_1 =$$

$$= \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} K_q(z, z_1) \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz dz_1;$$

$$D_{R_2} = \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} K_q(z, z_1) \left(\frac{z}{l}\right) \left(\frac{z_1}{l}\right) dz dz_1.$$

3. Вероятностные характеристики случайной функции

$$Y(t) = a(t) c + \int_0^t k(t, t_1) X(t_1) dt_1, \quad (2.30)$$

где $a(t)$, $k(t, t_1)$ — неслучайные функции; c — случайная величина с известными m_c и D_c ; $X(t_1)$ — случайная функция с известными $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$.

Математическое ожидание $Y(t)$

$$m_y(t) = M \left[a(t) c + \int_0^t k(t, t_1) X dt_1 \right] = a(t) M[c] + \int_0^t k(t, t_1) M[X] dt_1 = a(t) m_c + \int_0^t k(t, t_1) m_x dt_1. \quad (2.31)$$

Корреляционная функция, если c и X независимы,

$$K_y(t, t') = M \left[\left(a(t) c + \int_0^t k(t, t_1) \overset{\circ}{X}_1(t_1) dt_1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(a(t') c + \int_0^{t'} k(t', t_1^{(1)}) \overset{\circ}{X}(t_1^{(1)}) dt_1^{(1)} \right) \right] = \\ = a(t) a(t') M[c^2] + \int_0^t \int_0^{t_1} k(t, t_1) k(t', t_1^{(1)}) K_x(t_1, t_1^{(1)}) dt_1 dt_1^{(1)}. \quad (2.32)$$

4. Рассмотрим производную от случайной функции

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t). \quad (2.33)$$

Математическое ожидание $Y(t)$

$$M[Y(t)] = m_y(t) = M \left[\frac{dX(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} M[X(t)] = \frac{dm_x(t)}{dt}. \quad (2.34)$$

Корреляционная функция

$$K_y(t, t') = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] =$$

$$= M \left[\left(\frac{d \overset{\circ}{X}(S)}{dt} \right) \left(\frac{d \overset{\circ}{X}(t')}{dt'} \right) \right]. \quad (2.35)$$

Произведение производных под знаком математического ожидания можно представить в виде

$$\frac{d \overset{\circ}{X}(t)}{dt} \frac{d \overset{\circ}{X}(t')}{dt'} = \frac{\partial^2 [\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')]}{\partial t \partial t'}. \quad (2.36)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M \left[\frac{\partial^2 [\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')]}{\partial t \partial t'} \right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} M [\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')] = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Если случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ связаны соотношением $Y(t) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2}$, то корреляционная функция $K_y(t, t')$ равна

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^4 K_x(t, t')}{\partial t^2 \partial t'^2}. \quad (2.38)$$

Для общего случая, когда

$$Y = \frac{d^n X}{dt^n}, \quad (2.39)$$

корреляционная функция равна

$$K_y = \frac{\partial^{2n} K_x}{\partial t^n \partial t'^n}. \quad (2.40)$$

5. Взаимная корреляционная функция случайной функции X и ее производной

$$K_{\dot{x}\dot{x}} = M \left[\overset{\circ}{\dot{X}}(t) \frac{d \overset{\circ}{\dot{X}}(t')}{dt'} \right] = M \frac{\partial \overset{\circ}{\dot{X}}(t) \overset{\circ}{\dot{X}}(t')}{\partial t'} = \frac{\partial K_x}{\partial t'}. \quad (2.41)$$

Аналогично получаем выражение для взаимной корреляционной функции производных различных порядков случайной функции $X(t)$:

$$K_{x_p x_q} = \frac{\partial^{p+q} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^q}, \quad (2.42)$$

где p, q — порядки производных ($p = 0, 1, \dots, n, q = 0, 1, \dots, n$).

Пример 2.6. Определить корреляционную функцию и дисперсию для производной случайной функции $X(t)$, если $X(t) = A \sin t$ (m_A и σ_A известны).

Корреляционная функция случайной функции

$$K_x(t, t') = M \left[((A - m_A) \sin t) ((A - m_A) \sin t') \right] = \sin t \sin t' \sigma_A^2.$$

Воспользовавшись формулой (2.37), получим

$$K_y(t, t') = K_{\dot{x}}(t, t') = \sigma_A^2 \cos t \cos t'.$$

Дисперсия

$$D_{\dot{x}}(t) = D_A \cos^2 t.$$

Пример 2.7. Определить корреляционную функцию случайной функции

$$Y(t) = a(t) X(t) + b(t) \frac{dX(t)}{dt},$$

где $a(t), b(t)$ — неслучайные функции; X — случайная функция с известными характеристиками $m_x = 0$ и $K_x(t, t')$.

Корреляционная функция

$$K_y(t, t') = M [\overset{\circ}{Y}(t) \overset{\circ}{Y}(t')],$$

или

$$K_y(t, t') = a(t)a(t')M[X(t)X(t')] + a(t)b(t')M\left[X(t)\frac{dX(t')}{dt'}\right] + \\ + a(t')b(t)M\left[\frac{dX(t)}{dt}X(t')\right] + b(t)b(t')M\left[\frac{dX(t)}{dt}\frac{dX(t')}{dt'}\right].$$

Так как

$$M\left[X(t)\frac{dX(t')}{dt'}\right] = \frac{\partial}{\partial t'} M[X(t)X(t')] = \frac{\partial}{\partial t'} K_x(t, t'),$$

то после преобразований получим

$$K_y(t, t') = a(t)a(t')K_x + a(t)b(t')\frac{\partial K_x}{\partial t'} + \\ + a(t')b(t)\frac{\partial K_x}{\partial t} + b(t)b(t')\frac{\partial^2 K_x}{\partial t \partial t'}. \quad (2.43)$$

§ 2.4. Вероятностные характеристики решений линейных дифференциальных уравнений при нестационарных случайных возмущениях

1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{y} + ky = X(t), \quad (2.44)$$

где $X(t)$ — случайная функция, для которой известны $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$.

Уравнение (2.44) описывает физический процесс, изменяющийся во времени, например, работу двигателя, показанного на рис. 2.7. В установившемся режиме работы момент двигателя $M_d(t)$ уравнивается моментом сопротивления $M_c(\omega)$, зависящим от угловой скорости ω , и моментом нагрузки M_H . Случайное изменение момента нагрузки на ΔM_H приведет к изменению угловой скорости на $\Delta\omega$ и появлению инерционного момента, равного $J\frac{d\Delta\omega}{dt}$, где J — момент инерции вращающихся деталей, приведенных к оси вала.

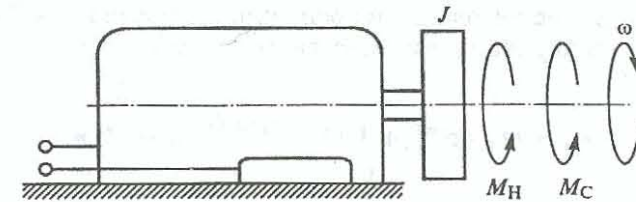


Рис. 2.7

Уравнение возмущенного вращения двигателя имеет вид

$$J\frac{d\Delta\omega}{dt} = \Delta M_H - \Delta M_c, \quad (2.45)$$

где ΔM_c — изменение момента сопротивления.

При малых отклонениях от стационарного режима работы можно принять $\Delta M_c = k_1 \Delta\omega$. Тогда уравнение (2.45) принимает вид, аналогичный (2.44):

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} + \frac{k_1}{J} \Delta\omega = \frac{\Delta M_H}{J}. \quad (2.46)$$

Общее решение уравнения (2.46) при произвольной правой части (если положить $y = \Delta\omega$ и $\Delta M_H(t)/J = X(t)$)

$$y = ce^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-t_1)} X(t_1) dt_1 \quad \left(k = \frac{k_1}{J}\right). \quad (2.47)$$

Вероятностные характеристики случайного момента ΔM_H известны ($m_{\Delta M_H}(t)$ и $K_{\Delta M_H}(t, t')$).

При $t = 0$, $y(0) = y_0$, поэтому $c = y_0$. (Начальное значение y может быть как неслучайным, так и случайным.)

Рассмотрим случай, когда начальное значение y_0 случайно, причем случайная величина y_0 и случайная функция $X(t)$ независимы. Считаем, что вероятностные характеристики y_0 известны и равны m_0 и D_0 .

Математическое ожидание решения уравнения (2.47) и корреляционная функция соответственно равны

$$\begin{aligned} m_y &= M \left[y_0 e^{-kt} \right] + \int_0^t M \left[e^{-k(t-t_1)} \right] X(t_1) dt_1 = \\ &= m_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-t_1)} m_x(t_1) dt_1; \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M \left[\left\{ y_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-t_1)} \dot{X}(t_1) dt_1 \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ y_0 e^{-kt'} + \int_0^{t'} e^{-k(t'-t_1)} \dot{X}(t_1^{(1)}) dt_1^{(1)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Так как y_0 и $\dot{X}(t)$ независимы, то после преобразований получаем

$$K_y(t, t') = D_0 e^{-k(t+t')} + \int_0^t \int_0^{t'} e^{-k(t-t_1)} e^{-k(t'-t_1^{(1)})} K_x(t_1, t_1^{(1)}) dt_1 dt_1^{(1)}. \quad (2.50)$$

Для получения дисперсии надо после интегрирования в выражении (2.50) положить $t' = t$.

Найдем корреляционную функцию и дисперсию решения уравнения (2.47), если ΔM_H — случайная функция с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией D_H (при $t = 0, y = 0$). После преобразований из (2.50) получаем

$$K_y(t, t') = \frac{D_H}{k^2} (e^{-kt} - 1)(e^{-kt'} - 1);$$

$$D_y(t) = \frac{D_H}{k^2} (e^{-kt} - 1)^2.$$

При решении прикладных задач часто бывает необходимо знать вероятностные характеристики производных $\dot{y}$. Полезной бывает и информация, которую можно получить, рассмотрев взаимно корреляционную функцию $K_{y\dot{y}}$. Из уравнения (2.44) получаем выражение для производной

$$\dot{y}(t) = -ky(t) + X(t). \quad (2.51)$$

Это же выражение можно получить и дифференцируя решение (2.47) по t . При дифференцировании входящего в правую часть соотношения (2.47) интеграла надо воспользоваться правилом дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, t_1) dt_1 = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(t, t_1)}{\partial t} \alpha t_1 + \frac{d\beta}{dt} f(t, \beta) - \frac{d\alpha}{dt} f(t, \alpha(t)). \quad (2.52)$$

Дифференцируя (2.47), с учетом (2.52) получаем

$$\dot{y} = -k \left(y_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-t_1)} X(t_1) dt_1 \right) + X(t)$$

или

$$\dot{y} = -ky + X(t).$$

Математическое ожидание и корреляционная функция для $\dot{y}$ соответственно равны

$$m_{\dot{y}}(t) = -km_y(t) + m_x(t);$$

$$\begin{aligned} K_{\dot{y}} &= M \left[\frac{dY(t)}{dt} \frac{dY(t')}{dt'} \right] = M \left[\left(-k\dot{y}(t) + \dot{X}(t) \right) \left(-k\dot{y}(t') + \dot{X}(t') \right) \right] = \\ &= k^2 K_y - kM \left[\dot{y}(t) \dot{X}(t') \right] - kM \left[\dot{y}(t') \dot{X}(t) \right] + K_x. \end{aligned}$$

Так как случайное начальное отклонение y_0 и $X(t)$ независимы, то после преобразований получаем

$$M [\dot{y}(t) \dot{X}(t')] = \int_0^t e^{-k(t-t_1)} K_x(t_1, t') dt_1;$$

$$M[\overset{\circ}{Y}(t') \overset{\circ}{X}(t)] = \int_0^{t'} e^{-k(t'-t_1^{(1)})} K_x(t_1^{(1)}, t) dt_1^{(1)}.$$

Окончательно имеем

$$K_{yy}(t, t') = k^2 K_y(t, t') K_x(t, t') + \int_0^t e^{-k(t-t_1)} K_x(t_1, t_1^{(1)}) dt_1 + \\ + \int_0^{t'} e^{-k(t'-t_1^{(1)})} K_x(t_1^{(1)}, t) dt_1^{(1)}. \quad (2.53)$$

Взаимно корреляционная функция

$$K_{yy}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{Y}(t) \frac{d \overset{\circ}{Y}(t')}{dt'} \right].$$

После преобразований получаем

$$K_{yy}(t, t') = -k K_y(t, t') + \int_0^t e^{-k(t-t_1)} K_x(t_1, t') dt_1. \quad (2.54)$$

2. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и случайной правой частью имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = X(t). \quad (2.55)$$

Общее решение уравнения (2.55) можно представить в виде

$$y = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \int_0^t g(t-t_1) X(t_1) dt_1, \quad (2.56)$$

где

$$f_1 = e^{-nt} \cos pt, \quad f_2 = e^{-nt} \sin pt;$$

$$g(t-t_1) = e^{-n(t-t_1)} \sin p(t-t_1), \quad (p = \sqrt{p_0^2 - n^2}).$$

Выражение для производной y по времени имеет вид

$$\dot{y} = c_1 \dot{f}_1 + c_2 \dot{f}_2 + \int_0^t \frac{\partial g(t-t_1)}{\partial t} X(t_1) dt_1. \quad (2.57)$$

Произвольные постоянные c_1 и c_2 определим из начальных условий ($t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$):

$$c_1 = y_0, \quad c_2 = (\dot{y}_0 + ny_0)/p.$$

Выражение для y принимает вид

$$y = y_0 f_{12} + \frac{\dot{y}_0}{p} f_2(t) + \int_0^t g(t-t_1) X(t_1) dt_1, \quad (2.58)$$

где

$$f_{12} = f_1 + \frac{n}{p} f_2.$$

При определении вероятностных характеристик можно воспользоваться результатами § 2.3.

Считая начальные данные y_0 и $\dot{y}_0$ и возмущение $X(t)$ независимыми случайными величинами, вероятностные характеристики которых известны, найдем математическое ожидание

$$m_y = m_{y_0} f_{12} + m_{\dot{y}_0} f_2 + \int_0^t g(t-t_1) m_x(t_1) dt_1 \quad (2.59)$$

и корреляционную функцию

$$K_y = M[\overset{\circ}{Y}(t), \overset{\circ}{Y}(t')] = f_{12}(t) f_{12}(t') D_{y_0} + f_2(t) f_2(t') D_{\dot{y}_0} + \\ + \int_0^t \int_0^{t'} g(t-t_1) g(t'-t_1^{(1)}) K_x(t_1, t_1^{(1)}) dt_1^{(1)} dt_1. \quad (2.60)$$

3. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\ddot{y} + a_1(t) \dot{y} + a_2(t) y = X(t). \quad (2.61)$$

Полагая $\dot{y} = z_1$, $y = z_2$, представим уравнение (2.61) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{z}_1 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = X, \\ \dot{z}_2 - z_1 = 0 \end{cases}$$

или

$$\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{A}(t) \mathbf{Z} = \mathbf{f}, \quad (2.62)$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (2.62) имеет вид

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}(t) \mathbf{C} + \int_0^t \mathbf{G}(t, t_1) \mathbf{f}(t_1) dt_1, \quad (2.63)$$

где $\mathbf{B}(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения (2.61), удовлетворяющая условию $\mathbf{B}(0) = \mathbf{E}$; $\mathbf{E}$ — единичная матрица; $\mathbf{G}(t, t_1)$ — матрица Грина,

$$\mathbf{G}(t, t_1) = \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^{-1}(t_1); \quad (2.64)$$

$\mathbf{C}$ — вектор начальных данных.

Компоненты вектора $\mathbf{C}$ могут быть как детерминированными, так и случайными. Примем, что вероятностные характеристики компонент вектора $\mathbf{C}$ (вектор $\mathbf{C}$ равен $\mathbf{Z}(0)$) известны: m_{C_j} , D_{C_j} и $K_{C_j C_j}$. Математическое ожидание вектора $\mathbf{Z}$ (при случайных начальных данных)

$$\mathbf{m}_Z = \mathbf{B}(t) \mathbf{m}_C + \int_0^t \mathbf{G}(t, t_1) \mathbf{m}_f(t_1) dt_1, \quad (2.65)$$

или в скалярной записи

$$m_{z_1} = m_{\dot{y}} = b_{11} m_{C_1} + b_{12} m_{C_2} + \int_0^t g_{11} m_f dt_1;$$

$$m_{z_2} = m_y = b_{21} m_{C_1} + b_{22} m_{C_2} + \int_0^t g_{21} m_f dt_1.$$

Матрица корреляционных функций для компонент вектора $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(t) \otimes \mathbf{Z}(t') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{z_1 z_1} & K_{z_1 z_2} \\ K_{z_2 z_1} & K_{z_2 z_2} \end{bmatrix}.$$

Согласно принятому условию о том, что компоненты векторов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{f}$ независимы, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \mathbf{M} \left[\mathbf{B}(t) \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}(t') \mathbf{C} \right] + \\ + \int_0^t \int_0^{t'} \mathbf{M} \left[\mathbf{G}(t, t_1) \mathbf{f} \otimes \mathbf{G}(t', t_1') \mathbf{f}(t_1') \right] dt_1 dt_1'. \end{aligned} \quad (2.66)$$

После преобразований получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + \int_0^t \int_0^{t'} \mathbf{K}_f dt_1 dt_1'. \quad (2.67)$$

Элементы матриц $\mathbf{K}_C$ и $\mathbf{K}_f$ равны

$$\begin{aligned} K_{C_i C_j} &= b_{i1}(t) b_{j1}(t') K_{C_1 C_1} + b_{i1}(t) b_{j2}(t') K_{C_1 C_2} + \\ &+ b_{i2}(t) b_{j1}(t') K_{C_2 C_1} + b_{i2}(t) b_{j2}(t') K_{C_2 C_2}; \\ K_{f_i f_j}(t_1, t_1') &= q_{i1}(t_1) q_{j1}(t_1') K_x(t_1, t_1'). \end{aligned}$$

Полученные в этом примере вероятностные характеристики решения уравнения (2.61) в векторно-матричной форме записи легко обобщаются на случай, когда вектор $\mathbf{Z}$ имеет n компонент.

Глава 3. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОЦЕССЫ)

Широкое распространение имеют случайные процессы, которые протекают во времени приблизительно однородно и имеют вид непрерывных случайных колебаний относительно некоторого среднего значения, а вероятностные характеристики процесса не зависят от выбора начала отсчета времени, т.е. инвариантны относительно сдвига по времени. В соответствии с этим случайная функция $X(t)$ называется *стационарной*, если вероятностные характеристики случайной функции $X(t+t')$ при любом t' тождественно совпадают с соответствующими характеристиками $X(t)$, что имеет место только в том случае, когда математическое ожидание и дисперсия случайной функции не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $(t' - t)$. Стационарный процесс можно рассматривать как протекающий во времени неограниченно долго. В этом смысле стационарный процесс аналогичен установившимся колебаниям, когда параметры установившихся колебаний не зависят от начала отсчета времени.

§ 3.1. Вероятностные характеристики стационарных случайных функций

В прикладных задачах, когда приходится иметь дело только с моментами первых двух порядков — математическими ожиданиями и корреляционными функциями, постоянство математического ожидания и дисперсии и зависимость корреляционной функции только от разности аргументов достаточны для того, чтобы случайную функцию считать стационарной. Такие случайные функции называются *стационарными функциями в широком смысле* [29].

Стационарная случайная функция $X(t)$, у которой все законы распределения всех возможных порядков $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ зависят только от интервалов $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси времени, называется *стационарной функцией в узком смысле*.

В дальнейшем, говоря о стационарных функциях, будем иметь в виду только стационарные функции в широком смысле, которые наиболее часто используются в прикладных задачах. Остановимся более подробно на основных свойствах стационарных функций.

Как уже было сказано, случайную функцию $X(t)$ называют стационарной, если математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, т.е.

$$m_x(t) = \text{const}; \quad D_x(t) = \text{const}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим корреляционный момент $K(t, t')$ случайной стационарной функции $X(t)$ (рис. 3.1) для двух моментов времени, разделенных интервалом τ . Для стационарного процесса корреляционный момент не зависит от конкретных значений t и t' , а зависит только от их разности $t' - t = \tau$, т.е.

$$K_x(t, t') = K_x(t, t + \tau) = K_x(\tau). \quad (3.2)$$

Из соотношения (3.2) следует, что корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарного случайного процесса есть функция одного аргумента τ .

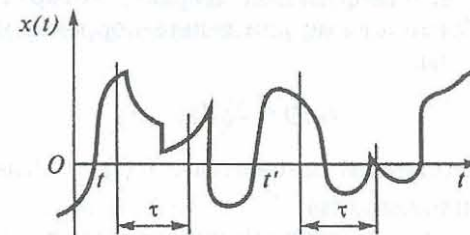


Рис. 3.1

Поскольку корреляционная функция симметрична (2.8):

$$K_X(t, t') = K_X(t', t),$$

то, полагая $t' - t = \tau$, получаем

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau), \quad (3.3)$$

т.е. корреляционная функция является четной функцией.
Дисперсия случайной функции равна

$$D_X(t) = K_X(t', t),$$

поэтому для стационарной случайной функции имеем

$$D_X = K_X(0). \quad (3.4)$$

Часто вместо корреляционной функции $K_X(\tau)$ используют нормированную корреляционную функцию

$$\rho_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{D_X}. \quad (3.5)$$

Так как $|\rho_X(\tau)| \leq 1$, то из (3.5) следует

$$|K_X(\tau)| \leq D_X.$$

В приложении 3 приведены графики наиболее часто используемых в прикладных задачах автокорреляционных функций $K(\tau)$. Среди них имеется корреляционная функция, пропорциональная дельта-функции Дирака, которая называется *стационарным белым шумом*, или дельта-коррелированным случайным процессом:

$$K(\tau) = S_0 \delta(\tau). \quad (3.6)$$

Здесь S_0 — постоянный множитель; $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака (см. приложение 1).

Белый шум — это случайный процесс, когда значения случайной функции $X(t)$ для сколь угодно близких моментов времени являются некоррелированными. Случайный процесс типа белого шума нереализуем в действительных условиях, так как, во-первых, при достаточно близких моментах времени

(при очень малых τ) случайные функции практически всегда зависимы и, во-вторых, из (3.6) следует, что при $\tau = 0$ дисперсия процесса равна бесконечности. Поэтому для реализации такого процесса требуется бесконечная мощность, что в реальных условиях получить нельзя. Тем не менее случайные процессы типа белого шума широко используют во многих разделах статической динамики.

Пример 3.1. Требуется выяснить, является ли случайная функция

$$X(t) = \sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) \quad (3.7)$$

стационарной случайной функцией, если A_j и B_j — случайные взаимно независимые величины с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями ($D_{A_j} = D_{B_j} = D_j$).

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ равно нулю.

Корреляционная функция

$$K_X(t, t') = M \left[\left(\sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{k=1}^n (A_k \cos \omega_k t' + B_k \sin \omega_k t') \right) \right].$$

После преобразований получим

$$K_X(t, t') = \sum_{j=1}^n D_j \cos \omega_j (t - t'). \quad (3.8)$$

Полученное выражение (3.8) зависит только от разности $t - t'$, т.е. $X(t)$ является стационарной функцией. Дисперсия случайной функции $X(t)$

$$D_X = K_X(0) = \sum_{j=1}^n D_j. \quad (3.9)$$

Пример 3.2. Требуется найти корреляционную функцию K_X , если случайная функция X равна

$$X = \sum_{j=1}^n A_j e^{i\omega_j t}, \quad (3.10)$$

где $A_j = A_{1j} + iA_{2j}$ — комплексная амплитуда; i — мнимая единица.

Некоррелированные случайные величины A_{1j} и A_{2j} имеют равные нулю математические ожидания и равные между собой дисперсии.

Воспользуемся формулой (2.20), полагая $Y^*(t') = X^*(t')$:

$$K_X(t, t') = M[X(t) X^*(t')] = M \left[\left(\sum_{j=1}^n A_j e^{i\omega_j t} \right) \left(\sum_{k=1}^n A_k^* e^{-i\omega_k t'} \right) \right],$$

где $A_k^* = A_{1k} - iA_{2k}$.

После преобразований получим

$$K_X(t, t') = \sum_{j=1}^n M[A_j A_j^*] e^{i(t-t')\omega_j} = \sum_{j=1}^n 2D_j e^{i\omega_j(t-t')}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что случайная функция (3.10) при $m_{1j} = m_{2j} = 0$, $D_{1j} = D_{2j} = D_j$ для некоррелированных A_{1j} , A_{2j} является стационарной случайной функцией.

Рассмотрим систему двух случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

Две случайные функции $X_1(t)$, $X_2(t)$ одного и того же аргумента называют *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит от разности аргументов, т.е.

$$K_{x_1 x_2}(t, t') = K_{x_1 x_2}(\tau) \quad (\tau = t' - t). \quad (3.12)$$

Если для случайных стационарных функций X_1 и X_2 выполняется условие (3.12), то говорят, что эти функции стационарны и стационарно связаны. Из свойства взаимной корреляционной функции следует, что

$$K_{x_1 x_2}(t, t') = K_{x_1 x_2}(\tau) = K_{x_2 x_1}^*(-\tau)$$

или для действительных случайных функций

$$K_{x_1 x_2}(\tau) = K_{x_2 x_1}(-\tau). \quad (3.13)$$

В общем случае взаимные корреляционные функции не являются четными функциями аргумента τ .

Система $X_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) стационарных и стационарно связанных случайных функций характеризуется корреляционной матрицей

$$K(\tau) = \begin{bmatrix} K_{x_1 x_1}(\tau) & \dots & K_{x_1 x_n}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{x_n x_1}(\tau) & \dots & K_{x_n x_n}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Пример 3.3. Требуется определить взаимные корреляционные функции $K_{xy}(t, t')$ и $K_{yx}(t, t')$ случайных стационарных функций

$$X(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t;$$

$$Y(t) = -A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t,$$

где A_1 , B_1 — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и равными дисперсиями D .

Взаимные корреляционные функции (при $t' - t = \tau$) равны

$$K_{xy}(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{Y}(t')] = D \sin \omega \tau;$$

$$K_{yx}(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{Y}(t')] = -D \sin \omega \tau.$$

Из полученных соотношений следует, что случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ являются стационарно связанными. Если в выражении для K_{yx} заменить τ на $-\tau$, то будет выполняться условие (3.13)

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau). \quad (3.14)$$

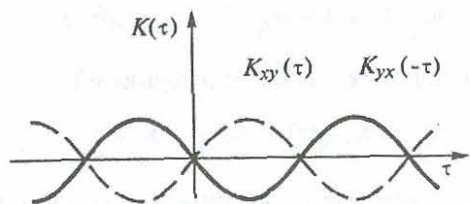


Рис. 3.2

График функции $K_{yx}(-\tau)$ есть зеркальное отражение графика функции $K_{xy}(\tau)$ (рис. 3.2).

§ 3.2. Эргодическое свойство стационарной случайной функции

Для получения характеристик стационарной случайной функции (математического ожидания m_x и корреляционной функции $K_x(t)$) необходимо иметь значительное число реализаций случайной функции $X(t)$. По записям реализации можно найти приближенные значения m_x и $K_x(\tau)$. Возникает вопрос: нельзя ли получить те же характеристики по одной реализации случайной функции $X(t)$. Поскольку случайный процесс является стационарным и протекает однородно во времени (математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция — от начала отсчета), естественно предположить, что одной единственной реализации достаточно для определения характеристик случайной функции. Возможность получения вероятностных характеристик для стационарной случайной функции по одной ее реализации имеет большое практическое значение, так как позволяет уменьшить объем экспериментальных исследований, а тем самым уменьшить и материальные затраты.

Стационарные случайные функции, для которых можно по одной реализации установить вероятностные характеристики, называют случайными функциями, обладающими эргодическим свойством, или просто *эргодическими стационарными случайными функциями*. Эргодическое свойство заключается в том, что каждая отдельная реализация случайной функции дает

возможность судить о статистических свойствах всей совокупности реализаций. Если случайная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством, то для нее среднее значение по времени (на достаточно большом интервале наблюдения) приблизительно равно среднему значению по множеству наблюдений, т.е.

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad (3.15)$$

где m_x — среднее значение по множеству реализаций; $\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ — среднее значение по времени для одной реализации.

Следует выяснить, при каких условиях выполняется приближенное соотношение (3.15).

Интеграл в правой части соотношения (3.15) для разных реализаций имеет разные случайные значения, поэтому

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad (3.16)$$

где Y_T — случайная величина.

Для выполнения приближенного равенства (3.16) необходимо и достаточно, чтобы дисперсия случайной величины Y_T была мала. Дисперсия случайной величины Y_T равна

$$\begin{aligned} D[Y_T] &= M[(Y_T - m_x)^2] = M\left[\left\{\frac{1}{T} \int_0^T (X - m_x) dt\right\}^2\right] = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_x(t - t') dt dt'. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что выражение (3.15) для математического ожидания стационарной случайной функции будет точным равенством при достаточно большом T .

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (3.18)$$

только в том случае, если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D[Y_T] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_x(t-t') dt dt' = 0. \quad (3.19)$$

Преобразуем выражение (3.19), переходя к новой переменной $\tau = t - t'$. При изменении t и t' в пределах интервала $(0, T)$ τ меняется в интервале $(-T, T)$, поэтому

$$I = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_x(t-t') dt dt' = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_{-t'}^{T-t'} K_x(\tau) d\tau \right) dt'. \quad (3.20)$$

Так как $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$, то отсюда следует, что $K_x(\tau)$ есть функция от $|\tau|$. Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \left[\int_{|\tau|}^T K_x(\tau) dt' \right] d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) K_x(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

Так как функции $\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)$ и $K_x(\tau)$ четные, то

$$I = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) K_x(\tau) d\tau. \quad (3.22)$$

Согласно (3.22), для того чтобы случайная стационарная функция $X(t)$ обладала свойством эргодичности (т.е. чтобы выполнялось условие (3.19)), необходимо и достаточно, чтобы ее корреляционная функция удовлетворяла условию

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) K_x(\tau) d\tau = 0. \quad (3.23)$$

Достаточным условием эргодичности случайной стационарной функции является условие неограниченного убывания ее корреляционной функции $K_x(\tau)$ по модулю при $|\tau| \rightarrow \infty$.

Так как корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции может быть представлена в виде

$$K_x(\tau) = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t+\tau)] \quad (3.24)$$

и от времени t не зависит, то и ее можно найти по одной реализации, осреднив по времени t правую часть выражения (3.24), т.е.

$$K_x(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t+\tau) dt,$$

или, перейдя к пределу,

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t+\tau) dt. \quad (3.25)$$

Соотношение (3.25) справедливо, если выполняется достаточное условие [29]: при $|\tau| \rightarrow \infty$ $K_x(\tau) \rightarrow 0$.

Пример 3.4. Установить, является ли стационарная случайная функция $X(t)$, корреляционная функция которой

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|},$$

эргодической.

Подставив $K_x(\tau)$ в соотношение (3.23), получим

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) D_x e^{-\alpha\tau} d\tau = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha T} - 1) - \frac{D_x}{T} \left(-\frac{T}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha T} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Стационарная случайная функция $X(t)$ является эргодической.

§ 3.3. Производные и интегралы от стационарных функций

3.3.1. Вероятностные характеристики производных стационарных случайных функций

Воспользуемся полученными в § 2.3 выражениями для вероятностных характеристик производных нестационарных функций.

Если

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t), \quad (3.26)$$

то математическое ожидание стационарной функции $X(t)$ равно нулю:

$$m_y = M \left[\frac{d}{dt} X(t) \right] = \frac{d}{dt} m_x = 0.$$

Корреляционная функция (2.37) для стационарной функции $X(t)$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} = \frac{\partial^2 K_x(\tau)}{\partial t \partial t'}.$$

Так как $\tau = t' - t$, то переходя к производной по τ , получаем

$$K_y(t, t') = - \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}. \quad (3.27)$$

Аналогично можно найти корреляционную функцию второй и последующих производных:

$$K_{\ddot{x}}(t, t') = \frac{d^4 K_x(\tau)}{d\tau^4}; \quad K_{\ddot{\ddot{x}}} = - \frac{d^6 K_x(\tau)}{d\tau^6}. \quad (3.28)$$

Из (3.28) следует, что производные стационарной функции являются стационарными функциями, так как их корреляционные функции зависят только от τ .

Рассмотрим несколько примеров дифференцирования корреляционной функции стационарной случайной функции.

Требуется определить корреляционные функции K_y .

При

$$Y = \frac{d}{dt} X(t),$$

имеет

- 1) $K_x = D_x e^{-\alpha |\tau|}$;
- 2) $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau|)$;
- 3) $K_x = D_x e^{-\alpha |\tau|} \cos \beta \tau$.

Так как

$$K_y = - \frac{d^2 K_x}{d\tau^2},$$

то дифференцируя K_x последовательно два раза по τ , получаем (см. приложение 1):

- 1) $K_y = - \frac{d}{d\tau} \left(- D_x \alpha e^{-\alpha |\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau} \right) = D_x \alpha \frac{d}{d\tau} (e^{-\alpha |\tau|} \text{sign } \tau) =$
 $= D_x \alpha \left[- \alpha e^{-\alpha |\tau|} (\text{sign } \tau)^2 + e^{-\alpha |\tau|} \frac{d \text{sign } \tau}{d\tau} \right] =$
 $= D_x \alpha [2\delta(\tau) - \alpha (\text{sign } \tau)^2] e^{-\alpha |\tau|} =$
 $= D_x \alpha [2\delta(\tau) - \alpha (\text{sign } \tau)^2] e^{-\alpha |\tau|};$
- 2) $K_y = - D_x \frac{d}{d\tau} [- \alpha e^{-\alpha |\tau|} \text{sign } \tau (1 + \alpha |\tau|) + \alpha e^{-\alpha |\tau|} \text{sign } \tau] =$
 $= D_x \alpha^2 \frac{d}{d\tau} [e^{-\alpha |\tau|} \text{sign } \tau |\tau|] = D_x \alpha^2 \frac{d}{d\tau} (e^{-\alpha |\tau|} \tau) =$
 $= D_x \alpha^2 [- \alpha e^{-\alpha |\tau|} \text{sign } \tau \cdot \tau + e^{-\alpha |\tau|}] = D_x \alpha^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 - \alpha |\tau|);$
- 3) $K_y = - D_x \frac{d}{d\tau} \left(- \alpha e^{-\alpha |\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau} \cos \beta \tau - \beta e^{-\alpha |\tau|} \sin \beta \tau \right) =$
 $= - D_x \left[\alpha^2 e^{-\alpha |\tau|} \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^2 \cos \beta \tau - \alpha e^{-\alpha |\tau|} \frac{d^2 |\tau|}{d\tau^2} \cos \beta \tau + \right.$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha\beta e^{-\alpha|\tau|} \left| \frac{d|\tau|}{d\tau} \right| \sin \beta\tau - \beta^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \Bigg] = \\
& = D_x e^{-\alpha|\tau|} \left[(\beta^2 - \alpha^2 \operatorname{sign}^2 \tau) \cos \beta\tau + 2\alpha\delta(\tau) \cos \beta\tau - 2\alpha\beta \sin \beta|\tau| \right]. \\
& \left(\sin \beta|\tau| = \sin \beta\tau \operatorname{sign} \tau, \quad \operatorname{sign}^2 \tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \neq 0, \\ 0 & \text{при } \tau = 0. \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

Так же можно получить выражение для взаимной корреляционной функции стационарной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$ и ее производной $\overset{\circ}{\dot{X}}(t)$:

$$\begin{aligned}
K_{\dot{x}\dot{x}}(t, t') &= M \left[\overset{\circ}{\dot{X}}(t) \frac{\partial}{\partial t'} \overset{\circ}{X}(t') \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial t'} M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t'} K_x(\tau) = \frac{dK_x(\tau)}{d\tau}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Из (3.29) следует, что стационарная функция $X(t)$ и ее первая производная являются стационарно связанными случайными функциями.

Так как $K_x(\tau)$ — четная функция τ , то

$$\left. \frac{dK_x(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0,$$

т.е. стационарная функция $\overset{\circ}{X}(t)$ и ее производная для одного и того же момента времени являются некоррелируемыми случайными величинами. Корреляционные функции первых двух производных стационарной случайной функции $X(t)$ равны:

$$K_{\dot{x}\dot{x}} = -\ddot{K}_x(\tau), \quad K_{\ddot{x}\ddot{x}} = \ddot{K}_x(\tau),$$

$$K_{\ddot{x}\ddot{x}} = -\ddot{K}_x(\tau), \quad K_{\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{x}}} = \ddot{\ddot{K}}_x(\tau),$$

т.е. являются стационарно связанными.

3.3.2. Вероятностные характеристики интеграла от стационарной случайной функции

Рассмотрим интеграл (2.25) от стационарной случайной функции $X(t)$, корреляционная функция которой равна

$$K_x(\tau) = D_x \cos \omega\tau.$$

Корреляционные функции $K_y(t, t')$ и $K_x(t, t')$ связаны соотношением (2.28). В рассматриваемом случае имеем ($\tau = t_1' - t_1$)

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(t_1' - t_1) dt_1 dt_1',$$

или

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} D_x \cos \omega(t_1' - t_1) dt_1 dt_1'.$$

Интегрируя, получаем

$$K_y(t, t') = \frac{1}{\omega^2} \cos \omega\tau + \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t - \cos \omega t').$$

Из полученного соотношения следует, что случайный процесс $Y(t)$ не является стационарным, т.е. (это справедливо и для общего случая) интеграл от стационарной функции не обладает свойством стационарности.

§ 3.4. Спектральное представление стационарных случайных процессов

Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (см. рис. 2.3, а, б) показывают, что изменение во времени этих функций различно.

Для оценки характера поведения случайных функций во времени была введена неслучайная функция — корреляционная функция $K_x(t, t')$, или $K_x(\tau)$ для стационарного процесса, которая отражает внутреннюю структуру соответствующего ей

случайного процесса, например процесса, показанного на рис. 2.3, б. Все реализации этого процесса имеют явный колебательный характер. Это говорит о том, что процесс должен характеризоваться спектральными свойствами по аналогии с детерминированным колебательным процессом. Как известно, если какой-либо колебательный процесс представляется в виде суммы гармонических функций с разными частотами, то спектром этого процесса называется функция, описывающая распределение амплитуд по частотам. Спектр показывает, какие слагаемые преобладают в данном колебательном процессе.

Рассмотрим случайную функцию

$$X(t) = \sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t), \quad (3.30)$$

где A_j, B_j — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и разными дисперсиями ($D_{A_j} = D_{B_j} = D_j$).

Было показано (пример 3.1), что $X(t)$ есть стационарная функция. Ее корреляционная функция $K_X(\tau)$ равна

$$K_X(\tau) = \sum_{j=1}^n D_j \omega_j \cos \omega_j \tau. \quad (3.31)$$

При $\tau = 0$ получаем дисперсию случайной функции $X(t)$:

$$D_X = \sum_{j=1}^n D_j \omega_j^2. \quad (3.32)$$

Формула (3.32) показывает, что дисперсия D_X распределена по различным частотам. Качественный характер распределения D_X по частотам показан на рис. 3.3. Спектр, показанный на рис. 3.3, называется *дискретным* спектром. Дисперсия D_X конечна, поэтому при числе слагаемых n , стремящихся к бесконечности, можно считать, что дисперсии амплитуд D_j есть малые величины ΔD_j , т.е.

$$D_X = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta D_j(\omega_j). \quad (3.33)$$

При увеличении числа слагаемых дискретный спектр будет приближаться к непрерывному, в котором малому интервалу частот $\Delta \omega_j$ соответствует элементарная дисперсия $\Delta D_j(\omega_j)$. Так как ΔD_j мало, то отложим по оси ординат отношение $\Delta D_j / \Delta \omega_j$, которое характеризует собой среднюю (конечную) плотность дисперсии.

Введем для средней плотности дисперсий обозначение

$$S_X(\omega_j) = \frac{\Delta D_j}{\Delta \omega_j}. \quad (3.34)$$

Средняя плотность дисперсий есть конечное число. График дискретных средних значений дисперсий аналогичен графику, показанному на рис. 3.3.

Корреляционная функция (3.31) при большом n с учетом (3.33) и (3.34) равна

$$K_X(\tau) = \sum_{j=1}^n S_X(\omega_j) \Delta \omega_j \cos \omega_j \tau.$$

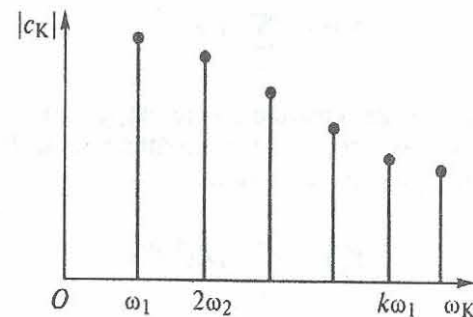


Рис. 3.3

В пределе (при $n \rightarrow \infty$) имеем $\omega_j \rightarrow \omega$; $\Delta\omega_j \rightarrow d\omega$; $\sum_{j=1}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty}$;
 $S(\omega_j) \rightarrow S(\omega)$, поэтому получаем

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (3.35)$$

Функция $S_x(\omega)$ называется *спектральной плотностью*. Так как спектральная плотность характеризует распределение дисперсий, она всегда положительна ($S_x(\omega) > 0$) и является четной функцией от ω :

$$S(\omega) = S(-\omega). \quad (3.36)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получаем еще одно полезное соотношение

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (3.37)$$

Можно получить более общее соотношение (3.37), если рассмотреть случайную функцию вида

$$X(t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{i\omega_j t},$$

где A_j — независимые комплексные случайные величины с нулевыми ожиданиями и равными дисперсиями. В этом случае корреляционная функция K_x равна

$$K_x(\tau) = \sum_{j=1}^n D_j e^{i\omega_j \tau}, \quad (3.38)$$

или при $n \rightarrow \infty$

$$K_x(\tau) = \int_{-1}^n S_x(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (3.39)$$

Воспользовавшись формулой обратного преобразования Фурье, получаем

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (3.40)$$

Если в выражении (3.38) взять сумму от $-n$ до $+n$, то (при $|n| \rightarrow \infty$) получим

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega; \quad (3.41)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (3.42)$$

Соотношения (3.41) и (3.42) называются формулами *Винера-Хинчина*. Соотношения (3.35) и (3.37) являются частными случаями формул (3.41) — (3.42), когда мнимые части интегралов равны нулю, что имеет место в том случае, если функции $S_x(\omega)$ и $K_x(\tau)$ — четные.

Дисперсия стационарной функции связана со спектральной плотностью соотношением

$$D_x = K_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (3.43)$$

или

$$D_x = K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Рассмотрим еще один вариант вывода соотношения (3.41). Воспользуемся представлением центрированной случайной функции $X(t)$ в частотной области (преобразование Фурье):

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Находим корреляционную функцию комплексной функции

$$K_x(t, t') = M[X(t) X^*(t')] = \\ = M \left[\iint X_0(i\omega) X_0^*(i\omega') e^{i\omega t} e^{-i\omega' t'} d\omega d\omega' \right],$$

или

$$K_x(t, t') = M \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[X_0(i\omega) X_0^*(i\omega')] e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'. \quad (3.44)$$

Для стационарной функции корреляционная функция зависит от разности моментов времени. Поэтому, если $X(t)$ стационарная функция, то корреляционная функция K_x будет зависеть от разности моментов времени, если положить

$$M[X_0(i\omega) X_0^*(i\omega')] = S_x(i\omega') \delta(\omega' - \omega). \quad (3.45)$$

Подставив (3.45) в правую часть соотношения (3.44) и интегрируя по ω' , получим

$$K_x(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega = K_x(\tau) \quad (t - t' = \tau).$$

3.4.1. Спектральные плотности производных стационарных функций

В § 3.3 были получены корреляционные функции производных стационарных функций

$$K_{\dot{x}} = -\frac{d^2 K_x}{d\tau^2}, \quad K_{\ddot{x}} = \frac{d^4 K_x}{d\tau^4}.$$

Поскольку

$$K_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

то

$$K_{\dot{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \omega^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.46)$$

Из (3.46) следует, что спектральная плотность производной стационарной функции $X(t)$ равна

$$S_{\dot{x}}(\omega) = S_x(\omega) \omega^2. \quad (3.47)$$

Аналогично получаем спектральную плотность второй производной (и так далее):

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = S_x(\omega) \omega^4. \quad (3.48)$$

3.4.1. Определение спектральных плотностей

Пример 3.5. Корреляционная функция случайной стационарной функции $X(t)$ (рис. 3.4)

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

Воспользовавшись формулой (3.42), получим

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ = \frac{D_x}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau \right] = \frac{D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (3.49)$$

График изменения $S_x(\omega)$ показан на рис. 3.5.

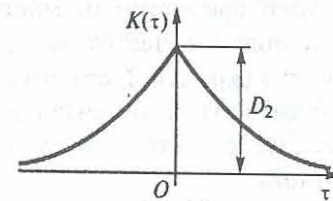


Рис. 3.4

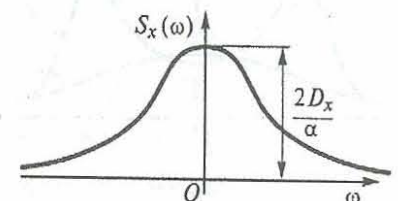


Рис. 3.5

Пример 3.6. Корреляционная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \quad (\alpha > 0).$$

Так как

$$\cos \beta\tau = \frac{1}{2} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}),$$

то получаем

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

или

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{4\pi} \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau + \\ + \frac{D_x}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

После преобразований имеем

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right]. \quad (3.50)$$

Характер изменения $S_x(\omega)$ от ω для: 1) $\alpha = 1, \beta = 2$; 2) $\alpha = 3, \beta = 2$ показан на рис. 3.6 (при $D_x = 1$).

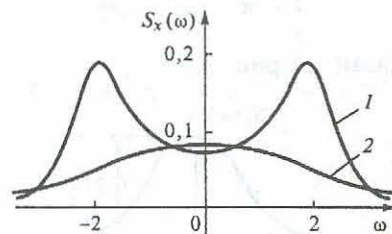


Рис. 3.6

Из графиков следует, что при $\alpha = 1$ (кривая 1) спектр случайной функции обнаруживает ярко выраженный максимум в области частот $\omega = \pm \beta$. При $\alpha = 3$ (кривая 2) спектральная плотность в значительном диапазоне остается почти постоянной.

ная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) = \\ = K_x^{(1)}(\tau) + D_x \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha|\tau|} \frac{e^{i\beta|\tau|} - e^{-i\beta|\tau|}}{2i}.$$

Спектральная плотность

$$S_x(\omega) = S_x^{(1)}(\omega) + \frac{D_x \alpha}{4\pi i \beta} \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| + i\beta|\tau| - i\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\beta|\tau| - i\omega\tau} d\tau \right].$$

Первое слагаемое $S_x^{(1)}(\omega)$ равно спектральной плотности предыдущего примера. Рассмотрим слагаемые, зависящие от интегралов, которые можно преобразовать к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_1|\tau| - i\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_2|\tau| - i\omega\tau} d\tau,$$

где $\alpha_1 = \alpha - i\beta, \alpha_2 = \alpha + i\beta$.

Далее каждое из этих слагаемых представляем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_1|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha_1 - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_1 + i\omega)\tau} d\tau; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_2|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha_2 - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_2 + i\omega)\tau} d\tau.$$

Полученные слагаемые легко интегрируются, и после преобразований имеем следующее выражение для спектральной плотности:

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x \alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}. \quad (3.51)$$

Пример 3.8. Корреляционная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^2 \tau^2}. \quad (3.52)$$

Спектральная плотность

$$S_x(\omega) = D_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau} d\tau.$$

Воспользуемся известной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{AC-B^2}{A}} \quad (A > 0). \quad (3.53)$$

В рассматриваемом случае $A = \alpha^2$; $2B = i\omega$; $C = 0$.
В результате получаем

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} e^{-\omega^2/4\alpha^2} = \frac{D_x}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/4\alpha^2}. \quad (3.54)$$

Пример 3.9. Корреляционная функция равна

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^2 \tau^2} \cos \beta \tau. \quad (3.55)$$

Спектральная плотность

$$S_x(\omega) = D_x \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau + i\beta\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau - i\beta\tau} d\tau \right].$$

Воспользовавшись формулой (3.53), после преобразований получаем

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{4\alpha\sqrt{\pi}} \left[e^{\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha^2}} + e^{\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha^2}} \right]. \quad (3.56)$$

В качестве последнего примера рассмотрим стационарный белый шум, корреляционная функция которого зависит от δ -функции Дирака:

$$K_x(\tau) = S_0 \delta(\tau).$$

Найдем спектральную плотность белого шума:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \delta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau,$$

или

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{2\pi} \quad (3.57)$$

(так как $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 1$).

Напомним одну полезную при преобразованиях формулу, связывающую δ -функции Дирака с интегральным преобразованием Фурье:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega, \text{ или } \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\omega. \quad (3.58)$$

Из полученного результата следует, что спектральная плотность стационарного белого шума постоянна (равна S_0). Как уже было сказано, дисперсия белого шума равна бесконечности. Для создания такого случайного процесса, когда, например, случайная сила непрерывно получала бы случайные приращения с бесконечной дисперсией, необходима бесконечная мощность. Поэтому понятие белого шума является математической абстракцией. Однако эта абстракция очень полезна при решении многих прикладных задач, где используются обобщенные функции.

В приложении 3 приведены графики корреляционных функций и соответствующих им спектральных плотностей.

§ 3.5. Взаимные спектральные плотности и их свойства

Если взаимно корреляционные функции $K_{x_j x_v}(t, t')$ стационарных случайных функций $X_j(t)$, $X_v(t)$ зависят от разности моментов времени ($t' - t = \tau$), то такие стационарные случайные функции называют *стационарно связанными* (§ 3.1).

Воспользовавшись формулой Винера-Хинчина (3.42), получаем взаимную спектральную плотность

$$S_{x_j x_v}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_j x_v}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.59)$$

Из (3.59) имеем

$$S_{x_j x_v}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [K_{x_j x_v}(\tau) e^{-i\omega\tau} + K_{x_j x_v}(-\tau) e^{i\omega\tau}] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^0 K_{x_j x_v}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} K_{x_j x_v}(-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Поскольку

$$K_{x_j x_v}(\tau) = K_{x_v x_j}(-\tau),$$

то

$$S_{x_j x_v}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [K_{x_j x_v}(\tau) e^{-i\omega\tau} + K_{x_v x_j}(\tau) e^{i\omega\tau}] d\tau. \quad (3.60)$$

Для взаимной спектральной плотности $S_{x_v x_j}(i\omega)$ имеем аналогичное выражение

$$S_{x_v x_j}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [K_{x_v x_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} + K_{x_j x_v}(\tau) e^{i\omega\tau}] d\tau. \quad (3.61)$$

Сложив спектральные плотности (3.60) и (3.61), получаем

$$S_{x_j x_v}(i\omega) + S_{x_v x_j}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (K_{x_j x_v} + K_{x_v x_j}) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\tau,$$

или

$$S_{x_j x_v}(i\omega) + S_{x_v x_j}(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (K_{x_j x_v} + K_{x_v x_j}) \cos \omega\tau d\tau. \quad (3.62)$$

Правая часть соотношения (3.62) есть вещественная величина, поэтому сумма спектральных плотностей есть вещественная функция от ω . Так как спектральные плотности можно представить (как и любую функцию, зависящую от мнимого аргумента) в виде суммы

$$S_{x_j x_v}(i\omega) = S_{x_j x_v}^{(1)}(\omega) + iS_{x_j x_v}^{(2)}(\omega),$$

$$S_{x_v x_j}(i\omega) = S_{x_v x_j}^{(1)}(\omega) + iS_{x_v x_j}^{(2)}(\omega),$$

то из соотношения (3.62) следует

$$S_{x_j x_v}^{(2)}(\omega) = -S_{x_v x_j}^{(2)}(\omega), \quad (3.63)$$

поэтому

$$S_{x_j x_v}^{(1)}(\omega) + S_{x_v x_j}^{(1)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (K_{x_j x_v} + K_{x_v x_j}) \cos \omega\tau d\tau. \quad (3.64)$$

Правая часть соотношения (3.64) есть четная функция относительно ω , поэтому $S_{x_j x_v}$ и $S_{x_v x_j}$ есть четные функции, т.е.

$$S_{x_j x_v}^{(1)}(\omega) = S_{x_j x_v}^{(1)}(-\omega), \quad (3.65)$$

$$S_{x_v x_j}^{(1)}(\omega) = S_{x_v x_j}^{(1)}(-\omega).$$

Из этого результата следует общий вывод: действительные части взаимных спектральных плотностей есть четные функции от ω . Покажем, что мнимые части взаимных спектральных плотностей есть нечетные функции ω . Из (3.59) получаем

$$\begin{aligned} S_{x_j x_v}^{(1)}(\omega) + iS_{x_j x_v}^{(2)}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_j x_v} \cos \omega\tau d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_j x_v} \sin \omega\tau d\tau. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Отсюда

$$S_{x_j x_v}^{(2)}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_j x_v} \sin \omega\tau d\tau. \quad (3.67)$$

Правая часть соотношения (3.67) есть нечетная функция относительно ω . Поэтому $S_{x_j x_v}^{(2)}(\omega)$ есть нечетная функция

$$S_{x_j x_v}^{(2)}(\omega) = -S_{x_j x_v}^{(2)}(-\omega), \quad (3.68)$$

т.е. мнимые части взаимных спектральных плотностей есть нечетные функции от ω .

Для системы n случайных стационарных и стационарно связанных функций $X_j(t)$ можно получить матрицу (аналогичную матрице взаимно корреляционных функций)

$$S(i\omega) = \begin{bmatrix} S_{x_1 x_1} & S_{x_1 x_2} & \dots & S_{x_1 x_n} \\ S_{x_2 x_1} & \dots & \dots & S_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{x_n x_1} & \dots & \dots & S_{x_n x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Диагональные члены матрицы $S(\omega)$ есть вещественные неотрицательные четные функции ω :

$$S_{x_i x_i}(\omega) = S_{x_i x_i}(-\omega).$$

Пример 3.10. Дана стационарная случайная функция $X(t)$ с вероятностными характеристиками $m_x = 0$, $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Требуется найти взаимную спектральную плотность стационарной функции и ее первой производной. Выражение для взаимно корреляционной функции (3.29)

$$K_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{d}{d\tau} K_x(\tau) = -D_x \alpha e^{-\alpha|\tau|} \sin \tau dt.$$

Для определения взаимной спектральной плотности воспользуемся соотношением (3.59):

$$\begin{aligned} S_{\dot{x}\dot{x}}(i\omega) &= -\frac{D_x \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} \sin \tau d\tau = \\ &= -\frac{D_x \alpha}{2\pi} \left[\int_0^{-\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} (1) d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau-i\omega\tau} (-1) d\tau \right] = \\ &= -\frac{D_x \alpha}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\omega)\tau} d\tau \right] = -\frac{D_x \alpha i\omega}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

§ 3.6. Определение спектральных плотностей решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При решении линейных дифференциальных уравнений при стационарных возмущениях возможны следующие случаи.

1. Уравнение (или система уравнений) имеет переменные во времени коэффициенты, как например, уравнение (2.61). В этом случае при стационарной правой части решение уравнения будет нестационарным при любой длительности процесса. Примером нестационарного движения системы, которая описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, является старт летательного аппарата (см. рис. В.2).

2. Уравнение имеет постоянные коэффициенты (например, уравнение (2.55)). В этом случае возможны два режима движения системы при стационарных возмущениях: 1) нестационарное и 2) стационарное. Нестационарное движение (например, колебания) системы при действии стационарных случайных возмущений имеет место, когда система до действия случайных возмущений находится в покое.

Стационарные колебания имеют место при стационарных возмущениях после определенного интервала времени от начала колебаний.

Стационарные случайные колебания возможны в устойчивых системах. Рассмотрим алгоритм определения спектральной плотности решения, считая, что при стационарном возмущении имеет место стационарный режим движения системы. Ограничимся уравнениями первого и второго порядка. (Более общий случай определения спектральных плотностей решений систем уравнений n -го порядка изложен в главе VI.)

Напомним основные сведения из операционного исчисления, связанные с преобразованием Лапласа. Если имеется некоторая функция $f(t)$ независимой вещественной переменной t , то преобразование Лапласа (a — прямое и b — обратное) определяется формулами

$$a) f_0(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt;$$

$$б) f(t) = \int_0^{\infty} f_0(p) e^{pt} dp, \quad (3.70)$$

где p — некоторая комплексная величина.

Функцию $f(t)$ называют *оригиналом*, а функцию $f_0(p)$ — *изображением*. В табл. 3.1 при нулевых начальных значениях даны оригиналы и изображения функции $f(t)$ и ее производных и функции с запаздыванием $f(t - t_0)$. В третьей строке таблицы даны изображения тех же функций по Фурье. Прямое и обратное односторонние преобразования по Фурье имеют вид

$$f_0(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.71)$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} f_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

двусторонние преобразования:

$$f_0(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.72)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Таблица 3.1

Функции и их изображения

Оригинал	$\frac{df}{dt}$	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$f(t - t_0)$	$\int f(t) dt$	$f_1 + f_2$
Изображение	$pf_1(p)$	$p^2 f_0(p)$	$p^n f_0(p)$	$e^{-pt_0} f_1(p)$	$\frac{1}{p} f_0(p)$	$f_1(p) + f_2(p)$
В частотной области	$i\omega f_0(i\omega)$	$(i\omega)^2 f_0(i\omega)$	$(i\omega)^n f_0(i\omega)$	$e^{-i\omega t_0} f_0(i\omega)$	$\frac{1}{i\omega} f_0(i\omega)$	$f_{01}(i\omega) + f_{02}(i\omega)$

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$L(t) = \dot{Y}(t) + kY(t) - f(t) = 0, \quad (3.73)$$

где $f(t)$ — стационарная функция с нулевым математическим ожиданием и известной спектральной плотностью.

Если функция $f(t)$ имеет отличное от нуля математическое ожидание, то ее можно представить в виде

$$f(t) = m_f + \overset{\circ}{f}(t),$$

где $\overset{\circ}{f}(t)$ — центрированная случайная функция.

Так как m_f есть постоянная величина при стационарных колебаниях, математическое ожидание m_y будет постоянным и равным

$$m_y = \frac{1}{k} m_f.$$

Поэтому после преобразования получаем уравнение (3.73), где $f(t)$ и $Y(t)$ являются центрированными стационарными функциями. Воспользовавшись преобразованием Лапласа (при нулевых начальных данных), получим

$$L(p) = \int_0^{\infty} [\dot{Y}(t) + kY(t) - f(t)] e^{-ipt} dt = pY(p) + kY(p) - f_0(p) = 0.$$

Изображение функции $Y(t)$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+k)} f_0(p) = W_1(p) f_0(p), \quad (3.74)$$

где $W(p)$ — передаточная функция.

В частотной области

$$Y(i\omega) = \frac{1}{(i\omega+k)} f_0(i\omega) = W(i\omega) f_0(i\omega). \quad (3.75)$$

Воспользовавшись обратным двусторонним преобразованием Фурье, получим

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.76)$$

Поэтому корреляционную функцию $K_y(t, t')$ можно представить в виде

$$K_y(t, t') = M[Y(t) Y^*(t')] = \\ = M \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} Y_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} Y_0^*(i\omega') e^{-i\omega' t'} d\omega' \right) \right],$$

или

$$K_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[Y(i\omega) Y^*(i\omega')] e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'. \quad (3.77)$$

Чтобы функция K_y зависела от разности моментов времени $(t - t' = \tau)$, что должно быть при стационарном процессе, необходимо выполнение условия

$$M[Y(i\omega) Y^*(i\omega')] = S_y(\omega) \delta(\omega' - \omega).$$

Подставив это соотношение в левую часть (3.77) и интегрируя по ω' , получим

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.78)$$

Корреляционную функцию $K_y(t, t')$ можно получить, воспользовавшись уравнением (3.75):

$$K_y(t, t') = M[Y(t) Y^*(t')] = \\ = M \left[\int_{-\infty}^{\infty} (W(i\omega) f_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega) \int_{-\infty}^{\infty} (W^*(i\omega') f_0^*(i\omega') e^{-i\omega' t'} d\omega') \right],$$

или

$$K_y(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) W^*(i\omega') M[f_0(i\omega) f_0^*(i\omega')] e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'. \quad (3.79)$$

Функция $K_y(t, t')$ будет зависеть от разности моментов времени при условии

$$M[f_0(i\omega) f_0^*(i\omega')] = S_f(\omega) \delta(\omega' - \omega). \quad (3.80)$$

Исключив математическое ожидание произведения функций f_0 и f_0^* (3.80) из правой части (3.79), получим

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) W^*(i\omega) S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.81)$$

Так как (3.78) и (3.81) есть два представления одной и той же функции $K_y(\tau)$, то должно выполняться тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S_y(\omega) - W(i\omega) W^*(i\omega) S_f(\omega)] e^{-i\omega\tau} d\omega \equiv 0. \quad (3.82)$$

Поэтому из (3.82) получаем

$$S_y(\omega) = W(i\omega) W^*(i\omega) S_f(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (3.83)$$

где $|W_1(i\omega)|^2$ — квадрат модуля частотной функции.

Соотношение (3.83) устанавливает связь между спектральной плотностью «входа» $S_f(\omega)$ и спектральной плотностью «выхода» $S_y(\omega)$.

Для уравнения второго порядка

$$\ddot{Y} + a_1 \dot{Y} + a_2 Y = k f(t)$$

в частотной области получаем

$$Y_0(i\omega) = \frac{k}{[(i\omega)^2 + (i\omega) a_1 + a_2]} f_0(i\omega) = W(i\omega) f_0(i\omega), \quad (3.84)$$

где

$$W(i\omega) = \frac{k}{[(i\omega)^2 + (i\omega) a_1 + a_2]}.$$

Соотношение (3.84) аналогично (3.75), поэтому спектральная плотность $S_y(\omega)$ равна

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_f(\omega). \quad (3.85)$$

Этот результат справедлив для любого линейного уравнения с постоянными коэффициентами (имеется в виду уравнение n -го порядка), для которого частотная функция $W(i\omega)$ равна

$$W(i\omega) = \frac{k}{[(i\omega)^n a_0 + (i\omega)^{n-1} a_1 + (i\omega)^{n-2} a_2 + \dots + a_n]}.$$

Зная спектральную плотность «выхода», можно определить дисперсию D_y :

$$K_y(0) = D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

Спектральную плотность $S_y(\omega)$ можно представить для общего случая в виде

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{G(i\omega)}{|A(i\omega)|^2}, \quad (3.86)$$

где

$$G(i\omega) = b_0(i\omega)^{2n-2} + b_1(i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1};$$

$$A(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n.$$

Поэтому

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{|A(i\omega)|^2} d\omega. \quad (3.87)$$

Значения интегралов I_n приведены в приложении 2.

Глава 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущих разделах были рассмотрены только первые два момента теории случайных функций — математическое ожидание и корреляционная функция. К сожалению, далеко не все прикладные задачи могут быть решены методами корреляционной теории — например, часто возникающая при анализе динамических систем задача об определении вероятности превышения ординаты случайной функции заданных значений. Эти задачи можно решить, если ограничиться процессами, обладающими некоторыми специальными свойствами, но представляющими практический интерес. В предыдущих параграфах методы корреляционной теории использовались для анализа систем с линейной связью между входом и выходом. В этом случае корреляционная теория дает возможность получить вероятностные характеристики решения дифференциальных уравнений, если известны вероятностные характеристики возмущений. Получить решение нелинейных уравнений методами корреляционной теории нельзя. Однако, если ограничиться процессами, обладающими специальными свойствами, можно получить решение и для нелинейных задач статистической динамики. К таким процессам относят марковские процессы, для полной характеристики которых достаточно знать только двумерные законы распределения.

§ 4.1. Непрерывные одномерные марковские процессы

В теории марковских процессов принимается, что закон распределения ординаты процесса в любой будущий момент времени t_i зависит только от значения ординаты в данный момент времени t_{i-1} и не зависит от того, какие ординаты функция имела в прошлом, т.е. дополнительное знание значений случайной функции при $t < t_{i-1}$ не изменяет характера

распределения ординат функции при $t \geq t_i$. Физически эта особенность случайного процесса эквивалентна процессам без последствия (процессам, которые не зависят от предыстории).

Для марковского процесса любые многомерные законы распределения могут быть выражены через двумерные. В качестве примера рассмотрим трехмерную плотность вероятности $f(x_2, t_2, x_1, t_1, x_0, t_0)$ — плотность вероятности трех ординат случайного процесса, взятых в три последовательных момента времени t_0, t_1, t_2 ($t_2 > t_1 > t_0$). В соответствии с общей формулой для условных законов распределения (1.48)

$$f(x_2, t_2, x_1, t_1, x_0, t_0) = f(x_2, t_2 | x_1, t_1, x_0, t_0) f(x_1, t_1, x_0, t_0). \quad (4.1)$$

В свою очередь,

$$f(x_1, t_1, x_0, t_0) = f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0), \quad (4.2)$$

но, так как

$$f(x_2, t_2 | x_1, t_1, x_0, t_0) = f(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

(это свойство только марковских процессов), то окончательно имеем

$$f(x_2, t_2, x_1, t_1, x_0, t_0) = f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_0, t_0). \quad (4.3)$$

Аналогично можно получить и для n -мерной плотности вероятности

$$f(x_n, t_n, \dots, x_0, t_0) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ \times f(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \dots f(x_0, t_0), \quad (4.4)$$

т.е. плотность вероятности ординат марковского процесса любого порядка может быть выражена через условные двумерные плотности вероятности ординаты процесса в момент времени t_1 . Для функций $f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$ должны выполняться соотношения (справедливые для любой плотности вероятности)

$$f(x_i, t_i | x_{i-1}) \geq 0; \quad (4.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i = 1. \quad (4.6)$$

Кроме того, двумерная плотность вероятности $f(x_i, t_i, x_{i-1}, t_{i-1})$ связана с условной плотностью вероятности соотношением

$$f(x_i, t_i, x_{i-1}, t_{i-1}) = f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) f(x_{i-1}, t_{i-1}). \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует

$$f(x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i, t_i, x_{i-1}, t_{i-1}) dx_{i-1} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_{i-1}, t_{i-1}) f(x_{i-1}, t_{i-1}) dx_{i-1}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим три последовательных момента времени: t_0, τ и t ($t_0 < \tau < t$). В момент t_0 (рис. 4.1) процесс имел ординату x_0 . Тогда элементарные вероятности перехода из состояния x_0 на интервал $(z, z + dz)$ (где $z = x(\tau)$) в момент τ и на интервал $(x, x + dx)$ в момент t равны соответственно $f(z, \tau | x_0, t_0) dz$ и $f(x, t | x_0, t_0) dx$.

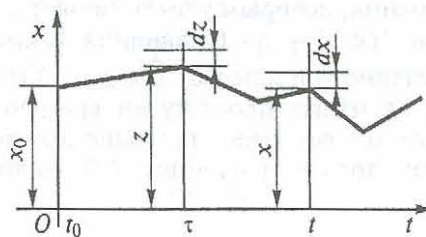


Рис. 4.1

Вероятность перехода из состояния (z, τ) на интервал $(x, x + dx)$ в момент t равна $f(x, t | z, \tau) dx$. Полная вероятность перехода из состояния $(x, x + dx)$ в момент t получается интег-

рированием произведения вероятностей $(x, f(x, t | z, \tau) dx \times f(z, \tau | x_0, \tau_0) dz)$ по всем промежуточным значениям z , т.е.

$$f(x, t | x_0, t_0) dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | z, \tau) f(z, \tau | x_0, t_0) dz \right) dx,$$

или

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | z, \tau) f(z, \tau | x_0, t_0) dz. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) в математической литературе называют *уравнением Чепмена—Колмогорова*, в литературе по физике — *уравнением Смолуховского*, который получил его при исследовании броуновского движения частицы. Уравнение (4.9) накладывает весьма жесткие ограничения на вид условной плотности вероятности перехода, а именно, интегрирование по z должно привести к исключению z , причем вид функции f должен остаться неизменным.

Пределы интегрирования не обязательно должны быть равны бесконечности.

§ 4.2. Уравнение Фокера—Планка—Колмогорова

Получим уравнения, которым удовлетворяет условная плотность вероятности $f(x, t | x_0, t_0)$ (уравнения Колмогорова) для непрерывного случайного процесса. Процесс $X(t)$ считают непрерывным, если за малые промежутки времени $X(t)$ может получить заметные по величине приращения лишь с малой вероятностью. Для этого в уравнении (4.9) положим $\tau = t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$), т.е.

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | z, t_0 + \Delta t) f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz. \quad (4.10)$$

Разложим функцию $f(x, t | z, t_0 + \Delta t)$ в ряд Тейлора по z в окрестности точки $z = x_0$ (ограничившись первыми тремя членами разложения):

$$f(x, t | z, t_0 + \Delta t) = f(x, t | x_0, t_0 + \Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x_0} (z - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} (z - x_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3} (z - x_0)^3 + \dots \quad (4.11)$$

Подставив (4.11) в уравнение (4.10), получим

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x, t | x_0, t_0 + \Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x_0} (z - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} (z - x_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3} (z - x_0)^3 \right] f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz. \quad (4.12)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz = 1, \quad (4.13)$$

то после преобразований имеем

$$f(x, t | x_0, t_0) - f(x, t | x_0, t_0 + \Delta t) = \frac{\partial f}{\partial x_0} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0) f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0)^2 f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0)^3 f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz. \quad (4.14)$$

Разделив обе части уравнения (4.14) на Δt и перейдя к пределу, получим

$$\frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t_0} = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{b_1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{c_1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}, \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_1(x_0, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0) f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz; \\
 b_1 &= b_1(x_0, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0)^2 f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz; \\
 c_1 &= c_1(x_0, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0)^3 f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz.
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Введенные коэффициенты имеют специальные названия: a_1 — коэффициент сноса; b_1 — коэффициент диффузии.

Выражения для коэффициентов a_1 , b_1 и c_1 можно представить и в более компактной форме записи:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[z - x_0]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta z]}{\Delta t}; \\
 b_1 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z - x_0)^2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta z^2]}{\Delta t}; \\
 c_1 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z - x_0)^3]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta z^3]}{\Delta t}.
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

В выражениях (4.17) операция $M[\]$ есть операция условного математического ожидания. Коэффициент $a_1(x_0, t_0)$ есть предел отношения математического ожидания разности ординат случайного процесса к интервалу времени Δt , для которого ординаты взяты при стремлении этого интервала к нулю, т.е. $a_1(x_0, t_0)$ характеризует скорость изменения случайной функции. Коэффициент $b_1(x_0, t_0)$ характеризует предел отношения математического ожидания квадрата разности ординат к интервалу времени Δt при стремлении Δt к нулю, т.е. характеризует скорость изменения условной дисперсии случайной функции.

Обычно в теории марковских процессов принимают, что момент третьего порядка $M[(z - x_0)^3]$ стремится к нулю быстрее, чем Δt , поэтому

$$c_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z - x_0)^3]}{\Delta t} = 0. \quad (4.18)$$

Принимаемое условие $c_1(x_0, t_0) = 0$ не является очевидным и должно рассматриваться как предположение о том, что вероятность больших отклонений $z - x_0$ должна убывать с уменьшением Δt настолько быстро, чтобы все моменты этой разности, начиная с третьего, стремились к нулю быстрее, чем Δt . Это требование позволяет рассматривать случайную функцию $X(t)$ в системе, подвергающейся действию случайных импульсов, как непрерывно изменяющуюся величину. Следовательно, решение уравнения (4.15) справедливо (при $c_1 = 0$) только для интервалов времени Δt , много больших интервалов времени между импульсами.

Окончательно получаем следующее уравнение (первое уравнение Колмогорова):

$$-\frac{\partial f}{\partial t_0} = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.19) дает возможность определить условную плотность вероятности $f(x, t | x_0, t_0)$ как функцию начального состояния, так как независимыми переменными являются «прошлое» время t_0 и «прошлое» состояние x_0 .

Получим уравнение, позволяющее определить изменение условной плотности вероятности в будущем, т.е. уравнение, связывающее производные $f(x, t | x_0, t_0)$ по t и x , а не по t_0 и x_0 , как в первом уравнении Колмогорова. Уравнение, в котором независимыми переменными являются t и x , называют *вторым уравнением Колмогорова*.

Воспользуемся выводом, приведенным в работе [17]. Введем в рассмотрение некоторую произвольную функцию $R(x)$, которая во всей области изменения случайной функции $X(t)$ является непрерывной дифференцируемой до второго порядка и обращается в нуль на границах интервала (a, b) изменения x вместе с первыми двумя производными:

$$R(a) = R(b) = R'(a) = R'(b) = R''(a) = R''(b) = 0. \quad (4.20)$$

Обычно (по аналогии с нормальным законом распределения) считают, что область возможных значений x равна $(-\infty, \infty)$, т.е. $a = -\infty$, $b = \infty$. Рассмотрим определение частной производной:

$$\frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t + \Delta t | x_0, t_0) - f(x, t | x_0, t_0)}{\Delta t}. \quad (4.21)$$

В отличие от вывода первого уравнения Колмогорова, где момент τ берется близким к моменту t_0 , при выводе второго уравнения Колмогорова момент τ берется близким к моменту t .

Умножим соотношение (4.21) на $R(x)$ и проинтегрируем в пределах от $-\infty$ до ∞ , тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} R(x) dx = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, t + \Delta t | x_0, t_0) - f(x, t | x_0, t_0)}{\Delta t} R(x) dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Воспользуемся уравнением (4.9), в котором заменим t на $t + \Delta t$, а τ — на t . В результате получим

$$f(x, t + \Delta t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | x_0, t_0) dz. \quad (4.23)$$

Исключим $f(x, t + \Delta t | x_0, t_0)$, входящие в выражение (4.22), используя уравнение (4.23):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} R(x) dx = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | x_0, t_0) R(x) dz - \right. \\ & \quad \left. - f(x, t | x_0, t_0) R(x) \right] dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t | x_0, t_0) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) R(x) dx dz - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, t_0) R(x) dx \right]. \quad (4.24)$$

Если в выражении (слагаемое в (4.24))

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t | x_0, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) R(x) dx dz$$

переменные интегрирования x заменить на z , получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} R(x) dx = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, t_0) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) R(z) dz - R(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Разложим функцию $R(z)$ в ряд Тейлора вблизи точки $z = x$ по степеням $(x - z)$:

$$R(z) = R(x) + R'(x)(x - z) + \frac{1}{2} R''(x)(x - z)^2 + O(x - z),$$

где $O(x - z)$ — слагаемые более высокого порядка малости.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) \left[R(x) + R'(x)(x - z) + \frac{1}{2} R''(x)(x - z)^2 + O(x - z) \right] dz = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) R(x) dx + R'(x) \int_{-\infty}^{\infty} (x - z) f(z, t + \Delta t | x_0, t_0) dz + \\ & \quad + \frac{1}{2} R''(x) \int_{-\infty}^{\infty} (x - z)^2 f(z, t + \Delta t | x, t) dz. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) dz = 1,$$

то, отбросив слагаемые ряда $O(x-z)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} R(x) dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x, t | x_0, t_0) R'(x) a_1(x, t) + \frac{1}{2} R''(x) b_1(x, t) \right] dx, \quad (4.26)$$

где

$$a_1 = a_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x-z) f(z, t + \Delta t | x, t) dz = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[x-z]}{\Delta t};$$

$$b_1 = b_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x-z)^2 f(z, t + \Delta t | x_0, t_0) dz = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(x-z)^2]}{\Delta t}. \quad (4.27)$$

В (4.25) принято, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} O(x-z) f(z, t + \Delta t | x, t) dz = 0.$$

Выражения (4.27) для коэффициентов a_1 и b_1 аналогичны (4.16) и (4.17), но теперь они зависят от x и t .

Интегрируя входящие в (4.26) слагаемые

$$\int_{-\infty}^{\infty} f R' a_1 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f R'' b_1 dx$$

по частям, получаем (при $R(-\infty) = R(\infty) = 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f a_1 R' dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (f a_1) R dx + (f a_1 R) \Big|_{-\infty}^{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (f a_1)}{\partial x} R dx; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f b_1 R'' dx = \int_{-\infty}^{\infty} R \frac{\partial^2 (f b_1)}{\partial x^2} dx. \quad (4.28)$$

Подставив (4.28) в (4.26), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f a_1)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (f b_1)}{\partial x^2} \right] R(x) dx = 0. \quad (4.29)$$

Так как функция $R(x)$ произвольна, тождественное обращение в нуль левой части соотношения (4.29) возможно только при

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f a_1)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (f b_1)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.30)$$

Полученное уравнение (4.30) есть второе уравнение Колмогорова для одномерных процессов, позволяющее определить изменение условной плотности вероятности в будущем при известной плотности вероятности в начальный момент времени.

При исследовании задач статистической динамики и теории случайных колебаний второе уравнение Колмогорова получило наибольшее распространение. По существующей классификации дифференциальных уравнений в частных производных уравнения Колмогорова (4.19) и (4.30) принадлежат к параболическому типу уравнений. Для того чтобы решение уравнения было однозначным, необходимо знать начальные и граничные условия для искомой функции (для плотности вероятности $f(x, t | x_0, t_0)$). Кроме начальных и граничных условий, функция f должна удовлетворять условиям, справедливым для любой плотности вероятностей:

$$f \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, t_0) dx = 1.$$

Возможны два случая начальных условий при $t = t_0$: 1) значения ординаты случайной функции $x = x_0$ являются случайными величинами с известной плотностью вероятности $f(x_0, t_0)$; 2) значение ординаты случайной функции x_0 является заданным (неслучайной величиной).

В первом случае должно выполняться условие

$$f(x, t | x_0, t_0)|_{t=t_0} = f(x_0, t_0). \quad (4.31)$$

Во втором случае, когда x_0 задано,

$$f(x, t | x_0, t_0)|_{t=t_0} = \delta(x - x_0). \quad (4.32)$$

Это условие можно получить следующим образом. При заданном x_0 вероятность того, что возможные значения $x \leq x_0$, равна нулю. Поэтому плотность вероятности при $t = t_0$, которая должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 1,$$

можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x, t_0) dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x, t_0) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x, t_0) dx = 1, \quad (4.33)$$

где ε — малая положительная величина.

Первый и третий интегралы в левой части выражения (4.33) равны нулю, так как они равны вероятностям появления значений x , меньших и больших x_0 . Поэтому

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x, t_0) dx = 1. \quad (4.34)$$

Соотношение (4.34) при $\varepsilon \rightarrow 0$ является одним из условий, определяющих δ -функцию:

$$f(x, t_0) = \delta(x - x_0). \quad (4.35)$$

Если случайная функция $x(t)$ может принимать любые значения в интервале $(-\infty, \infty)$, то в качестве краевых условий следует брать условия на $\pm \infty$.

При нахождении распределений, однородных во времени, функция f и коэффициенты a и b не зависят от t , поэтому уравнение (4.30) принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [b_1(x)f] - \frac{d}{dx} [a_1(x)f] = 0, \quad (4.36)$$

или после интегрирования

$$\frac{d}{dx} [b_1(x)f] - 2a_1(x)f = c. \quad (4.37)$$

Если предположить, что при $x \rightarrow \infty$ f и $\frac{df}{dx}$ стремятся к нулю, то $c = 0$, поэтому решение уравнения (4.36) имеет вид

$$f(x) = c_1 e^{-\int_0^x \left(\frac{b_1 - 2a_1}{b_1} \right) dh}. \quad (4.38)$$

Постоянную интегрирования c_1 найдем из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Приведем несколько примеров решения уравнения (4.30).

Пример 4.1. Рассмотрим частный случай при $a_1(x, t) = 0$ и $b_1(x, t) = b_{10} = \text{const}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} b_{10} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (4.39)$$

Требуется найти решение уравнения (4.39) для интервала изменения x $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющее условиям:

$$1) \quad t = 0, \quad f(x, t | x_0, 0) = \delta(x - x_0);$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, 0) dx = 1; \quad (4.40)$$

$$3) \quad f \geq 0.$$

Решение уравнения (4.39), удовлетворяющее условиям (4.40), имеет вид

$$f(x, t | x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_{10}t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2b_{10}t}}. \quad (4.41)$$

Правую часть (4.41) можно преобразовать к виду

$$f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} m e^{-m^2(x-x_0)^2} \quad (m = \frac{1}{\sqrt{2b_{10}t}}).$$

При $t \rightarrow 0$ $m \rightarrow \infty$, поэтому правая часть (4.41) при $t \rightarrow 0$ есть дельта-функция (приложение 1).

Полученное выражение (4.41) для условной плотности вероятности есть нормальный закон распределения Гаусса, изменяющийся во времени, с математическим ожиданием $m_x = x_0$ и дисперсией $D_x = b_{10}t$.

Рассмотрим случайный процесс, когда он является однородным по координате x , т.е. вероятность перехода из состояния x_0 в состояние x зависит только от разности $x - x_0$.

В этом случае коэффициенты a_1 и b_1 не зависят от x . Поэтому из уравнения (4.30) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a_1(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b_1(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (4.42)$$

Введем новую переменную

$$x_1 = x - \int_0^t \dot{A}(t_1) dt_1; \quad t_2 = \int_0^t B(t_1) dt_1.$$

Тогда уравнение (4.42) преобразуется к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (4.43)$$

Решение уравнения (4.43) аналогично (4.41) (при тех же начальных условиях):

$$f(x, t | x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_1(t)}} e^{-\frac{[x - x_0 - b_1(1)]^2}{2a_1^2(t)}},$$

где

$$a_1(t) = \int_0^t B(t_1) dt_1; \quad b_1(t) = \int_0^t A(t_1) dt_1.$$

Уравнения (4.19) и (4.30) дают возможность исследовать изменение условной плотности распределения во времени, однако для полного решения этих уравнений необходимо в общем случае иметь явную зависимость коэффициентов a_1 и b_1 от переменных x_0 , t_0 для первого уравнения и от x , t — для второго. Так как условные плотности вероятности, определяемые уравнениями (4.19), (4.30), описывают (в вероятностном смысле) состояние какого-то объекта, например механической системы, то должна существовать связь между уравнениями Колмогорова и уравнениями движения системы. Для установления этой зависимости рассмотрим уравнение движения системы первого порядка

$$\dot{x} = F(x) + \varepsilon(t), \quad (4.44)$$

где $\varepsilon(t)$ — случайное возмущение (белый шум) с известными вероятностными характеристиками $m_\varepsilon = 0$, $k_\varepsilon = S_0 \delta(\tau)$. Дисперсия и мощность белого шума равны бесконечности, что противоречит механическим и физическим представлениям о реальных процессах, т.е. дельта-корректированная случайная функция является весьма сильной абстракцией. Тем не менее белый шум (и его свойства) широко используется в теории случайных процессов и, в частности, в теории марковских процессов. Использование белого шума в теоретических исследованиях позволило получить классические результаты в статистической динамике нелинейных систем.

Проинтегрируем уравнение (4.44) в пределах от t до $t + \Delta t$. Тогда

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} F(x) dt_1 + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon dt_1,$$

или, воспользовавшись теоремой о среднем, получим

$$\Delta x = x - z = F(x) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon dt. \quad (4.45)$$

Условное математическое ожидание от обеих частей равенства (4.45)

$$M[x - z] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - z) f(z, t + \Delta t | x, t) dx,$$

или

$$M[x - z] = M[F(x) \Delta t] + M \left[\int_t^{t+\Delta t} \varepsilon(t_1) dt_1 \right]. \quad (4.46)$$

Так как $F(x)$ берется при фиксированном x , то

$$M[x - z] = F(x) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} m_\varepsilon(t_1) dt_1 = F(x) \Delta t. \quad (4.47)$$

Разделив обе части соотношения (4.47) на Δt и перейдя к пределу в (4.27), получим

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{M[x - z]}{\Delta t} = F(x). \quad (4.48)$$

Коэффициент $b_1(x, t)$ найдем, рассмотрев условное математическое ожидание квадрата разности $(x - z)$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(x - z)^2]}{\Delta t^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} M \left[\left(F(x) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon(t_1) dt_1 \right)^2 \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[F^2(x) \Delta t^2 + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} K_\varepsilon(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$K_\varepsilon(t_1, t_2) = K_\varepsilon(t_2 - t_1) = S_0 \delta(t_2 - t_1),$$

то получаем

$$b_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S_0}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = S_0. \quad (4.49)$$

Пример 4.2. На рис. 4.2 показан жидкостный демпфер. На шток поршня действует случайная сила $\varepsilon(t)$. Считая шток и поршень безынерционными, получим уравнение движения поршня $\alpha \dot{x} = \varepsilon(t)$, где α — коэффициент вязкого трения; $\varepsilon(t)$ — случайное стационарное возмущение (сила) с известными вероятностными характеристиками $m_\varepsilon = 0$, $K_\varepsilon = S_0 \delta(\tau)$.

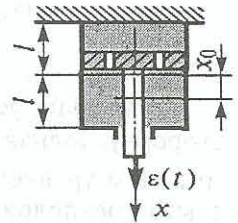


Рис. 4.2

Требуется определить условную плотность вероятности $f(x, t | x_0, 0)$ смещения штока x в произвольный момент времени t , которая при $t = 0$ должна удовлетворять условию

$$f(x, 0 | x_0, 0) = \delta(x - x_0), \quad (4.50)$$

а при произвольном t — условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, 0) dx = 1. \quad (4.51)$$

Условие (4.51) для данной задачи является приближенным, так как смещения поршня ограничены $(-l \leq x \leq l)$. Коэффициенты a_1 и b_1 для данной задачи

$$a_1 = 0,$$

$$b_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\alpha^2} K_\varepsilon(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \frac{S_0}{\alpha^2}. \quad (4.52)$$

Поэтому уравнение для определения условной плотности вероятности имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{S_0}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (4.53)$$

Уравнение (4.53) совпадает с уравнением (4.39).

Воспользовавшись выражением (4.41), получим решение уравнения (4.53):

$$f(x, t | x_0, 0) = \frac{\alpha}{\sqrt{S_0}} \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} e^{-\frac{a^2 (x-x_0)^2}{2S_0 t}} \quad (4.54)$$

Рассмотрим установившийся (стационарный) режим, при котором условная плотность вероятности $f(x, t | x_0, t_0)$ и коэффициенты уравнения (4.30) не зависят от времени. Это равносильно предположению, что при больших промежутках времени, прошедших с начала процесса, условную плотность вероятности можно считать не зависящей от разности $t - t_0$.

В этом случае из уравнения (4.30) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (b_1 f)}{dx^2} - \frac{d}{dx} (a_1 f) = 0. \quad (4.55)$$

Уравнение (4.55) проинтегрируем по x :

$$\frac{d}{dx} (b_1 f) - 2a_1 f = c. \quad (4.56)$$

Было показано (уравнение (4.37)), что $c = 0$.

Из (4.56) при $c = 0$

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{2a_1}{b_1} \right) dx - \frac{db_1}{b_1}. \quad (4.57)$$

Интегрируя (4.57), получаем

$$f(x) = \frac{c_1}{b_1(x)} e^{2 \int \frac{a_1(x)}{b_1(x)} dx}. \quad (4.58)$$

Произвольную постоянную c_1 найдем из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Пример 4.3. На рис. 4.3 показано тело массой m , которое движется горизонтально под действием силы $R_0 + \Delta R$, где R_0 — номинальное значение силы тяги, а ΔR — случайная составляющая. Уравнение движения тела имеет вид

$$m \dot{v} + F(v) = R_0 + \Delta R, \quad (4.59)$$

где v — скорость движения; $F(v)$ — сила сопротивления. Скорость движения тела v из-за разброса тяги ΔR равна $v = v_0 + v_1$, где v_0 — скорость тела при $\Delta R = 0$; v_1 — разброс скорости из-за разброса тяги.

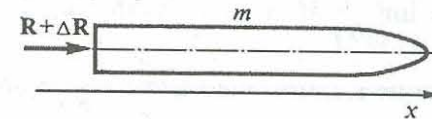


Рис. 4.3

Примем, что случайная функция ΔR представляет собой процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_{\Delta R} = \delta(t - t_1)$. Требуется определить установившееся распределение вероятностей $f(v_1)$ и дисперсию скорости v_1 .

Разложим $F(v)$ в ряд вблизи $v = v_0$, считая, что сила сопротивления ΔF является нечетной функцией от v_1 :

$$F(v) = F(v_0) + \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{v=v_0} v_1 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} \Big|_{v=v_0} v_1^3 \dots \quad (4.60)$$

В результате получаем уравнение

$$\dot{v}_1 + F_1(v_1) = \varepsilon(t) \quad \left(\varepsilon(t) = \frac{\Delta R}{m} \right), \quad (4.61)$$

где

$$F(v_1) = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{v=v_0} v_1 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} \Big|_{v=v_0} v_1^3 \right) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_1^3.$$

Для определения коэффициентов a_1 и b_1 проинтегрируем уравнение движения (4.61) в пределах $t, t + \Delta t$:

$$\Delta v_1 = -F_1 \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon(t) dt.$$

Коэффициенты a_1 и b_1 в соответствии с (4.48) и (4.49):

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[\Delta v_1] = -F_1(v_1);$$

$$b_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[\Delta v_1(t) \Delta v_1(t_1)] = \frac{S_0}{m^2}.$$

Второе уравнение Колмогорова для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 f}{dv_1^2} + \frac{d}{dv_1} [F_1(v_1) f] = 0 \quad \left(\sigma^2 = \frac{S_0}{m^2} \right),$$

или

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{df}{dv_1} + F_1(v_1) f = c. \quad (4.62)$$

Можно считать, что вероятность появления больших значений v_1 мала, поэтому плотность вероятности должна удовлетворять условию $f(v_1)|_{v_1 \rightarrow \infty} = 0$. Если, кроме того, предположить, что производная $f(v_1)$ при $|v_1| \rightarrow \infty$ также равна нулю, то из уравнения (4.62) следует, что $c = 0$. Обоснованием правильности принятых предположений о поведении плотности вероятности и ее производной при больших значениях v_1 может служить полученное решение. Если оно удовлетворяет принятым допущениям, можно считать эти допущения справедливыми.

При $c = 0$ решение уравнения (4.62) имеет вид

$$f = c_1 e^{-\frac{2}{\sigma^2} \int_0^{v_1} F_1(v_1) dv_1}. \quad (4.63)$$

Произвольную постоянную c_1 найдем из условия нормирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dv_1 = 1.$$

Например, в рассматриваемом случае при

$$F_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_1^3$$

имеем

$$f = c_1 e^{-\frac{2}{\sigma^2} \left(\alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + \alpha_2 \frac{v_1^4}{4} \right)}. \quad (4.64)$$

Из (4.64) следует, что f и $\frac{df}{dv_1}$ при $|v_1| \rightarrow \infty$ обращаются в нуль. Так как математическое ожидание $M[v_1]$ равно нулю, то дисперсия

$$D_{v_1} = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2 e^{-\frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{\alpha_1}{2} v_1^2 + \frac{\alpha_2}{4} v_1^4 \right)} dv_1. \quad (4.65)$$

При линейной зависимости силы сопротивления от v_1 , т.е. при $F_1 = \alpha_1 v_1$, распределение плотности вероятности подчиняется нормальному закону (4.64).

Найдем приближенное значение постоянной интегрирования c_1 , полагая

$$e^{-\frac{2\alpha_2}{4\sigma^2} v_1^4} \approx 1 - \frac{\alpha_2}{2\sigma^2} v_1^4. \quad (4.66)$$

Тогда

$$1 = c_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^2} v_1^2} dv_1 - \frac{\alpha_2}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_1^4 e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^2} v_1^2} dv_1 \right]. \quad (4.67)$$

После интегрирования получаем

$$1 = c_1 \left[\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{\alpha_2}{2\sigma^2} \frac{3\sqrt{\pi}\sigma^5}{2\alpha_1^{5/2}} \right],$$

откуда

$$c_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sigma\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \sigma^2 \right)}. \quad (4.68)$$

Приближенное значение дисперсии

$$D_{v_1} = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2 e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^2} v_1^2} \left(1 - \frac{\alpha_2}{2\sigma^2} v_1^4 \right) dv_1 \quad (4.69)$$

после интегрирования принимает вид

$$D_{v_1} = \frac{c_1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\sigma^3}{2(\sqrt{\alpha_1})^3} \left(1 - \frac{15\alpha_2}{\alpha_1^2} \sigma^2 \right). \quad (4.70)$$

Подставив выражение (4.68) в (4.70), получим

$$D_{v_1} = \sigma_{v_1}^2 = \frac{\sigma^2 \left(1 - \frac{15\alpha_2}{\alpha_1^2} \sigma^2 \right)}{2\alpha_1 \left(1 - \frac{3\alpha_2}{4\alpha_1^2} \sigma^2 \right)}. \quad (4.71)$$

§ 4.3. Многомерные марковские процессы

Основные понятия одномерного марковского процесса можно обобщить для случая многомерных процессов. Многомерный процесс является марковским, если закон распределе-

ния системы случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ в момент t , вычисленный при условии, что значения $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ в момент t_0 известны и не зависят от того, какие значения случайные функции $X_i(t)$ имели в предшествующие моменты времени. В этом случае, как и для одномерного марковского процесса, исчерпывающей характеристикой процесса будет двумерная условная плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t | x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0) = f(x, t | x_0, t_0),$$

где x, x_0 — векторы с компонентами x_i и x_{i0} .

Для многомерных процессов уравнение Смолуховского имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, t | x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n, t | z_1, \dots, z_n, \tau) \times \\ \times f(z_1, \dots, z_n, \tau | x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0) dz_1, \dots, dz_n. \end{aligned}$$

Не останавливаясь на выкладках, приведем второе уравнение Колмогорова для многомерных случайных процессов [17, 40]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i f] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij} f] = 0. \quad (4.72)$$

В частном случае для двумерного случайного процесса

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (a_1 f)}{\partial x_1} + \frac{\partial (a_2 f)}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{11} f)}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{22} f)}{\partial x_2^2} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{12} f)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{21} f)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Коэффициенты

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[x_i - z_i] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta x_i]}{\Delta t}; \quad (4.74)$$

$$b_{ij} = b_{ji} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[(x_i - z_i)(x_j - z_j)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta x_i \Delta x_j]}{\Delta t}.$$

Решение уравнений Колмогорова представляет большие трудности (кроме простейших частных случаев). Эти уравнения в частных производных относятся к классу параболических уравнений. Поэтому для получения однозначных решений необходимо знать начальные и граничные условия, которым должна удовлетворять функция A (закон распределения плотности вероятности).

Пример 4.4. Рассмотрим механическую систему, когда силой инерции пренебречь нельзя (рис. 4.4). Движение массы m описывается уравнением второго порядка:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p_0^2 x = \varepsilon(t). \quad (4.75)$$

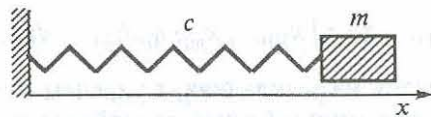


Рис. 4.4

Чтобы полностью описать движение массы m , необходимо знать не только значение x при $t = t_0$, но и значение первой производной $\dot{x}$, а следовательно, и значение x при $t < t_0$ (процесс с последствием). Поэтому воспользоваться одномерным марковским процессом для исследования такой системы нельзя, однако, если уравнение (4.75) представить в виде двух уравнений первого порядка (положив $\dot{x} = x_1$, $x = x_2$)

$$\dot{x}_1 = -2nx_1 - p_0^2 x_2 + \varepsilon(t); \quad (4.76)$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

и рассматривать x_1 и x_2 как координаты точки на фазовой плоскости, то при решении системы уравнений (4.76) могут

быть использованы методы марковских процессов. Процесс с последствием можно свести к процессу без последствия путем увеличения размерности фазового пространства. Если состояние системы, которое описывается, например, дифференциальным уравнением второго порядка, задать двумя координатами x_1 и x_2 в двумерном фазовом пространстве, то будем иметь процесс без последствия. Для определения совместной плотности вероятности $f(x_1, x_2, t) = f(\dot{x}, x, t)$ для уравнения (4.75) надо решить уравнение (4.73) с учетом соответствующих начальных и граничных условий. В общем случае систему уравнений движения механической системы вида

$$\ddot{y} = F_1(y, \dot{y}, t) + \varepsilon_1(t) \quad (4.77)$$

всегда можно представить в виде систем уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t) + \varepsilon_1; \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad (4.78)$$

где $\dot{y} = x_1$; $y = x_2$.

Вводя вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, получаем

$$\dot{x} = F(x, t) + \varepsilon \quad (\varepsilon = (\varepsilon_1, 0)^T), \quad (4.79)$$

или в скалярной форме

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \varepsilon_i(t). \quad (4.80)$$

Следует подчеркнуть, что компоненты $\varepsilon_j(t)$ вектора $\varepsilon(t)$ есть стационарные случайные функции типа нормального белого шума ($m_{\varepsilon_j} = 0$, $K_{\varepsilon_j \varepsilon_i} = S_{0ji} \delta(\tau)$). Только в этом случае система уравнений (4.78) может исследоваться с применением марковских процессов.

Если компоненты вектора ε не являются белым шумом, например, $\varepsilon_i(t)$ независимы и имеют корреляционные функции вида

$$K_{\varepsilon_i}(\tau) = \sigma_i^2 e^{-\alpha_i |\tau|}, \quad (4.81)$$

то функции $\varepsilon_i(t)$ надо представить как процессы, подчиняющиеся линейным дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} + \alpha_i \varepsilon_i = a_i \varepsilon(t), \quad (4.82)$$

где $\varepsilon(t)$ — нормальный белый шум с корреляционной функцией $K_\varepsilon(\tau) = S_0 \delta(\tau)$; a_i — неизвестные коэффициенты.

Из уравнений (4.82) находим спектральные плотности $S_{\varepsilon_i}(\omega)$:

$$S_{\varepsilon_i}(\omega) = \frac{a_i^2 S_0}{(\omega^2 + \alpha_i^2)}. \quad (4.83)$$

Спектральные плотности $S_{\varepsilon_i}(\omega)$ при известных корреляционных функциях $K_{\varepsilon_i}(t)$ (4.81) можно получить из соотношения (3.42) Винера—Хинчина:

$$S_{\varepsilon_i}(\omega) = \frac{\sigma_i^2 \alpha_i}{\pi (\omega^2 + \alpha_i^2)}. \quad (4.84)$$

Приравняв правые части выражений (4.83) и (4.84), находим неизвестные коэффициенты a_i :

$$a_i^2 = \frac{\sigma_i^2 \alpha_i}{\pi S_0}. \quad (4.85)$$

В результате получаем совместную систему уравнений (4.78) и (4.82) первого порядка, содержащую случайную функцию $\varepsilon(t)$ (белый шум), которую можно исследовать методами марковских процессов.

Для определения коэффициентов уравнения (4.72) воспользуемся уравнениями движения (4.80). Проинтегрируем эти уравнения в пределах $(t, t + \Delta t)$:

$$\Delta x_i = \int_t^{t+\Delta t} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon_i(t) dt. \quad (4.86)$$

Применяя теорему о среднем, получаем (аналогично (4.45))

$$\Delta x_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon_i(t) dt. \quad (4.87)$$

Воспользовавшись (4.74) и (4.87), найдем коэффициенты a_i, b_{ij} уравнения (4.72):

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \Delta t] = F_i;$$

$$b_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[F_i F_j \Delta t^2 + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} K_{\varepsilon_j \varepsilon_i}(t_2 - t_1) dt_2 dt_1 \right] = S_{0ji}.$$

Для стационарного режима, при котором условная плотность вероятности f и коэффициенты a_i, b_{ij} не зависят от времени, из (4.72) получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial (a_i f)}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 (b_{ij} f)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (4.88)$$

или для двумерного процесса

$$\begin{aligned} \frac{\partial (a_1 f)}{\partial x_1} + \frac{\partial (a_2 f)}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{11} f)}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{22} f)}{\partial x_2^2} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{12} f)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{21} f)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

§ 4.4. Определение вероятности достижения границ области возможных значений случайной функции

Теория марковских процессов позволяет исследовать задачи, связанные с анализом переходных процессов в механических системах, решение которых методами корреляционной теории получить невозможно. К таким задачам, которые решаются методами марковских процессов, относятся задачи определе-

ния вероятности достижения границ возможных значений случайной функции.

Рассмотрим одномерный случайный процесс. Требуется определить вероятность того, что в течение интервала времени $(t_0, t_0 + t_1)$ для случайной функции $X(t)$ выполняется условие

$$x_1 \leq x(t) \leq x_2. \quad (4.90)$$

Предположим, что задано начальное распределение

$$f(x, t_0) = f_0(x). \quad (4.91)$$

Тогда искомая вероятность

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx. \quad (4.92)$$

Среднее время, в течение которого выполняется условие (4.90), равно $t_{\text{ср}} = t - t_0$. Ограничимся случаем, когда коэффициенты a_1 и b_1 не зависят от времени. Это имеет место, например, если на вход системы действует стационарное случайное возмущение $\varepsilon(t)$ с нулевым математическим ожиданием и $K_\varepsilon = S_0 \delta(\tau)$. Можно принять, что в начальный момент времени ни одна реализация процесса не успела достигнуть границы, поэтому

$$P(t_0) = 1. \quad (4.93)$$

При большом значении времени t любые возможные реализации процесса достигнут границ, т.е. при $t \rightarrow \infty$ $P(\infty) \rightarrow 0$. Внутри области изменения независимых переменных $(x_1 \leq x \leq x_2; t_0 \leq t \leq \infty)$ условная плотность вероятности f изменяется в соответствии с уравнением (4.30):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(a_1 f)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b_1 f)}{\partial x^2}. \quad (4.94)$$

Одна из особенностей данной задачи заключается в том, что область изменения ординат случайной функции x ограничена, что необходимо учесть в формулировке краевых условий.

Вероятность того, что траектория пересекла отрезок $x, x + \Delta x$, ни разу не коснувшись границы в течение времени $t - t_0$, равна

$$\Delta P = f(x, t) \Delta x. \quad (4.95)$$

На границе при $x = x_{1,2}$ и $t > t_0$ такие траектории практически отсутствуют, поэтому $f(x, t)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$f(x_1, t) = f(x_2, t) = 0. \quad (4.96)$$

Граничные условия (4.96) и начальное условие (4.93) однозначно определяют функцию f . Предположим, что решение уравнения (4.94), удовлетворяющее краевым и начальному условиям, найдено. Тогда известна функция $P(t)$ и можно найти P_1 — вероятность того, что $x(t)$ за время $t - t_0$ коснется границы:

$$P_1 = P(t_0) - P(t) = 1 - P(t). \quad (4.97)$$

Дифференцируя выражение (4.97) по t , находим плотность вероятности

$$f_1(t) = -\frac{dP(t)}{dt}. \quad (4.98)$$

Полагая $t = t_0 + t_1$, где t_1 — случайная величина, получаем

$$f(t_1) = -\frac{dP(t_0 + t_1)}{dt_1}. \quad (4.99)$$

Соотношение (4.99) позволяет найти среднее время (m_{t_1}) движения системы до достижения границы ($t_1 > 0$):

$$m_{t_1} = \int_0^\infty t_1 f_1(t_1) dt_1 = - \int_0^\infty t_1 dP(t_0 + t_1). \quad (4.100)$$

Проинтегрировав правую часть выражения (4.100) по частям, получим

$$m_{t_1} = -t_1 P \Big|_{t_1=0}^\infty + \int_0^\infty P(t) dt,$$

или (так как $P(\infty) = 0$)

$$m_{t_1} = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (4.101)$$

Решение уравнения (4.94) при данных краевых и начальных условиях позволяет определить вероятность достижения случайной функцией $X(t)$ границ к фиксированному моменту времени T . Эту вероятность находим из соотношения (4.95):

$$P(T) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, T) dx. \quad (4.102)$$

Пример 4.5. Уравнение движения безынерционного поршня (см. рис. 4.2), на который действуют постоянная сила a и случайная сила $\varepsilon(t)$, имеет вид

$$\alpha \dot{x} = a + \varepsilon(t), \quad (4.103)$$

где $\alpha \dot{x}$ — сила сопротивления. Случайная сила $\varepsilon(t)$ является случайным процессом типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_{\varepsilon} = S_0 \delta(\tau)$. Требуется определить вероятность того, что случайная функция $x(t)$ (смещение поршня) в течение времени T не выйдет за пределы интервала $(-x_0, x_0)$, если при $t = 0$ $x(0) = 0$.

В этом случае коэффициенты $a_1 = a/\alpha$; $b_1 = S_0/\alpha^2$. Уравнение (4.94) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{a}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{S_0}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (4.104)$$

Искомая плотность вероятности $f(x, t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$f(x, 0) = \delta(x). \quad (4.105)$$

Воспользуемся методом Фурье для решения уравнения (4.104):

$$f = X(t) T(x). \quad (4.106)$$

В результате получаем уравнения

$$\frac{dT}{dt} + \lambda^2 T = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{2a\alpha}{S_0} \frac{dX}{dx} + \frac{2\alpha^2 \lambda^2}{S_0} X = 0,$$

решения которых соответственно имеют вид

$$T = c_{(1)} e^{-\lambda^2 t}; \quad (4.107)$$

$$X = e^{\frac{a\alpha}{S_0} x} (c_1 \cos \lambda_1 x + c_2 \sin \lambda_1 x),$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2\alpha^2 \lambda^2}{S_0} - \frac{a^2 \alpha^2}{S_0^2}}. \quad (4.108)$$

Плотность вероятности $f(x, t)$ должна удовлетворять крайним условиям (4.96), поэтому получаем два уравнения для определения c_1 и c_2 :

$$X(x_0) = c_1 \cos \lambda_1 x_0 + c_2 \sin \lambda_1 x_0 = 0; \quad (4.109)$$

$$X(-x_0) = c_1 \cos \lambda_1 x_0 - c_2 \sin \lambda_1 x_0 = 0.$$

Система уравнений (4.109) имеет нетривиальное решение ($c_1 \neq 0$) при $c_2 = 0$ и $\cos \lambda_1 x_0 = 0$, откуда

$$\lambda_{1k} = \frac{(2k+1)}{2} \frac{\pi}{x_0}. \quad (4.110)$$

Из (4.108) находим

$$\lambda_k^2 = \frac{S_0}{2\alpha^2} \left(\frac{(2k+1)^2}{4} \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{a^2 \alpha^2}{S_0^2} \right).$$

Окончательно получаем следующее выражение для решения уравнения (4.104):

$$f(x, t) = e^{\frac{a\alpha}{S_0} x} \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos \frac{(2k+1)}{2} \frac{\pi x}{x_0} e^{-\lambda_k^2 t}). \quad (4.111)$$

В начальный момент времени ($t = t_0 = 0$) полученное выражение (4.111) должно удовлетворять начальному условию (4.105):

$$e^{\frac{a\alpha}{S_0}x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2x_0} \right) = \delta(x),$$

из которого получаем

$$c_R \int_{-x_0}^{x_0} \cos^2 \frac{(2k+1)\pi x}{2x_0} dx = \int_{-x_0}^{x_0} e^{\frac{a\alpha}{S_0}x} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2x_0} \delta(x) dx. \quad (4.112)$$

Из (4.112) следует $c_k = 1/x_0$.

Выражение (4.111) принимает вид

$$f(x, t) = \frac{1}{x_0} e^{\frac{a\alpha}{S_0}x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2x_0} e^{-\lambda_k^2 t} \right). \quad (4.113)$$

Искомая вероятность

$$P(t) = \int_{-x_0}^{x_0} f(x, t) dx = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0}^{x_0} e^{\frac{a\alpha}{S_0}x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda_k^2 T} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2x_0} \right) dx. \quad (4.114)$$

После интегрирования получим соотношение, справедливое для любого фиксированного момента времени $t = T$:

$$P(t) = \frac{2 \operatorname{ch} \frac{a\alpha}{S_0} x_0}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^2 T} (-1)^{2+k} b_k}{\left(\frac{\alpha^2 a^2}{S_0^2} + b_k^2 \right)}, \quad (4.115)$$

где $b_k = \frac{(2k+1)\pi}{2x_0}$.

Как и следовало ожидать, полученное значение для вероятности $P(T)$ не зависит от знака силы a . Обобщением рассмотренного примера является пример, когда границы области возможных значений случайной функции $x(t)$ в начальный

момент времени являются случайными (x_0 — случайные величины) с известным законом распределения, например

$$f(x_0) = \frac{\pi}{4x_0} \cos \frac{\pi x}{2x_0}. \quad (4.116)$$

В этом случае решение (4.111) при $t = 0$ должно удовлетворять условию

$$e^{\frac{a\alpha}{S_0}x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2x_0} \right) = \frac{\pi}{4x_0} \cos \frac{\pi x}{2x_0},$$

которое позволяет определить c_k :

$$c_k = \frac{\pi}{8} \int_{-x_0}^{x_0} e^{\frac{a\alpha}{S_0}x} \left(\cos \frac{k\pi x}{x_0} + \cos \frac{(k+1)\pi x}{x_0} \right) dx. \quad (4.117)$$

Определив коэффициенты c_k , находим $f(x, t)$, а затем вероятность $P(t)$, как в предыдущем случае. Полученное выражение (4.115) позволяет определить среднее время движения поршня без касания торцов цилиндра по формуле (4.100):

$$m_{t_1} = \frac{2 \operatorname{ch} \frac{a\alpha}{S_0} x_0}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2+k} b_k}{\lambda_k^2 \left(\frac{\alpha^2 a^2}{S_0^2} + b_k^2 \right)}. \quad (4.118)$$

Преобразуем выражение (4.118), введя безразмерный параметр $\gamma_1 = \frac{a\alpha}{S_0^2} x_0$ и характерное время t_k . За характерное время принято время t_k , за которое поршень под действием силы a пройдет расстояние, равное x_0 . Так как неслучайное движение безынерционного поршня описывается уравнением

$$\alpha \dot{x} = a,$$

то время t_k равно

$$t_k = \frac{\alpha}{a} x_0.$$

Разделив на t_k выражение (4.118), получим безразмерное среднее время движения поршня без касания торцов:

$$\tilde{m}_{t_1} = \frac{m_{t_1}}{t_k} = 2 \operatorname{ch} \gamma_1 \cdot \pi \gamma_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2+k} (2k+1)}{(\gamma_1^2 + b_{k_0}^2)^2}, \quad (4.119)$$

где

$$b_{k_0} = \frac{(2k+1)}{2}.$$

В примере 4.5 было принято, что сила инерции поршня по сравнению с силой сопротивления мала и ею можно пренебречь.

Рассмотрим механическую систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением первого порядка, аналогичным уравнению (4.44). На рис. 4.5 показан вращающийся вал с диском. На вал действует известный момент M_0 и случайный момент $\varepsilon(t)$. Пренебрегая моментом сопротивления, имеем следующее уравнение вращения диска:

$$J \dot{\omega} = M_0 + \varepsilon(t). \quad (4.120)$$

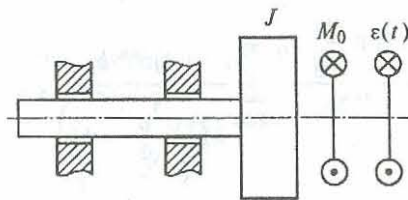


Рис. 4.5

В начальный момент времени угловая скорость равна нулю. Требуется определить среднее время m_{t_1} , при котором угловая скорость достигнет значения ω_0 . В результате для определения среднего времени m_{t_1} получаем выражение, аналогичное (4.120), в котором следует x_0 заменить на ω_0 , а α — на J .

Глава 5. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Теория случайных колебаний механических систем находит все большее применение в практике проектирования почти во всех отраслях промышленности. К таким задачам относят: расчет системы защиты объектов при действии случайных возмущений; анализ вибраций элементов конструкций летательных аппаратов, вызванных, например, действием атмосферной турбулентности; старт летательных аппаратов; движение транспортных средств по дорогам со случайными неровностями и т.д. Теория случайных колебаний позволяет решать задачи, в которых требуется оценивать надежность и ресурс конструкций. Большую роль теория случайных колебаний играет в виброакустической диагностике.

§ 5.1. Свободные случайные колебания линейных систем

Рассмотрим движение детерминированной системы (системы, не содержащей случайных параметров), вызванное случайными начальными отклонениями от положения равновесия.

В реальных условиях реализовать движение механической системы с абсолютно точными значениями начальных условий невозможно, так как всегда имеет место разброс начальных данных. Поэтому реальное движение отличается от расчетного, и возникает необходимость в оценке возможных отклонений движения от расчетного. Задача определения вероятностных характеристик движения — обобщенных координат и их первых производных — при свободных колебаниях, вызванных случайными отклонениями начальных данных, является наиболее простой. Для ее решения достаточно знать линейные преобразования случайных функций, изложенные в § 2.4.

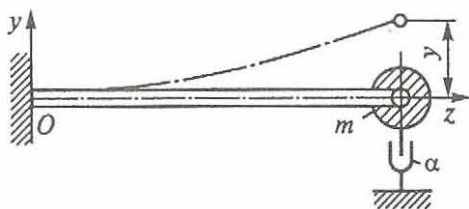


Рис. 5.1

Рассмотрим свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы (рис. 5.1) с учетом силы сопротивления, пропорциональной скорости, которые описываются уравнением

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = 0, \quad (5.1)$$

где $2n = \alpha/m$; $p_0^2 = c/m$.

Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$y = e^{-nt} (c_1 \cos pt + c_2 \sin pt). \quad (5.2)$$

При $t = 0$ $y = y_0$ и $\dot{y} = \dot{y}_0$ (наиболее общий случай). После определения произвольных постоянных c_1 и c_2 получим

$$y = e^{-nt} \left[y_0 \left(\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt \right) + \frac{\dot{y}_0}{p} \sin pt \right]. \quad (5.3)$$

Начальные данные y_0 и $\dot{y}_0$ являются случайными величинами с известными вероятностными характеристиками (известны их математические ожидания m_{y_0} , $m_{\dot{y}_0}$, дисперсии D_{y_0} , $D_{\dot{y}_0}$ и корреляционный момент $K_{y_0 \dot{y}_0}$). Требуется найти вероятностные характеристики y и первых двух производных $\dot{y}$ и $\ddot{y}$.

Дифференцируя (5.3), найдем выражение для скорости и ускорения массы m :

$$\dot{y} = y_0 \dot{f}_1 + \dot{y}_0 \dot{f}_2; \quad \ddot{y} = y_0 \ddot{f}_1 + \dot{y}_0 \ddot{f}_2, \quad (5.4)$$

где

$$f_1 = e^{-nt} (\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt); \quad f_2 = \frac{1}{p} e^{-nt} \sin pt. \quad (5.5)$$

Для решения сформулированной задачи необходимо найти вероятностные характеристики решения, т.е. $m_y(t)$, $D_y(t)$, и автокорреляционную функцию $K_y(t, t_1)$. Воспользовавшись формулой для математического ожидания суммы случайных функций, получим

$$m_y(t) = M[Y] = m_{y_0} e^{-nt} (\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt) + \frac{1}{p} m_{\dot{y}_0} e^{-nt} \sin pt. \quad (5.6)$$

Автокорреляционная функция решения

$$\begin{aligned} K_y = M[Y(t) Y(t_1)] &= D_{y_0} e^{-n(t+t_1)} (\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt) \times \\ &\times (\cos pt_1 + \frac{n}{p} \sin pt_1) + \frac{1}{p} K_{y_0 \dot{y}_0} \left[e^{-n(t+t_1)} (\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt) \times \right. \\ &\times \sin pt_1 + e^{-n(t_1+t)} (\cos pt_1 + \frac{n}{p} \sin pt_1) \sin pt \left. \right] + \\ &+ \frac{D_{\dot{y}_0}}{p^2} \sin pt \sin pt_1 e^{-n(t+t_1)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Дисперсию прогиба получим из выражения (5.7):

$$D_y(t) = D_{y_0} f_1^2 + 2K_{y_0 \dot{y}_0} f_1 f_2 + D_{\dot{y}_0} f_2^2. \quad (5.8)$$

Для некоррелирующих начальных данных ($K_{y_0 \dot{y}_0} = 0$) имеем

$$D_y(t) = D_{y_0} f_1^2 + D_{\dot{y}_0} f_2^2. \quad (5.9)$$

Аналогичный вид имеют выражения для математических ожиданий и автокорреляционных функций первых двух производных решения:

$$\begin{aligned} m_{\dot{y}} &= m_{y_0} \dot{f}_1 + m_{\dot{y}_0} \dot{f}_2, \\ m_{\ddot{y}} &= m_{y_0} \ddot{f}_1 + m_{\dot{y}_0} \ddot{f}_2; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$K_{\dot{y}}(t, t_1) = D_{y_0} \dot{f}_1(t) \dot{f}_1(t_1) + |K_{y_0 \dot{y}_0} [\dot{f}_1(t) \dot{f}_2(t_1) + \dot{f}_1(t_1) \dot{f}_2(t)] + D_{\dot{y}_0} \dot{f}_2(t) \dot{f}_2(t_1), \quad (5.11)$$

$$K_{\ddot{y}}(t, t_1) = D_{y_0} \ddot{f}_1(t) \ddot{f}_1(t_1) + K_{y_0 \ddot{y}_0} [\ddot{f}_1(t) \ddot{f}_2(t_1) + \ddot{f}_1(t_1) \ddot{f}_2(t)] + D_{\ddot{y}_0} \ddot{f}_2(t) \ddot{f}_2(t_1).$$

В отличие от классической теории колебаний при исследовании случайных колебаний систем с одной степенью свободы необходимо иметь две неслучайные функции, характеризующие случайные колебания (как свободные, так и вынужденные), $m_y(t)$ и $K_y(t, t_1)$. Поэтому классическую теорию колебаний можно рассматривать как частный случай теории случайных колебаний, когда выполняются условия

$$D_{y_0} = D_{\dot{y}_0} = K_{y_0 \dot{y}_0} = 0.$$

Какой практически полезный результат можно получить из приведенных вероятностных характеристик решения (5.6)–(5.9)?

Рассмотрим расчетную схему рис. 5.1. Для нормальной работы прибора необходимо, чтобы максимальные нормальные напряжения, возникающие в заделке при случайных колебаниях, не превышали предела текучести материала упругого элемента, т.е.

$$\max(\sigma) \leq \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (5.12)$$

где σ_T — предел текучести; n_T — коэффициент запаса по пределу текучести.

Максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max}$ (в сечении 0) связано с прогибом y соотношением

$$\sigma_{\max} = \frac{3EJ_x}{l^2 w_x} y, \quad (5.13)$$

где E — модуль упругости материала; J_x , w_x — соответственно момент инерции и момент сопротивления сечения стержня.

Математическое ожидание напряжения $\sigma_{\max}$ и дисперсия будут соответственно равны

$$m_{\sigma_{\max}} = am_y(t); \quad (5.14)$$

$$D_{\sigma_{\max}} = a^2 D_y(t) \quad (a = 3EJ_x/l^2 w_x).$$

Считая, что в каждый момент времени для $\sigma_{\max}(t)$ имеет место нормальное распределение, для определения максимального напряжения $\max(\sigma_{\max})$ воспользуемся правилом «трех сигм»:

$$\max(\sigma_{\max}) = am_y(t) + 3a\sigma_y(t) \quad (\sigma_y = \sqrt{D_y}). \quad (5.15)$$

Так как максимальное напряжение зависит от времени, то следует определить такое значение t_* , при котором $\max(\sigma_{\max})$ принимает максимальное значение во времени. После определения t_* получим окончательное условие, выполнение которого гарантирует нормальную работу упругого элемента:

$$\max(\sigma_{\max}) = am_y(t_*) + 3a\sigma_y(t_*) < \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (5.16)$$

К свободным колебаниям можно отнести движение системы после прекращения действия кратковременного случайного импульса (время действия которого много меньше периода собственных колебаний).

Пример 5.1. На рис. 5.2 приведена механическая система с одной степенью свободы, состоящая из абсолютно жесткого тела, часть которого подвергается действию ударной волны. В этом случае на тело действует импульс момента J_M , сообщаящий некоторую начальную угловую скорость (при нулевом начальном угле отклонения), т.е. при $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Импульс момента связан с начальной скоростью соотношением

$$J_M = J_0 \dot{\varphi}_0, \quad (5.17)$$

где J_0 — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку O .

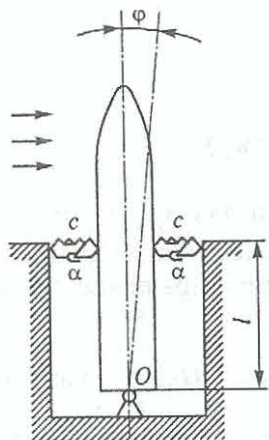


Рис. 5.2

Требуется определить параметры системы амортизации (c и α) из условий: 1) максимальный угол отклонения тела при действии импульса момента не должен превышать допустимого φ_D ; 2) за заданное время t_k амплитуда угловых колебаний тела должна уменьшиться в k раз. Если вероятностные характеристики случайного импульса J_M известны (m_J и D_J), то известны и вероятностные характеристики начальной угловой скорости $\dot{\varphi}_0$ ($m_{\varphi_0} = \frac{m_J}{J_0}$, $D_{\varphi_0} = \frac{D_J}{J_0^2}$).

Уравнение движения тела имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha l^2}{J_0} \dot{\varphi} + \frac{cl^2}{J_0} \varphi = 0. \quad (5.18)$$

Так как $\varphi_0 = 0$, то вероятностные характеристики решения следующие:

$$m_{\varphi} = \frac{m_{\varphi_0}}{p} e^{-nt} \sin pt;$$

$$K_{\varphi} = \frac{D_{\varphi_0}}{p^2} e^{-n(t+t_1)} \sin pt \sin pt_1; \quad (5.19)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi_0}}{p} e^{-nt} \sin pt \quad (p = \sqrt{p_0^2 - n^2}; p_0^2 = \frac{cl^2}{J_0}; n = \frac{\alpha l^2}{2J_0}).$$

Максимальное значение угла φ для любого момента времени (c с использованием правила трех сигм)

$$\varphi_{\max} = m_{\sigma} + 3\sigma_{\varphi} = \frac{(m_J + 3\sigma_J)}{J_0 p} e^{-nt} \sin pt. \quad (5.20)$$

Первый максимум (по времени) функция $\varphi_{\max}$ достигает в момент времени $t_1 = \frac{\pi}{2p}$, поэтому, пренебрегая влиянием сил трения ($e^{-nt} \approx 1$, $p \approx p_0$) на интервале времени $(0, t_1)$ и используя первое условие, получим

$$\varphi_{\max} = \varphi_D = \frac{m_J + 3\sigma_J}{J_0 p_0}. \quad (5.21)$$

Из (5.21) находим

$$c = \frac{(m_J + 3\sigma_J)^2}{J_0 \varphi_D^2 l^2}. \quad (5.22)$$

Полное время (см. второе условие)

$$t_k = t_1 + t_{k_1} \quad (t_{k_1} = \frac{(2k_1 - 1)}{2p} \pi, \quad (k_1 = 1, 2, \dots)).$$

Из выражения (5.20)

$$\varphi_{\max} = \varphi_D k = \frac{(m_J + 3\sigma_J)}{J_0 p} e^{-nt_{k_1}} \sin pt_{k_1}. \quad (5.23)$$

После преобразований из (5.23) получим

$$k \sqrt{1 - n_1^2} = e^{-\frac{(2k_1 - 1)\pi n_1}{\sqrt{1 - n_1^2}}} \quad (n_1 = \frac{n}{p_0}). \quad (5.24)$$

В зависимости от конкретных значений k и k_1 из (5.24) находим n_{1*} — корень уравнения (5.24). Зная n_{1*} , определим оптимальный коэффициент силы вязкого трения в системе амортизации:

$$\alpha_* = \frac{2p_0 J_0 n_{1*}}{l^2}. \quad (5.25)$$

§ 5.2. Вынужденные случайные колебания линейных систем

5.2.1. Нестационарные колебания

Уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы с постоянными параметрами имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = \frac{1}{m} f(t), \quad (5.26)$$

где $f(t)$ — случайная сила.

Для определения вероятностных характеристик решения уравнения (5.26) необходимо иметь вероятностные характеристики входа и вероятностные характеристики начальных данных, т.е. $m_f, K_f, m_{y_0}, m_{\dot{y}_0}, K_{y_0\dot{y}_0}, D_{y_0}, D_{\dot{y}_0}, K_{f y_0}, K_{f \dot{y}_0}$. Ограничимся рассмотрением случая, когда начальные данные и случайная сила f являются независимыми, т.е. $K_{y_0\dot{y}_0} = K_{f y_0} = K_{f \dot{y}_0} = 0$.

Решение уравнения (5.26) для произвольной правой части можно представить в виде

$$y = e^{-nt} \left[y_0 \left(\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt \right) + \frac{\dot{y}_0}{p} \sin pt \right] + \frac{1}{pm} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (5.27)$$

Математическое ожидание и автокорреляционная функция решения

$$m_y = e^{-nt} \left[m_{y_0} \left(\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt \right) + \frac{m_{\dot{y}_0}}{p} \sin pt \right] + \frac{1}{mp} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) m_f d\tau; \quad (5.28)$$

$$K_y(t, t_1) = e^{-n(t+t_1)} \left[D_{y_0} \left(\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt \right) \cdot \left(\cos pt_1 + \frac{n}{p} \sin pt_1 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p^2} D_{\dot{y}_0} \sin pt \sin pt_1 \right] + \frac{1}{m^2 p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) e^{-n(t_1-\tau_1)} \times \\ \times \sin p(t_1-\tau_1) K_f(\tau, \tau_1) d\tau_1 d\tau. \quad (5.29)$$

Дисперсия решения

$$D_y(t) = e^{-2nt} \left[D_{y_0} \left(\cos pt + \frac{n}{p} \sin pt \right)^2 + \frac{1}{p^2} D_{\dot{y}_0} \sin^2 pt \right] + \\ + \frac{1}{m^2 p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-n(t-\tau)} e^{-n(t_1-\tau_1)} \sin p(t-\tau) \sin p(t_1-\tau_1) K_f d\tau_1 d\tau. \quad (5.30)$$

В частном случае, когда $y_0 = \dot{y}_0 = 0$,

$$m_y = \frac{1}{mp} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) m_f(\tau) d\tau; \quad (5.31)$$

$$K_y(t, t_1) = \frac{1}{m^2 p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-n(t-\tau)} e^{-n(t_1-\tau_1)} \times \\ \times \sin(t-\tau) \sin p(t_1-\tau_1) K_f(\tau, \tau_1) d\tau_1 d\tau. \quad (5.32)$$

Рассмотрим частный случай, когда в системе прикладывается случайная постоянная сила, сохраняющая в дальнейшем свое значение, т.е. $f = aH(t)$, где a — случайная величина (сила) с известными вероятностными характеристиками m_a и D_a ; $H(t)$ — функция Хевисайда.

Вероятностные характеристики решения в этом случае имеют вид

$$m_y = \frac{m_a}{mp} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) d\tau; \quad (5.33)$$

$$K_y = \frac{D_a}{m^2 p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-n(t-\tau)} e^{-n(t_1-\tau_1)} \sin p(t-\tau) \sin p(t_1-\tau_1) d\tau d\tau_1. \quad (5.34)$$

После интегрирования получим

$$m_y = \frac{m_a}{m_p} \frac{1}{(p^2 + n^2)} [p(1 - \cos pt e^{-nt}) - n \sin pt e^{-nt}]; \quad (5.35)$$

$$K_y = \frac{D_a}{m^2 p^2} \frac{1}{(p^2 + n^2)^2} [-n \sin pt e^{-nt} + p(1 - \cos pt e^{-nt})] \times \\ \times [-n \sin pt_1 e^{-nt_1} + p(1 - \cos pt_1 e^{-nt_1})]. \quad (5.36)$$

Дисперсия решения

$$D_y = \frac{D_a}{m^2 p^2} \frac{1}{(p^2 + n^2)^2} [-n \sin pt e^{-nt} + p(1 - \cos pt e^{-nt})]^2. \quad (5.37)$$

Если уравнение малых колебаний содержит переменные во времени коэффициенты, то получить решение в аналитической форме, как правило, нельзя. Например, приближенное уравнение малых колебаний двигателя (рис. 5.3), вызванных случайным разбросом тяги ΔR из-за неравномерного горения заряда, имеет вид

$$m(t) \Delta \ddot{x} + \alpha \Delta \dot{x} + c \Delta x = -\Delta R \quad (5.38)$$

или

$$\Delta \ddot{x} + a_1(t) \Delta \dot{x} + a_2(t) \Delta x = f(t), \quad (5.39)$$

где $a_1(t) = \frac{\alpha}{m}$; $a_2(t) = \frac{c}{m}$; $f(t) = -\frac{\Delta R}{m}$.

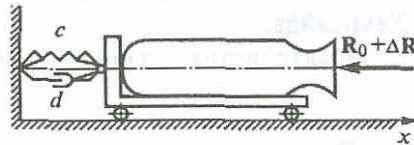


Рис. 5.3

Представим уравнение (5.39) в виде системы двух уравнений первого порядка, положив $\Delta \dot{x} = y_1$; $\Delta x = y_2$:

$$\dot{y}_1 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = f; \quad \dot{y}_2 - y_1 = 0, \quad (5.40)$$

или в векторной форме

$$\dot{y} + A(t) y = f, \quad (5.41)$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение однородного уравнения (5.41)

$$y_0 = K(t) y_{00}, \quad (5.42)$$

где $K(t)$ — фундаментальная матрица решений, удовлетворяющая условию $K(0) = E$ (E — единичная матрица); y_{00} — вектор начальных данных. Элементы матрицы $K(t)$ получить в аналитической форме не всегда удастся, но в этом и нет необходимости при численном решении уравнений.

Найдем общее решение уравнения (5.41), воспользовавшись методом вариаций произвольных постоянных Лагранжа. Считая y_{00} функцией времени, подставим (5.42) в уравнение (5.41):

$$\dot{K} y_{00} + K \dot{y}_{00} + A y_{00} = f. \quad (5.43)$$

Так как y_{00} удовлетворяет однородному уравнению, то из (5.43) получим

$$K \dot{y}_{00} = f, \quad (5.44)$$

откуда

$$y_{00} = \int_0^t K^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + C. \quad (5.45)$$

Общее решение уравнения (5.41) с учетом (5.45)

$$y = K(t) C + \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (5.46)$$

где $G(t, \tau) = K(t) K^{-1}(\tau)$ — матрица Грина.

Основная трудность при численном получении решения в форме (5.46) заключается в определении матрицы $K(t, \tau)$, зависящей от обратной матрицы $K^{-1}(\tau)$, которую при численном счете надо получать на каждом шаге. Для уравнений, решение которых может быть получено в специальных функциях (уравнения Бесселя, Лежандра, Эрмита и т.д.), матрицу $K(t, \tau)$ можно представить в аналитическом виде через специальные функции.

Для уравнений с постоянными коэффициентами матрица Грина зависит от разности аргументов:

$$G(t, \tau) = K(t - \tau).$$

Когда требуется получить решение для фиксированного момента времени ($t = t_k$), матрицу Грина $G(t, \tau)$ можно получить без определения матрицы $K^{-1}(\tau)$.

Продифференцируем тождество $K(\tau) K^{-1}(\tau) = E$:

$$\frac{d}{d\tau} K(\tau) K^{-1}(\tau) + K(\tau) \frac{dK^{-1}(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (5.47)$$

Умножим (5.47) справа на матрицу $K(\tau)$, тогда

$$\dot{K} + K \dot{K}^{-1} K = 0. \quad (5.48)$$

Матрица K удовлетворяет уравнению

$$\dot{K}(\tau) + A(\tau) K(\tau) = 0,$$

поэтому, исключая $\dot{K}$, получаем

$$-AK + K \dot{K}^{-1} K = 0, \quad (5.49)$$

откуда

$$K \dot{K}^{-1} - A = 0. \quad (5.50)$$

Умножим слева уравнение (5.50) на K^{-1} :

$$\dot{K}^{-1}(\tau) - K^{-1}(\tau) A(\tau) = 0. \quad (5.51)$$

Уравнение (5.51) умножим слева на матрицу $K(t_k)$ и преобразуем к виду

$$\frac{d}{d\tau} G(t_k, \tau) - G(t_k, \tau) A(\tau) = 0, \quad (5.52)$$

где $G(t_k, \tau) = K(t_k) K^{-1}(\tau)$.

Отсюда следует, что матрица Грина удовлетворяет матричному уравнению (5.52). К уравнению (5.52) применим операцию сопряжения (транспортирования для матриц с действительными элементами), тогда

$$\frac{dG^*}{d\tau} - (GA)^* = 0, \quad (5.53)$$

или (так как $(GA)^* = A^* G^*$)

$$\frac{dG^*}{d\tau} - A^* G^* = 0. \quad (5.54)$$

Значение матрицы Грина известно при $\tau = t_k$ (так как $G = K(t_k) K^{-1}(\tau)$, то при $\tau = t_k$, $G = E$), поэтому следует перейти к новой независимой переменной $\tau_1 = t_k - \tau$, после чего уравнение (5.54) принимает вид

$$\frac{dG^*}{d\tau_1} + A^*(\tau_1) G^* = 0. \quad (5.55)$$

Так как значение интеграла при фиксированных пределах в выражении (5.46) не зависит от направления интегрирования ($\tau = t_k - \tau_1$), то матрицу $G^*(t_k, \tau_1)$, полученную при решении уравнения (5.55), после операции сопряжения используют при вычислении интеграла (второе слагаемое в (5.46))

$$\int_0^{t_k} G(t_k, \tau) f(\tau) d\tau = - \int_{t_k}^0 G(t_k, \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^{t_k} G(t_k, \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1.$$

Изложенные методы определения решения уравнения (5.41) и матрицы Грина справедливы не только для системы второго порядка (5.40) (на примере которой были проделаны все необ-

ходимые преобразования), но и для систем любого порядка, что будет использовано в дальнейшем при исследовании случайных колебаний систем с n степенями свободы и систем с распределенными параметрами.

При численном счете матрицу $K^*(t_k, \tau)$ можно получить следующим образом. Рассмотрим векторное уравнение вида

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\tau_1} + A^*(\tau_1) \mathbf{b} = 0. \quad (5.56)$$

Решив уравнение (5.56) два раза (или $2n$ раз для системы с n степенями свободы) при следующих начальных условиях:

$$1) \tau_1 = 0; b_1 = 0; b_2 = 0;$$

$$2) \tau_1 = 0; b_1 = 0; b_2 = 1,$$

получим столбцы матрицы G^* или строки матрицы Грина.

В скалярной форме решение (5.46) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= k_{11}c_1 + k_{12}c_2 + \int_0^t g_{11}(t, \tau) f d\tau; \\ y_2 &= k_{21}c_1 + k_{22}c_2 + \int_0^t g_{21}(t, \tau) f d\tau. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Так как при $t = 0$ $y(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, а $K(0) = E$, то произвольные постоянные равны $c_1 = y_{10}$, $c_2 = y_{20}$.

Найдем вероятностные характеристики решения (5.57), считая y_{10} , y_{20} и f независимыми:

$$m_{y_1} = k_{11}m_{y_{10}} + k_{12}m_{y_{20}} + \int_0^t g_{11}(t, \tau) m_f d\tau; \quad (5.58)$$

$$m_{y_2} = k_{21}m_{y_{10}} + k_{22}m_{y_{20}} + \int_0^t g_{21}(t, \tau) m_f d\tau;$$

$$K_{y_1} = D_{y_{10}} k_{11}(t) k_{11}(t_1) + D_{y_{20}} k_{12}(t) k_{12}(t_1) +$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t \int_0^{t_1} g_{11}(t, \tau) g_{11}(t_1, \tau_1) K_f d\tau d\tau_1; \\ K_{y_2} &= D_{y_{20}} k_{21}(t) k_{22}(t_1) + D_{y_{20}} k_{22}(t) k_{22}(t_1) + \\ &+ \int_0^t \int_0^{t_1} g_{21}(t, \tau) g_{21}(t_1, \tau_1) K_f d\tau d\tau_1. \end{aligned} \quad (5.59)$$

В общем случае подсчет интегралов, входящих в выражения (5.59), представляет определенные трудности. Наиболее просто интегралы вычисляются, когда автокорреляционная функция силы может быть представлена в виде произведения двух функций, зависящих только от одного аргумента, т.е.

$$K_f(\tau, \tau_1) = a \varphi(\tau) \varphi(\tau_1). \quad (5.60)$$

Если автокорреляционная функция возмущения имеет вид (5.60), то интегралы, входящие в (5.59), можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^{t_1} g_{ij}(t, \tau) g_{ij}(t_1, \tau_1) K_f(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1 = \\ &= a \int_0^t g_{ij}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \int_0^{t_1} g_{ij}(t_1, \tau_1) \varphi(\tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Рассмотрим несколько примеров случайных нестационарных колебаний системы с одной степенью свободы.

Пример 5.2. На рис. 5.4, а показана мачта с антенной. Антенна находится в сферической «прозрачной» для радиоволн оболочке. Масса антенны считается точечной. Для увеличения жесткости мачты в плоскости ZOY к ней прикреплены два троса натяжением N_0 . В момент времени $t_0 = 0$ на мачту с антенной внезапно подействовал однородный поток воздуха, скорость которого v есть случайная величина. В результате возникнет случайная аэродинамическая сила F , постоянная во времени (рис. 5.4, б). Считаем, что вероятностные характеристики силы

F известны (m_F , D_F). Аэродинамическими силами, действующими на мачту, пренебрегаем. Требуется определить максимально возможный угол γ отклонения луча антенны от заданного направления, приняв, что угол γ подчиняется нормальному закону распределения.

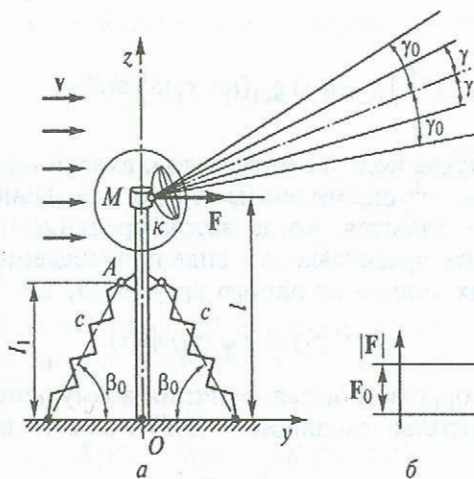


Рис. 5.4

При колебаниях из-за изменения усилий в тросах возникнет сила ΔP , зависящая от перемещения y_A (рис. 5.5, б).

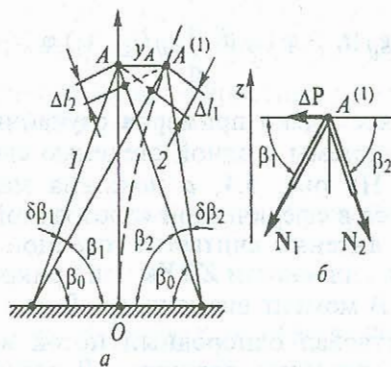


Рис. 5.5

Рассмотрим отклоненное положение мачты (рис. 5.5, а). Изменения усилий в тросах ΔN_1 и ΔN_2 (рис. 5.5, б) зависят от «удлинений» Δl_1 и Δl_2 , т.е. $\Delta N_1 = c \Delta l_1$, $\Delta N_2 = c \Delta l_2$.

Изменения длин тросов равны

$$\Delta l_1 = y_A \cos \beta_1; \quad \Delta l_2 = y_A \cos \beta_2. \quad (5.62)$$

Так как y_A и $\delta \beta_1$ малые величины, то $\Delta l_1 = y_A \cos \beta_0$.

На рис. 5.5, б показаны усилия в тросах N_1 и N_2 . Проецируя N_1 и N_2 на ось y , получаем силу ΔP , которая возникает при колебаниях

$$\Delta P = N_1 \cos \beta_1 - N_2 \cos \beta_2 = (N_0 + c \Delta l_1) \cos (\beta_0 - \delta \beta_1) - (N_0 - c \Delta l_2) \cos (\beta_0 + \delta \beta_2),$$

или

$$\Delta P = 2y_A c \cos^2 \beta_0 + N_0 \sin \beta_0 \delta \beta_1 + N_0 \sin \beta_0 \delta \beta_2. \quad (5.63)$$

Из рис. 5.5, а следует

$$l \delta \beta_1 = y_A \sin \beta_1; \quad l \delta \beta_2 = y_A \sin \beta_2.$$

Исключая из (5.63) $\delta \beta_1$ и $\delta \beta_2$, получаем

$$\Delta P = 2y_A c \cos^2 \beta_0 + \frac{N_0}{l} \sin^2 \beta_0 y_A = c_1 y_A. \quad (5.64)$$

Воспользовавшись методом сил, получим уравнения малых колебаний мачты с антенной (см. рис. 5.4, а) (без учета диссипативных сил):

$$y = \delta_{11}(-M \ddot{y} + F) + \delta_{12} \Delta P_1 \quad (\Delta P_1 = -\Delta P); \quad (5.65)$$

$$y_A = \delta_{21}(-M \ddot{y} + F) + \delta_{22} \Delta P_1.$$

Исключая из системы (5.65) y_A ($\Delta P_1 = -c_1 y_A$), после преобразований получаем уравнение

$$\ddot{y} + p_0^2 y = \frac{F}{M}, \quad (5.66)$$

где

$$p_0^2 = \frac{(1 + c_1 \delta_{22})}{M [\delta_{22} + c_1 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21})]}.$$

Решение уравнения (5.66) при нулевых начальных данных имеет вид

$$y = \frac{1}{p_0} \int_0^t \sin p_0(t - \tau) \frac{F}{M} d\tau = \frac{1}{p_0^2} (1 - \cos p_0 t) \frac{F}{M}. \quad (5.67)$$

Угол поворота массы M (угол γ) можно получить, воспользовавшись методом сил:

$$\gamma = \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Delta P^{(1)} l_1^2}{2} + \frac{(J + F) l^2}{2} \right],$$

или

$$\gamma = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{c_1 y_A l_1^2}{2} + \frac{(-M \ddot{y} + F) l^2}{2} \right]. \quad (5.68)$$

Исключая из (5.68) y_A и $\ddot{y}$, после преобразований получаем

$$\gamma = \frac{a}{EJ} (-\cos p_0 t + 1) F \left(a = -\frac{c_1 l_1^2 \delta_{21}}{2(1 + c_1 \delta_{22})} + \frac{l^2}{2} \right),$$

где EJ — изгибная жесткость мачты.

Находим математическое ожидание и дисперсию угла γ :

$$m_\gamma = \frac{a}{EJ} (1 - \cos p_0 t) m_F; \quad (5.69)$$

$$D_\gamma = \frac{a^2}{EJ^2} (1 - \cos p_0 t) D_F.$$

Максимально возможное отклонение угла γ равно

$$\max \gamma = m_\gamma + 3\sigma_\gamma = \frac{a}{EJ} (1 - \cos p_0 t) (m_F + 3\sigma_F). \quad (5.70)$$

Найдем максимальное значение $\max \gamma$ во времени. Дифференцируя (5.70) по t , получаем

$$\frac{d(\max \gamma)}{dt} = \frac{a(m_F + 3\sigma_F)}{EJ} p_0 \sin p_0 t = 0.$$

Максимальное значение достигается в момент времени

$$t_* = \frac{\pi}{p_0}:$$

$$\max(\max \gamma) = 2 \frac{a}{EJ} (m_F + 3\sigma_F). \quad (5.71)$$

Определив максимальное значение угла γ при возникающих случайных колебаниях мачты с антенной, можно проверить выполнение условия безотказной работы антенны

$$\max(\max \gamma) < \gamma_0, \quad (5.72)$$

где γ_0 — допустимое значение угла отклонения луча антенны.

Пример 5.3. На рис. 5.6, а показан механизм подъема. Масса m укрепленна на конце растяжимого троса. При подъеме (барабан вращается с постоянной угловой скоростью ω_0) из-за случайного изменения силы трения между массой m и направляющими возникают продольные колебания массы m , которые приведут к появлению динамического натяжения троса ΔN , что необходимо учитывать при расчете троса на прочность и долговечность. Считая, что случайное динамическое натяжение распределено нормально, найдем максимально возможное натяжение по формуле (при $m_{\Delta N} = 0$)

$$N_{\max} = mg + 3\sigma_{\Delta N}, \quad (5.73)$$

где $\sigma_{\Delta N}$ — среднее квадратическое значение случайного динамического натяжения. Можно считать, что сила трения между массой m и направляющими является силой сухого трения. С учетом случайного разброса сила сухого трения равна

$$F_T = F_{T0} \operatorname{sign} v - \Delta F_T, \quad (5.74)$$

где ΔF_T — случайная составляющая силы трения; v — скорость движения груза,

$$v = v_0 + \Delta \dot{x} \quad (v_0 = \omega_0 r = \text{const}),$$

где Δx — удлинение троса при колебаниях груза.

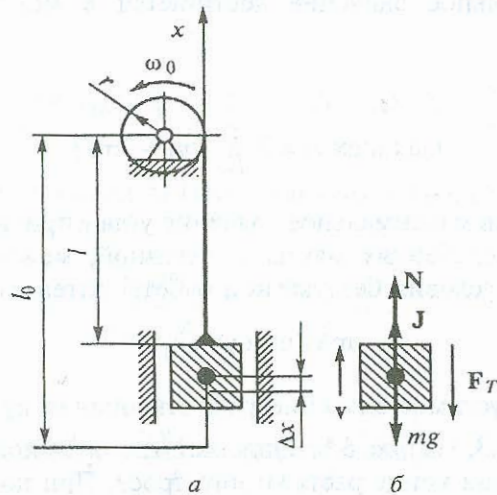


Рис. 5.6

Приняв скорость v_0 больше максимально возможной случайной скорости $\Delta \dot{x}$ (поэтому $\text{sign } \omega = 1$), запишем

$$F_T = F_{T0} - \Delta F_T.$$

Воспользовавшись принципом Даламбера, получим (рис. 5.6, б) уравнение

$$J - mg + N - F_T = 0. \quad (5.75)$$

Так как

$$J = -m\ddot{x}; \quad N = N_0 + \Delta N;$$

$$N_0 = mg + F_{T0}; \quad \Delta N = -\Delta x EF,$$

из (5.75) получаем уравнение малых колебаний массы

$$m \Delta \ddot{x} + \frac{EF}{l} \Delta x = \Delta F_T. \quad (5.76)$$

При определении длины троса l можно пренебречь удлинением, вызванным колебаниями груза, т.е. можно положить $l = l_0 - v_0 t$.

Уравнение (5.76) малых колебаний массы принимает вид

$$\Delta \ddot{x} + \frac{EF}{l_0 \left(1 - \frac{v_0}{l_0} t\right) m} \Delta x = \frac{\Delta F_T}{m}. \quad (5.77)$$

Заменой аргумента t на

$$t_1 = 2 \sqrt{\frac{EF l_0 \left(1 - \frac{v_0}{l_0} t\right)}{m v_0^2}} = a \sqrt{1 - \frac{v_0}{l_0} t}$$

уравнение (5.77) приводится к уравнению Бесселя.

Решение однородного уравнения Бесселя можно представить в аналитической форме записи через функции Бесселя:

$$\Delta x = c_1 t_1 J_1(t_1) + c_2 t_1 Y_1(t_1); \quad (5.78)$$

$$\Delta \dot{x} = -[c_1 J_0(t_1) + c_2 Y_0(t_1)] \frac{2EF}{v_0 m},$$

или, возвращаясь к аргументу t , получаем

$$\Delta \dot{x} = c_1 f_{11}(t) + c_2 f_{12}(t); \quad (5.79)$$

$$\Delta x = c_1 f_{21}(t) + c_2 f_{22}(t).$$

Матрица Грина для данного случая

$$K(t, \tau) = \begin{bmatrix} \frac{f_{11}(t)f_{22}(\tau) - f_{12}(t)f_{21}(\tau)}{D} & \frac{f_{12}(t)f_{11}(\tau) - f_{11}(t)f_{12}(\tau)}{D} \\ \frac{f_{21}(t)f_{22}(\tau) - f_{22}(t)f_{21}(\tau)}{D} & \frac{f_{22}(t)f_{11}(\tau) - f_{21}(t)f_{12}(\tau)}{D} \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

где $D = f_{11}(\tau)f_{22}(\tau) - f_{12}(\tau)f_{21}(\tau)$.

Решение уравнения (5.77) при нулевых начальных данных имеет вид

$$\Delta \dot{x} = \int_0^t \frac{[f_{11}(t)f_{22}(\tau) - f_{12}(t)f_{21}(\tau)] \Delta F_T}{Dm} d\tau; \quad (5.81)$$

$$\Delta x = \int_0^t \frac{[f_{21}(t)f_{22}(\tau) - f_{22}(t)f_{21}(\tau)] \Delta F_T}{Dm} d\tau. \quad (5.82)$$

Экспериментальные исследования показывают, что случайный разброс силы сухого трения можно представить в виде процесса, показанного на рис. 5.7. Случайную составляющую силы трения ΔF_T можно приближенно рассматривать как стационарную случайную функцию, ограниченную по модулю со случайными моментами времени изменения знака. Одна из реализаций такого процесса показана на рис. 5.7. Для полной характеристики процесса нужно знать еще распределение точек перехода через нуль (распределение нулей), т.е. вероятность $P(n, \tau)$, где n — число нулей на интервале времени τ (n — случайная величина).

Представленный на рис. 5.7 график изменения $\Delta F_T(t)$ во времени является идеализированным, так как мгновенное изменение силы трения (случайной составляющей) на конечную величину невозможно, однако идеализация позволяет воспользоваться законом распределения Пуассона (см. § 1.4)

$$P(n, \tau) = \frac{(\mu\tau)^n}{n!} e^{-\mu\tau}, \quad (5.83)$$

где μ — средняя частота нулей, приходящаяся на единицу временного интервала.

Математическое ожидание (параметр a) можно выразить через μ и время t , полагая $a = \mu t$, что и сделано в выражении (5.83).

Сечение случайной функции $\Delta F_T(t)$ имеет закон распределения, представленный рядом

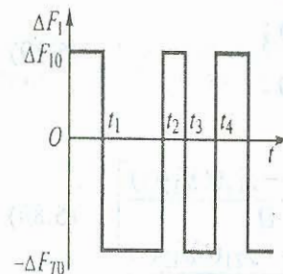


Рис. 5.7

$$\Delta F_i(t) \dots -\Delta F_{T0}; +\Delta F_{T0}$$

$$P_i(t) \dots \frac{1}{2}; \frac{1}{2}.$$

Так как моменты перемен знака функции ΔF_T никак не связаны со значением случайной функции, то нет основания считать какое-либо из значений $+\Delta F_{T0}$, $-\Delta F_{T0}$ наиболее вероятным, поэтому

$$m_{\Delta F} = +\frac{1}{2} \Delta F_{T0} - \frac{1}{2} \Delta F_{T0} = 0;$$

$$D_{\Delta F} = (-\Delta F_{T0})^2 \frac{1}{2} + \Delta F_{T0}^2 \frac{1}{2} = \Delta F_{T0}^2. \quad (5.84)$$

Найдем корреляционную функцию, воспользовавшись ее определением (см. § 2.2):

$$K_{\Delta F_T}(t, t_1) = M[\Delta F_T(t) \Delta F_T(t_1)]. \quad (5.85)$$

Произведение $\Delta F_T(t) \Delta F_T(t_1)$ равно -1 , если между моментами времени произошло нечетное число перемен знака, и $+1$, — если четное. Вероятность того, что за время $\tau = t_1 - t$ произойдет четное число перемен знака,

$$P_{\text{ч}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu\tau)^{2m}}{(2m)!} e^{-\mu\tau} = e^{-\mu\tau} \frac{e^{\mu\tau} + e^{-\mu\tau}}{2}. \quad (5.86)$$

Вероятность того, что за время τ произойдет нечетное число перемен знака,

$$P_{\text{н}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu\tau)^{2m+1}}{(2m+1)!} e^{-\mu\tau} = e^{-\mu\tau} \frac{e^{\mu\tau} - e^{-\mu\tau}}{2}. \quad (5.87)$$

Зная $P_{\text{ч}}$ и $P_{\text{н}}$, найдем

$$K_{\Delta F_T}(t, t_1) = \Delta F_{T0}^2 P_{\text{ч}} - \Delta F_{T0}^2 P_{\text{н}} = e^{-2\mu\tau} \Delta F_{T0}^2. \quad (5.88)$$

Полученное выражение справедливо для $t_1 > t$. Аналогично при $t_1 < t$ получим

$$K_{\Delta F_T}(t, t_1) = \Delta F_{T0}^2 e^{-2\mu(\tau)}. \quad (5.89)$$

Объединим (5.88) и (5.89), тогда

$$K_{\Delta F_T}(t, t_1) = \Delta F_{T0}^2 e^{-2\mu|\tau|}. \quad (5.90)$$

Корреляционная функция решения

$$K_{\Delta x} = \int_0^t \int_0^{t_1} k_{21}(t, \tau) k_{21}(t_1, \tau_1) \Delta F_{T0}^2 e^{-2\mu|\tau|} d\tau d\tau_1 \quad (\varepsilon = \tau - \tau_1). \quad (5.91)$$

Дисперсия случайного натяжения

$$D_{\Delta N} = \left(\frac{FF}{l} \right)^2 \int_0^t \int_0^t k_{21}(t, \tau) k_{21}(t, \tau) \Delta F_{T0}^2 e^{-2\mu|\tau|} d\tau d\tau_1. \quad (5.92)$$

Проинтегрировать правую часть выражения (5.92) можно только численно, но при этом надо знать значение коэффициента μ (средняя частота нулей), который может быть определен только экспериментально. Поэтому найдем максимальное значение $\sigma_{\Delta N}$ (или $D_{\Delta N}$). Из выражения для $D_{\Delta N}$ следует, что максимальное значение $D_{\Delta N}^*$ будет при $e^{-2\mu|\varepsilon|} = 1$, что соответствует предельному случаю $\mu = 0$. Для этого предельного случая

$$D_{\Delta N} < D_{\Delta N}^* = \left(\frac{EN}{l} \Delta F_{T0} \right)^2 \left(\int_0^t k_{21}(t, \tau) d\tau \right)^2. \quad (5.93)$$

В результате вычислений получаем верхнюю границу возможных максимальных значений натяжения в тросе, приняв, что ΔN_* имеет нормальное распределение:

$$N_{\max} = mg + 3\sigma_{\Delta N}.$$

Рассмотрим нестационарные колебания массы m (уравнение (5.26)) при стационарной случайной силе типа белого шума:

$$K_f(\tau) = s_0 \delta(\tau - \tau_1), \quad (5.94)$$

где s_0 — интенсивность (спектральная плотность) стационарного белого шума.

Белый шум (5.94) является случайной функцией, значения которой при $\tau \neq \tau_1$ не коррелированы. Физически условие о некоррелированности двух значений случайной функции для сколь угодно малого интервала времени эквивалентно условию об абсолютной безынерционности процесса, что, конечно, неверно. Любой реальный физический процесс инерционен, поэтому значения случайной функции, характеризующей процесс, в данный момент времени частично определяют и ее значения в близкие моменты времени.

Любые физические величины, в том числе и время, измеряют с определенной погрешностью; все значения рассматриваемой величины, разность между которыми меньше погрешности, считают совпадающими. Поэтому практически случайную функцию можно считать белым шумом, если корреляция между ее значениями распространяется только на интервалы изменения аргумента меньше минимально различимого при принятой точности измерений. В качестве характерного интервала времени может быть взят шаг интегрирования $h = \Delta t$. Корреляционную функцию стационарной случайной функции можно представить в виде

$$K_f(\tau) = D_f \varphi(\tau), \quad (5.95)$$

где $\varphi(\tau)$ — убывающая функция аргумента τ ($\varphi(0) = 1$ при $\tau = 0$).

Относительное изменение корреляционной функции в пределах шага интегрирования

$$\Delta = \frac{K_f(h)}{D_f} = \varphi(h). \quad (5.96)$$

Если при принятой точности решения можно положить $\Delta \approx 0$, то случайную функцию $f(t)$ можно считать белым шумом.

При приближенных расчетах, когда время процесса много больше интервала корреляции, случайную функцию можно

приближенно считать белым шумом, интенсивность которого (частный случай формулы Винера-Хинчина при $\omega = 0$)

$$s_0 = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) d\tau,$$

где $K_f(\tau)$ — реальная корреляционная функция, отличная от δ -функции. Например, если

$$K_f = D_f e^{-a|\tau|}, \quad (5.97)$$

то интенсивность «реального» белого шума

$$s_0 = D_f \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} d\tau = \frac{2D_f}{a}.$$

Найдем корреляционную функцию K_y для случая, когда K_f определяется выражением (5.94):

$$K_y = \frac{1}{m^2 p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) s_0 \delta(\tau-\tau_1) d\tau d\tau_1, \quad (5.98)$$

или

$$\begin{aligned} K_y &= \frac{s_0}{m^2 p^2} \int_0^t k(t-\tau) \left[\int_0^{t_1} k(t_1-\tau_1) \delta(\tau-\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau = \\ &= \frac{s_0}{m^2 p^2} \int_0^t k(t-\tau) k(t_1-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.99)$$

где

$$k(t-\tau) = e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau);$$

$$k(t_1-\tau) = e^{-n(t_1-\tau)} \sin p(t_1-\tau).$$

Дисперсия решения

$$D_y(t) = \frac{s_0}{m^2 p^2} \int_0^t k^2(t-\tau) d\tau. \quad (5.100)$$

5.2.2. Стационарные вынужденные колебания

Если линейное уравнение малых колебаний системы с одной степенью свободы имеет постоянные коэффициенты и решение однородного уравнения асимптотически устойчиво, то в такой системе возможны случайные стационарные колебания (при случайной стационарной правой части).

Рассмотрим стационарные случайные колебания систем с одной степенью свободы. Если движение системы описывается линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, однородная часть которых имеет асимптотически устойчивые решения, то возможен режим стационарных колебаний (при стационарной правой части).

Для стационарной случайной функции f (уравнение (5.26)), зная ее корреляционную функцию $K_f(\tau)$, можно найти спектральную плотность:

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (5.101)$$

В § 3.6 было показано, что спектральная плотность входа связана со спектральной плотностью выхода соотношением

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (5.102)$$

где

$$|W(i\omega)| = \left| \frac{1}{m[(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2]} \right|.$$

По спектральной плотности выхода $S_y(\omega)$ можно найти корреляционную функцию выхода и дисперсию:

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) \cos \omega \tau d\omega =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2} \right|^2 S_f(\omega) \cos \omega \tau d\tau; \quad (5.103)$$

$$D_y = \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2} \right|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (5.104)$$

В частном случае, когда случайное возмущение можно приближенно считать белым шумом ($S_f(\omega) = S_0 = \text{const}$), получаем

$$K_y(\tau) = \frac{S_0}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2} \right|^2 \cos \omega \tau d\tau; \quad (5.105)$$

$$D_y = \frac{S_0}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2} \right|^2 d\omega. \quad (5.106)$$

Интегралы, входящие в выражения (5.104) и (5.106), можно представить в виде (3.87):

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{|A(i\omega)|^2} d\omega. \quad (5.107)$$

Значения интегралов J_n приведены в приложении 2. Если, например,

$$K_f(\tau) = D_f e^{-\alpha|\tau|},$$

то спектральная плотность равна

$$S_f(\omega) = D_f \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{2\alpha D_f}{|\alpha + i\omega|^2}.$$

Воспользовавшись (5.104), получаем

$$D_y = \frac{2\alpha D_f}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(i\omega)^2 + 2i\omega n + p_0^2} \right|^2 \frac{d\omega}{|\alpha + i\omega|^2},$$

или

$$D_y = \frac{2D_f \alpha}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|(i\omega)^3 + (2n + \alpha)(i\omega)^2 + (p_0^2 + 2n\alpha)i\omega + p_0^2 \alpha|^2}. \quad (5.108)$$

Интеграл в выражении (5.108) является частным случаем интеграла (5.107) при $G(i\omega) = 1$. Воспользовавшись приложением 2, получим

$$D_y = \frac{D_f}{m^2} \frac{(2n + \alpha)}{n(p_0^2 + 2n\alpha + \alpha^2)p_0^2}. \quad (5.109)$$

Дисперсии первой и второй производной решения

$$D_{\dot{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 \omega^2 S_f(\omega) d\omega,$$

или

$$D_{\dot{y}} = \frac{2D_f \alpha}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(i\omega)^2 d\omega}{|(i\omega)^3 + (2n + \alpha)(i\omega)^2 + (p_0^2 + 2n\alpha)i\omega + p_0^2 \alpha|^2}; \quad (5.110)$$

$$D_{\ddot{y}} = \frac{2D_f \alpha}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(i\omega)^4 d\omega}{|(i\omega)^3 + (2n + \alpha)(i\omega)^2 + (p_0^2 + 2n\alpha)i\omega + p_0^2 \alpha|^2}. \quad (5.111)$$

Воспользовавшись значением J_3 (приложение 2), получим

$$D_{\dot{y}} = \frac{D_f \alpha}{m^2} \frac{\pi}{n(p_0^2 + 2n\alpha + \alpha^2)}; \quad (5.112)$$

$$D_{\ddot{y}} = \frac{D_f \alpha}{m^2} \frac{\pi(p_0^2 + 2n\alpha)}{n(p_0^2 + 2n\alpha + \alpha^2)}.$$

Пример 5.4. Для определения горизонтального ускорения на борту ускоренно движущегося тела массой m (рис. 5.8) находится акселерометр массой m_1 . Тело движется под действием силы R , имеющей стационарную случайную составляющую $\Delta R(t)$ с известной корреляционной функцией ($m_{\Delta R} = 0$):

$$K_{\Delta R}(\tau) = D_{\Delta R} e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right). \quad (5.113)$$

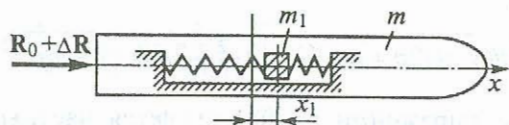


Рис. 5.8

Требуется определить дисперсию смещения массы m_1 , вызванного случайной составляющей силы R . Уравнение случайных колебаний массы m_1 имеет вид

$$\Delta \ddot{x}_1 + 2n \Delta \dot{x}_1 + p_0^2 \Delta x_1 = k \Delta R \quad (k = \frac{1}{m}), \quad (5.114)$$

где Δx_1 — случайное относительное смещение массы m_1 , вызванное действием ΔR .

Спектральная плотность разброса тяги

$$S_{\Delta R}(\omega) = D_{\Delta R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right) \cos \omega \tau d\tau. \quad (5.115)$$

После интегрирования получим

$$S_{\Delta R}(\omega) = 4D_{\Delta R} \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (5.116)$$

Выражение (5.116) можно представить в виде

$$S_{\Delta R}(\omega) = \frac{4D_{\Delta R} \alpha (\alpha^2 + \beta^2)}{|(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + \alpha^2 + \beta^2|^2}. \quad (5.117)$$

Спектральная плотность смещения Δx_1

$$S_{\Delta x_1}(\omega) = \frac{4k^2 D_{\Delta R} \alpha (\alpha^2 + \beta^2)}{|(i\omega)^2 + 2n i\omega + p_0^2|^2 |(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + \alpha^2 + \beta^2|^2}. \quad (5.118)$$

Дисперсия случайного смещения

$$D_{\Delta x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4k^2 D_{\Delta R} \alpha (\alpha^2 + \beta^2) d\omega}{|A(i\omega)|^2},$$

где

$$\begin{aligned} |A(i\omega)|^2 &= |(i\omega)^4 + 2(\alpha + n)(i\omega)^3 + (\alpha^2 + \beta^2 + 4n\alpha + p_0^2)(i\omega)^2 + \\ &+ [2n(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha p_0^2](i\omega) + p_0^2(\alpha^2 + \beta^2)|^2 = \\ &= |\alpha_0(i\omega)^4 + \alpha_1(i\omega)^3 + \alpha_2(i\omega)^2 + \alpha_3(i\omega) + \alpha_4|^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись приложением 2, получаем

$$D_{\Delta x_1} = \frac{4k^2 D_{\Delta R} \alpha (\alpha^2 + \beta^2) \pi}{p_0^2 (\alpha^2 + \beta^2) (a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}.$$

Считая, что Δx_1 имеет нормальное распределение, можно оценить максимально возможную ошибку показаний акселерометра ($m_{\Delta x_1} = 0$):

$$\Delta = 3\sigma_{\Delta x_1}.$$

Рассмотрим стационарные колебания массы m , вызванные стационарной силой $f(t)$ с известной спектральной плотностью $S_f(m_f = 0)$ (рис. 5.9). Найдем максимально возможное значение нормального напряжения σ_m , возникающего в сечении стержня при $z = 0$, считая, что σ_m имеет нормальное распределение. Наиболее просто уравнение малых колебаний массы m с учетом демпфирующего устройства можно получить, воспользовавшись методом сил, использующим принцип суперпозиции.

По методу сил перемещение масс G и m равно сумме перемещений от каждой из сил, приложенных к системе, т.е.

$$y = \delta_{11}(J + f) + \delta_{12}N \quad (J = -m\ddot{y}); \quad (5.119)$$

$$y_k = \delta_{21}(J + f) + \delta_{22}N,$$

где δ_{ij} — податливости системы; N — сила вязкого сопротивления, $N = -\alpha \dot{y}_k$.

Метод сил является одним из наиболее эффективных методов вывода уравнений малых колебаний (когда возникающие в упругих элементах напряжения удовлетворяют закону Гука). Например, получить уравнения малых колебаний для механи-

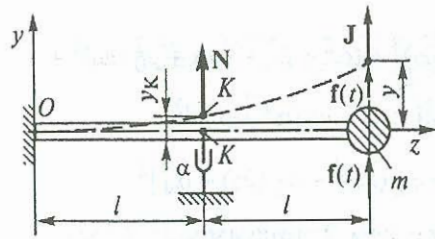


Рис. 5.9

на рис. 5.9, относится к системам с дробным числом степеней свободы. Система уравнений (5.119) имеет третий порядок.

Получим изображения уравнений (5.119) в частотной области:

$$Y(i\omega) = -\delta_{11}m(i\omega)^2 Y(i\omega) - \delta_{12}\alpha(i\omega) Y_k(i\omega) + \delta_{11}f_0(i\omega); \quad (5.120)$$

$$Y_k(i\omega) = -\delta_{21}m(i\omega)^2 Y(i\omega) - \delta_{22}\alpha(i\omega) Y_k(i\omega) + \delta_{21}f_0(i\omega).$$

Из алгебраической системы уравнений (5.120) находим изображения Y и Y_k в частотной области:

$$\begin{aligned} Y(i\omega) &= W_1(i\omega)f_0(i\omega); \\ Y(i\omega) &= W_2(i\omega)f_0(i\omega), \end{aligned} \quad (5.121)$$

где

$$W_1(i\omega) = \frac{\delta_{11} + \alpha(i\omega)(\delta_{11}\delta_{12} - \delta_{12}\delta_{21})}{\Delta};$$

$$W_2(i\omega) = \frac{\delta_{21}}{\Delta};$$

$$\Delta = (1 + \delta_{11}m(i\omega)^2)(1 + \delta_{22}\alpha(i\omega)) - \delta_{12}\delta_{21}\alpha^2(i\omega)^3.$$

Максимальное нормальное напряжение в стержне при $z = 0$ равно

ческой системы, приведенной на рис. 5.9, воспользовавшись уравнениями Лагранжа второго рода, очень сложно.

Интересной особенностью данной задачи является то, что для системы с одной степенью свободы получено два дифференциальных уравнения. Дело в том, что механическая система, показанная на рис. 5.9, относится к системам с дробным числом степеней свободы.

где M — изгибающий момент; W — момент сопротивления сечения.

Изгибающий момент равен

$$M(t) = 2l(J + f) + Nl,$$

или

$$M = -2lm\ddot{y} + 2lf - \alpha\dot{y}_k l. \quad (5.123)$$

Перейдя к изображению (5.123) в частотной области, получим

$$M_0(i\omega) = -2lm(i\omega)^2 Y(i\omega) - \alpha l(i\omega) Y_k(i\omega) + 2lf_0(i\omega). \quad (5.124)$$

Исключив из (5.124) $Y(i\omega)$ и $Y_k(i\omega)$, имеем

$$M_0(i\omega) = W_3(i\omega)f_0(i\omega), \quad (5.125)$$

где

$$W_3(i\omega) = \frac{[2\Delta - \alpha(i\omega)\delta_{22} - 2m(i\omega)^2(\delta_{11} + \alpha(i\omega)(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}))]}{\Delta} l.$$

Так как

$$\sigma_{m_0}(i\omega) = \frac{1}{W} M_0(i\omega) = \frac{1}{W} W_3(i\omega)f_0(i\omega),$$

то спектральная плотность максимального напряжения и дисперсия равны

$$\begin{aligned} S_{\sigma_m}(i\omega) &= \frac{1}{W^2} |W_3(i\omega)|^2 S_R(\omega); \\ D_{\sigma_m} &= \frac{1}{W^2} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Максимально возможное значение σ_m

$$\max \sigma_m = 3\sqrt{D_{\sigma_m}}.$$

§ 5.3. Колебания, вызванные случайным кинематическим возбуждением

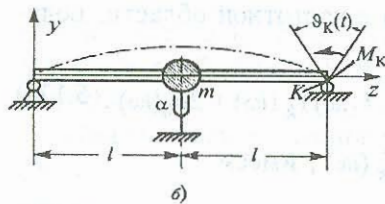
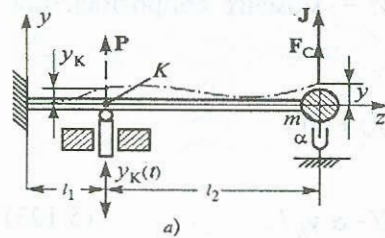


Рис. 5.10

Рассмотрим колебания одно-массовых механических систем, которые вызываются принудительным случайным смещением (или поворотом) дискретных точек (рис. 5.10, а) или сечений (рис. 5.10, б) упругих элементов.

Одна из особенностей приведенных на рис. 5.10 систем в том, что кинематические возмущения связаны с безмассовыми точками и это осложняет вывод уравнений колебаний сосредоточенных масс m .

5.3.1. Нестационарные случайные колебания при кинематическом возбуждении

Уравнения малых колебаний массы m получим, воспользовавшись методом сил, введя неизвестную силу P при линейных кинематических перемещениях, приложенных в точке K (на рис. 5.10, а сила P показана пунктирной линией), или неизвестный момент M_k при угловых кинематических перемещениях (рис. 5.10, б) и силы инерции $J = -m\ddot{y}$ и сопротивления $F_c = -\alpha\dot{y}$. Например, для системы, показанной на рис. 5.10, а, получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} y &= \delta_{11}(-m\ddot{y} - \alpha\dot{y}) + \delta_{12}P(t); \\ y_k(t) &= \delta_{21}(-m\ddot{y} - \alpha\dot{y}) + \delta_{22}P(t), \end{aligned} \quad (5.127)$$

где δ_{ij} — податливости системы; $y_k(t)$ — заданная функция.

Исключая из первого уравнения системы (5.127) силу P , после преобразований получаем уравнение

$$y = \left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}\delta_{21}}{\delta_{22}} \right) (-m\ddot{y} - \alpha\dot{y}) + \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} y_k \quad (5.128)$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = b_1 y_k, \quad (5.129)$$

где

$$2n = \frac{\alpha}{m}; \quad p_0^2 = \frac{\delta_{22}}{m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21})}; \quad b_1 = \frac{\delta_{12}}{m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21})}.$$

Решение уравнения (5.129) с определением вероятностных характеристик y (при известных вероятностных характеристиках правой части) изложено в § 5.2 (соотношения (5.28), (5.29) и (5.30)).

Рассмотрим задачу, когда требуется определить изменение во времени максимально возможной силы P , возникающей в сечении при нестационарных колебаниях массы m при нулевых начальных данных. При определении максимально возможной силы P примем, что распределение плотности вероятности силы $P(t)$ подчиняется нормальному закону. Получим выражение для силы $P(t)$ из второго уравнения системы (5.127):

$$P(t) = \frac{1}{\delta_{22}} y_k - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} (-m\ddot{y} - \alpha\dot{y}). \quad (5.130)$$

Из уравнения (5.128) находим

$$(-m\ddot{y} - \alpha\dot{y}) = \left(y - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} y_k \right) \frac{\delta_{22}}{(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21})}.$$

Исключая $(-m\ddot{y} - \alpha\dot{y})$ из уравнения (5.130), получаем

$$P(t) = \gamma_1 y_k - \gamma_2 y, \quad (5.131)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\delta_{11}}{(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21})}; \quad \gamma_2 = \frac{\delta_{21}}{(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21})}.$$

При нулевых начальных данных решение уравнения (5.129) имеет вид

$$y = \frac{b_1}{p} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau) y_k(\tau) d\tau = \frac{b_1}{p} \int_0^t g(t-\tau) y_k(\tau) d\tau.$$

Математическое ожидание

$$m_p(\tau) = \gamma_1 m_{y_k} - \gamma_2 m_y.$$

Запишем выражение для корреляционной функции и дисперсии случайной силы P :

$$K_P(t, t') = M[(\gamma_1 y_k(t) - \gamma_2 y(t))(\gamma_1 y_k(t') - \gamma_2 y(t'))],$$

или, опуская промежуточные преобразования,

$$K_P(t, t') = \gamma_1^2 K_{y_k}(t, t') + \int_0^t \int_0^{t'} g(t-\tau) g(t'-\tau') K_{y_k}(\tau, \tau') d\tau d\tau' - \\ - \gamma_1 \gamma_2 \int_0^{t'} g(t'-\tau') K_{y_k}(t, \tau) d\tau' - \gamma_1 \gamma_2 \int_0^t g(t-\tau) K_{y_k}(t', \tau) d\tau;$$

$$D_p(t) = K_P(t, t')|_{t'=t}.$$

Максимально возможное значение случайной силы $P(t)$ (с использованием правила трех сигм) равно

$$\max P(t) = m_p(t) + 3\sigma_p(t).$$

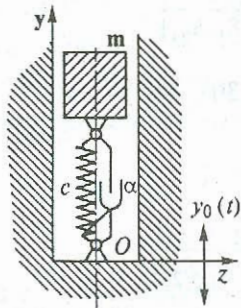


Рис. 5.11

На рис. 5.11 показана масса m , связанная со случайно движущимся основанием. Для большей определенности примем, что движение основания началось в момент времени $t = 0$.

Уравнение движения массы m имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = 2n\dot{y}_0 + p_0^2 y_0. \quad (5.132)$$

Решение уравнения (5.132) при нулевых начальных данных

$$y = \frac{1}{pm} \int_0^t k(t-\tau)(2n\dot{y}_0 + p_0^2 y_0) d\tau, \quad (5.133)$$

где

$$k(t-\tau) = e^{-n(t-\tau)} \sin p(t-\tau).$$

Смещение y_0 считаем нестационарной случайной функцией с известными вероятностными характеристиками m_{y_0} и $K_{y_0}(t, t_1)$.

Для получения вероятностных характеристик решения надо знать вероятностные характеристики производной случайного смещения $\dot{y}_0$ и произведения $y_0 \dot{y}_0$. В § 2.4 были получены выражения для вероятностных характеристик производной случайной функции и произведения случайной функции и ее производной:

$$m_{\dot{y}_0} = \frac{dm_{y_0}}{dt}; \quad K_{\dot{y}_0 y_0} = M[y_0(t) \dot{y}_0(t_1)] = \frac{\partial K_{y_0}}{\partial t}; \\ K_{y_0 \dot{y}_0} = \frac{\partial K_{y_0}}{\partial t_1}; \quad K_{\dot{y}_0 \dot{y}_0} = \frac{\partial^2 K_{y_0}}{\partial t \partial t_1}. \quad (5.134)$$

Вероятностные характеристики решения уравнения (5.132):

$$m_y = \frac{p_0^2}{p} \int_0^t k(t-\tau) m_{y_0} d\tau + \frac{2n}{p} \int_0^t k(t-\tau) \dot{m}_{y_0} d\tau; \quad (5.135)$$

$$K_y = \frac{p_0^4}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) K_{y_0} d\tau d\tau_1 + \\ + \frac{2p_0^2 n}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) \frac{\partial K_{y_0}}{\partial \tau_1} d\tau d\tau_1 + \\ + \frac{2np_0^2}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) \frac{\partial K_{y_0}}{\partial \tau} d\tau d\tau_1 +$$

$$+ \frac{4n^2}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) \frac{\partial^2 K_{y_0}}{\partial \tau \partial \tau_1} d\tau d\tau_1. \quad (5.136)$$

В результате решения уравнения (5.132) получили вероятностные характеристики y при нестационарном кинематическом возбуждении.

При действии стационарного кинематического возбуждения возможны как нестационарные колебания (если время процесса меньше времени t_n , необходимого для практического затухания переходных процессов), так и стационарные, если время процесса много больше времени t_n .

Рассмотрим нестационарные колебания системы при действии стационарного кинематического возбуждения (рис. 5.12). Точечная масса m находится на конце упругого элемента измерительного прибора, жестко связанного с основанием, которое случайно смещается в вертикальном направлении. Вертикальное смещение y_0 является стационарной случайной функцией с известными вероятностными характеристиками

$$\begin{aligned} m_{y_0} &= 0; \\ K_{y_0}(\tau) &= D_{y_0} e^{-\alpha|\tau|}. \end{aligned} \quad (5.137)$$

До включения прибора масса m из-за жесткой связи A не имеет возможности смещаться относительно основания. В момент времени $t = t_0 = 0$ связь A исчезает и масса m начинает

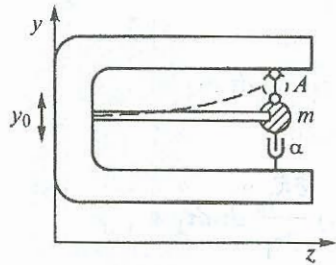


Рис. 5.12

двигаться. Положение массы m в произвольный момент t показано на рис. 5.12 штриховой линией. Требуется определить среднее квадратическое отклонение разности $y_0 - y_k$ в фиксированный момент времени t_k . Разность $y_0 - y$ представляет собой случайное смещение массы m относительно основания. Уравнение малых колебаний массы

$$\ddot{y} + 2n \dot{y} + p_0^2 y = p_0^2 y_0 + 2n \dot{y}_0. \quad (5.138)$$

Для определения корреляционной функции решения можно воспользоваться выражением (5.136). В рассматриваемом случае корреляционная функция K_{y_0} , входящая под знак интегралов (5.136), имеет вид

$$K_{y_0} = D_{y_0} e^{-\alpha|\varepsilon|} \quad (\varepsilon = \tau - \tau_1).$$

Производные K_y по τ и τ_1

$$\frac{\partial K_{y_0}}{\partial \tau} = D_{y_0} \frac{\partial e^{-\alpha|\varepsilon|}}{\partial \tau} = D_{y_0} \frac{\partial e^{-\alpha|\varepsilon|}}{\partial |\varepsilon|} \frac{d|\varepsilon|}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = -D_{y_0} \alpha e^{-\alpha|\varepsilon|} \text{sign } \varepsilon;$$

$$\frac{\partial K_{y_0}}{\partial \tau_1} = D_{y_0} \frac{\partial e^{-\alpha|\varepsilon|}}{\partial \tau_1} = D_{y_0} \alpha e^{-\alpha|\varepsilon|} \text{sign } \varepsilon.$$

Вторая производная K_{y_0} по τ и τ_1

$$\frac{\partial^2 K_{y_0}}{\partial \tau \partial \tau_1} = D_{y_0} \alpha e^{-\alpha|\varepsilon|} [2\delta(\varepsilon) - \alpha].$$

Выражение для корреляционной функции решения после преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} K_y &= \frac{D_y}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) e^{-\alpha|\tau-\tau_1|} \times \\ &\times [p_0^2 + 8n^2 \alpha \delta(\tau - \tau_1) - 4n^2 \alpha^2] d\tau d\tau_1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} K_y(t, t_1) &= \frac{D_{y_0} (p_0^2 - 4n^2 \alpha^2)}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t_1-\tau_1) e^{-\alpha|\tau-\tau_1|} d\tau d\tau_1 + \\ &+ \frac{8D_{y_0} n^2 \alpha}{p^2} \int_0^{t_1} k(t_1-\tau_1) k(t-\tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Дисперсия

$$D_y(t) = \frac{D_{y_0}(p_0^2 - 4n^2 \alpha^2)}{p^2} \int_0^t \int_0^{t_1} k(t-\tau) k(t-\tau_1) \times \\ \times e^{-\alpha|t-\tau_1|} d\tau d\tau_1 + \frac{8D_{y_0}n^2 \alpha}{p^2} \int_0^t k^2(t-\tau) d\tau. \quad (5.140)$$

Для определения среднего квадратического отклонения разности $\Delta y = y_0 - y_1$ необходимо найти корреляционную функцию $K_{\Delta y}(t, t_1)$:

$$K_{\Delta y}(t, t_1) = M[\Delta y(t) \Delta y(t_1)] = M[y_0(t) - y(t)][y_0(t_1) - y(t_1)] = \\ = K_{y_0}(t, t_1) + K_y(t, t_1) - M_1 - M_2,$$

где

$$M_1 = M[y_0(t) y(t_1)] \text{ и } M_2 = M[y_0(t_1) y(t)].$$

Подставив выражение для решения $y(t_1)$ в (2.120), найдем

$$M_1 = M \left[y_0(t) \frac{1}{p} \int_0^{t_1} k(t_1 - \tau_1) [p_0^2 y_0(\tau_1) + 2n \dot{y}_0(\tau_1)] d\tau_1 \right] = \\ = \frac{1}{p} \left\{ p_0^2 \int_0^{t_1} k(t_1 - \tau_1) M[y_0(t) y_0(\tau_1)] d\tau_1 + 2n \int_0^{t_1} k(t_1 - \tau_1) M[y_0(t) \dot{y}_0(\tau_1)] d\tau \right\}. \quad (5.141)$$

Математические ожидания, входящие под знак интегралов, можно представить в виде

$$M[y_0(t) y_0(\tau_1)] = K_{y_0}(t, \tau_1) = D_{y_0} e^{-\alpha|t-\tau_1|};$$

$$M \left[y_0(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} \right] = \frac{\partial}{\partial \tau_1} M[y_0(t) y_0(t_1)] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau_1} D_{y_0} e^{-\alpha|t-\tau_1|} = \alpha D_{y_0} e^{-\alpha|t-\tau_1|} \text{sign}(t - \tau_1).$$

После преобразований выражение для M_1 принимает вид

$$M_1 = \frac{D_{y_0}}{p} \int_0^{t_1} k(t_1 - \tau_1) [p_0^2 + 2n \alpha \text{sign}(t - \tau_1)] e^{-\alpha|t-\tau_1|} d\tau_1. \quad (5.142)$$

Проведя аналогичные преобразования с M_2 , получим

$$M_2 = \frac{D_{y_0}}{p} \int_0^t k(t - \tau) [p_0^2 + 2n \alpha \text{sign}(t_1 - \tau)] e^{-\alpha|t_1-\tau|} d\tau. \quad (5.143)$$

Дисперсия Δy в момент времени t_k

$$D_{\Delta y}(t_k) = D_{y_0} + D_y(t_k) - 2 \frac{D_y}{p} \int_0^{t_k} k(t_k - \tau) \times \\ \times [p_0^2 + 2n \alpha \text{sign}(t_k - \tau)] e^{-\alpha|t_k-\tau|} d\tau.$$

Так как $t_k > \tau$, то

$$D_{\Delta y}(t_k) = D_{y_0} + D_y(t_k) - \frac{2D_{y_0}}{p} (p_0^2 + 2n \alpha) \int_0^{t_1} k(t_k - \tau) e^{-\alpha|t_k-\tau|} d\tau. \quad (5.144)$$

Среднее квадратическое отклонение Δy

$$\sigma_{\Delta y}(t_k) = \sqrt{D_{\Delta y}(t_k)}.$$

Рассмотрим стационарные колебания системы с одной степенью свободы при стационарном кинематическом возбуждении. На рис. 5.13, а показан прицеп, который движется по дороге со случайными неровностями с постоянной скоростью v . Воздействие дороги на прицеп при установившемся режиме движения можно рассматривать как случайный стационарный процесс. Примем, что точка O крепления прицепа к автомашине практически не имеет вертикальных перемещений. Требуется найти вероятностные характеристики стационарных колебаний прицепа (угловых колебаний прицепа относительно

точки O). Для решения задачи необходимо знать, какое влияние оказывает дорога на прицеп при разной скорости движения, т.е. необходимо знать спектр возмущений со стороны дороги, который зависит от микропрофиля дороги и скорости движения.

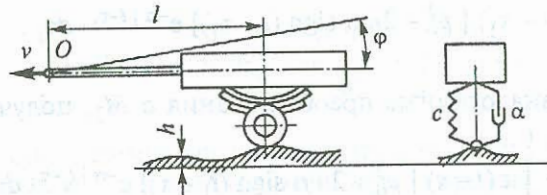


Рис. 5.13

На рис. 5.14 в качестве примера показан участок дороги (профиль участка дороги) со случайными неровностями. На различных участках дороги имеются неровности самой разнообразной формы и протяженности. Последовательность выступов и впадин случайна, поэтому величина и продолжительность действия импульсов сил при движении колеса по этим неровностям случайны. Для исследования случайных колебаний машины при движении по дороге со случайными неровностями надо иметь зависимость функции h от времени. Для этого достаточно поделить абсциссу графика на рис. 5.14 на скорость движения v . В результате получается реализация случайной функции h во времени. Если координату x поделить на единичную скорость ($v_0 = 1$ м/с), то значения функции профиля дороги $h(x)$ совпадут со значениями функции воздействия $h(t)$. При прочих равных условиях величины и чередования импульсов сил, действующих на машину при движении по определенному участку дороги с постоянной скоростью, не зависят от того, когда машина проезжает данный участок, следовательно, воздействие данного участка на дорогу будет

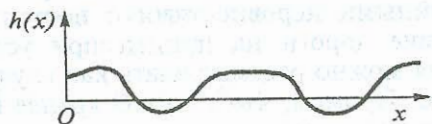


Рис. 5.14

одним и тем же в любой момент времени, т.е. стационарным процессом.

Статистическая обработка результатов замера микропрофилей дороги позволяет получить вероятностные характеристики случайной стационарной функции $h(t)$, т.е. m_h и $K_h(\tau)$, и, что особенно важно, спектральную плотность $S_h(\omega)$. Получить вероятностные характеристики воздействия дороги на машину, справедливые для всех типов дороги, нельзя, поэтому условно дороги разбивают на ряд классов в зависимости от средней квадратической высоты неровностей. Более подробные сведения о статистических характеристиках дорог и методах их получения содержатся в специальной литературе. В частности, корреляционные функции воздействия дорог $K_h(\tau)$ на машину могут быть аппроксимированы функцией вида

$$K_h(\tau) = D_h e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau, \quad (5.145)$$

где α, β — параметры, зависящие от типа дороги и от скорости движения. Параметры α и β можно представить в виде явной зависимости от скорости движения v , м/с:

$$\alpha = \alpha_1 v; \quad \beta = \beta_1 v,$$

где α_1, β_1 — значения параметров при единичной скорости движения, зависящие только от типа дороги.

Спектральная плотность воздействия дороги на машину определяется из соотношения (для принятой функции $K_h(\tau)$)

$$S_h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_h(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{4D_h \alpha (\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\pi [(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) \omega^2 + \omega^4]},$$

или с учетом зависимости коэффициентов α и β от скорости движения машины v :

$$S_h(\omega) = \frac{4D_h v \alpha_1 (v^2 \gamma_1 + \omega^2)}{\pi [v^4 \gamma_1^2 + 2v^3 \gamma_2 \omega^2 + \omega^4]}, \quad (5.146)$$

где $\gamma_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$; $\gamma_2 = \alpha_1^2 - \beta_1^2$.

Корреляционная функция, характеризующая воздействие проселочной дороги с дерново-подзолистой почвой при сухой погоде (при $v = 1$ м/с), на основании обработки экспериментальных исследований принята в виде

$$K_h(\tau) = 61,40 e^{-0,0627|\tau|} \cos 0,196\tau.$$

Соответствующая функции $K_h(\tau)$ спектральная плотность, зависящая от скорости движения машины,

$$S_h(\omega) = 61,40 \left[\frac{0,0627v}{0,0039v^2 + (\omega + 0,196v)^2} + \frac{0,0627v}{0,0039v^2 + (\omega - 0,196v)^2} \right]. \quad (5.147)$$

График изменения $S_h(\omega)$ от ω при $v = 1$ м/с приведен на рис. 5.15.

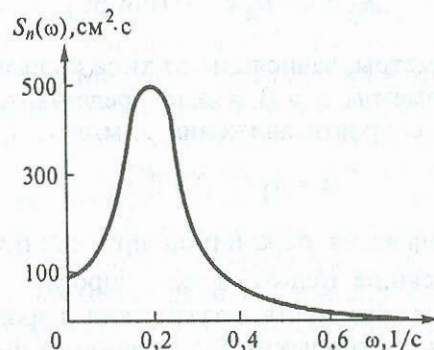


Рис. 5.15

Выражение для $S_h(\omega)$ (5.147) можно преобразовать к виду

$$S_h(\omega) = 7,8v \frac{-(i\omega)^2 + 4,28 \cdot 10^{-2}v^2}{|(i\omega)^2 + 0,125v i\omega + 4,28v^2 \cdot 10^{-2}|^2}. \quad (5.148)$$

Пренебрегая массой шасси, прицеп можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. Уравнение малых угловых колебаний прицепа относительно точки O имеет вид (рис. 5.13, а, б)

$$\ddot{\varphi} + 2n \dot{\varphi} + p_0^2 \varphi = p_0^2 \frac{1}{l} h + 2n \frac{\dot{h}}{l}, \quad (5.149)$$

где $2n = \alpha l^2/J_0$; $p_0^2 = cl^2/J_0$.

В частотной области получаем

$$[(i\omega)^2 + 2n(i\omega + p_0^2)] \varphi(i\omega) = \frac{1}{l} (p_0^2 + 2n(i\omega)) H(i\omega).$$

Поэтому частотная функция для уравнения (5.149) равна

$$W(i\omega) = \frac{p_0^2 + 2ni\omega}{l[(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2]}, \quad (5.150)$$

а спектральная плотность решения

$$S_\varphi(\omega) = \left| \frac{p_0^2 + 2ni\omega}{l[(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2]} \right|^2 S_h(\omega). \quad (5.151)$$

После подстановки имеем

$$S_\varphi(\omega) = \frac{7,8v}{l^2} \frac{[b_1(i\omega)^4 + b_2(i\omega)^2 + b_3]}{|(i\omega)^4 + a_1(i\omega)^3 + a_2(i\omega)^2 + a_3(i\omega) + a_4|^2},$$

где

$$b_2 = -(p_0^2 + 2n^2 \cdot 4,3 \cdot 10^{-2}v^2); \quad b_3 = 4,3 \cdot 10^{-2}v^2 p_0^4; \quad b_1 = 4n^2;$$

$$a_1 = (0,125v + 2n); \quad a_2 = 2n \cdot 0,125v + 4,3 \cdot 10^{-2}v^2 + p_0^2;$$

$$a_3 = p_0^2 \cdot 0,125v + 2n \cdot 4,3 \cdot 10^{-2}v^2; \quad a_4 = 4,3 \cdot 10^{-2}p_0^2v^2.$$

График изменения спектральной плотности S_φ от ω приведен на рис. 5.16 при $v = 20$ м/с, $n = 0,3$.

Дисперсия углового отклонения

$$D_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega) d\omega = D_\varphi(p_0, n, v). \quad (5.152)$$

Значения интегралов вида (5.152) даны в приложении 2, воспользовавшись которым ($D_\varphi = J_4$), найдем

$$D_\varphi = 2\pi \frac{-a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4} (a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2a_0 (a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}.$$

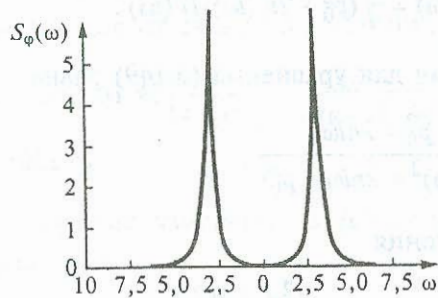


Рис. 5.16

Полученное выражение для дисперсии в зависимости от параметров системы и скорости движения дает возможность исследовать их влияние на дисперсию углового отклонения. На рис. 5.17, а приведен график изменения среднеквадратичного значения угла φ в зависимости от ν при $n = 0,3$, на рис. 5.17, б — график изменения σ_φ в зависимости

от коэффициента силы вязкого сопротивления n при $\nu = 10$ м/с. Для расчета подвески прицепа необходимо знать силу, действующую на нее при движении прицепа по дороге со случайными неровностями. Для рассматриваемой упрощенной модели эта сила равна

$$N = c(h - \varphi l) + \alpha(\dot{h} - \dot{\varphi} l) = m l \ddot{\varphi}. \quad (5.153)$$

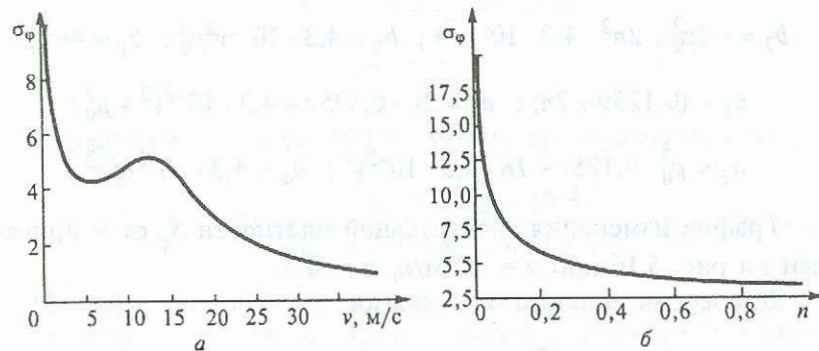


Рис. 5.17

Спектральная плотность силы N (соотношения (5.153) и (2.102))

$$S_N(\omega) = |W_1(\omega)|^2 S_h(\omega), \quad (5.154)$$

где

$$|W_1(\omega)|^2 = \left| \frac{c(i\omega)^2 + \alpha(i\omega)}{[(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2]} \right|^2.$$

Так как при стационарном процессе математическое ожидание постоянно, то математическое ожидание производной случайной функции h равно нулю. Поэтому математические ожидания угла φ и силы N равны

$$m_\varphi = \frac{1}{l} m_h, \quad m_N = 0.$$

Дисперсия силы N

$$D_N = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) d\omega.$$

Напряжения, возникающие в упругой подвеске, пропорциональны силе N , т.е. $\sigma = kN$. Зная вероятностные характеристики m_N и D_N силы N , находим вероятностные характеристики напряжения σ : $m_\sigma = 0$, $\sigma_\sigma = k^2 \sigma_N$.

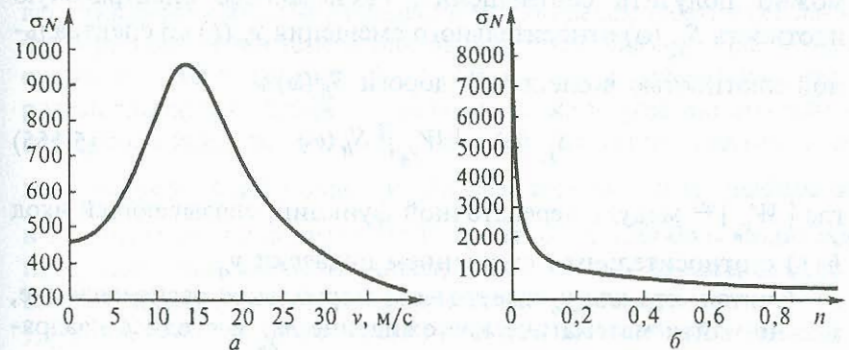


Рис. 5.18

Выражение (5.154) с учетом (5.150) можно преобразовать к виду, удобному при интегрировании:

$$S_N(\omega) = \frac{12,5\nu[-(i\omega)^6 + 4,3 \cdot 10^{-2}\nu^2(i\omega)^4]}{|(i\omega)^4 + a_1(i\omega)^3 + a_2(i\omega)^2 + a_3(i\omega) + a_4|^2}.$$

На рис. 5.18, а, б приведены графики изменения средне-квадратичных значений σ_N в зависимости от скорости движения прицепа ν при $n = 0,3$ (рис. 5.18, а) и от коэффициента n при $\nu = 10$ м/с (рис. 5.18, б).

§ 5.4. Задача о выбросах при случайных колебаниях

Во многих прикладных задачах возникает необходимость определения вероятности превышения случайной функцией заданного уровня, например, при движении автомобиля по дороге со случайными неровностями. Практический интерес представляет задача о вероятности «пробоя» подвески. При «пробое» возникают большие ударные нагрузки, которые нежелательны. Если относительное вертикальное смещение подвески y_n рассматривать как случайную функцию, то задача вероятности «пробоя» подвески эквивалентна задаче о вероятности превышения $y_n(t) \geq y_{n0}$, где y_{n0} — свободный ход подвески (рис. 5.19). Эта задача является частным случаем общей задачи о выбросах. При стационарных колебаниях автомобиля можно получить соотношение, связывающее спектральную плотность $S_{y_n}(\omega)$ относительного смещения $y_n(t)$ со спектральной плотностью воздействия дороги $S_h(\omega)$:

$$S_{y_n}(\omega) = |W_{y_n}|^2 S_h(\omega), \quad (5.155)$$

где $|W_{y_n}|$ — модуль передаточной функции, связывающей вход $h(t)$ с относительным смещением подвески y_n .

Считая, что для y_n имеет место нормальное распределение, можно найти математическое ожидание m_{y_n} и среднее квадратическое отклонение σ_{y_n} .

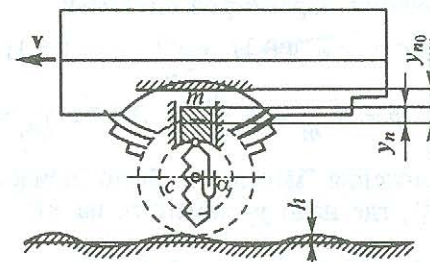


Рис. 5.19

Зная параметры нормального распределения, находим вероятность того, что относительное смещение y_n превысит значение y_{n0} :

$$P(y_n(t) \geq y_{n0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\infty) - \Phi(t_1), \quad (5.156)$$

где $t_1 = \frac{y_{n0} - m_{y_n}}{\sigma_{y_n}}.$

Пример 5.5. Рассмотрим упрощенную модель системы, приведенной на рис. 5.19, пренебрегая смещением корпуса машины по сравнению со смещениями подвески. В этом случае вертикальное смещение подвески можно рассмотреть отдельно, что приведет к системе с одной степенью свободы (расчетная схема показана на рис. 5.19). Обычно при проектировании рассматривается задача о превышении конструктивного динамического хода подвески y_{n0} без учета влияния ограничителя хода на колебания подвески. Динамический ход y_{n0} выбирают в зависимости от допускаемой вероятности «пробоя» подвески при расчетной скорости движения в заданных дорожных условиях. Найдем вероятности превышения y_n заданного значения y_{n0} в зависимости от скорости движения автомобиля по булыжной дороге.

Числовые значения параметров системы:

$$m = 3 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}; \quad c = 300 \text{ Н} \cdot \text{см}^{-1}; \quad \alpha = 1,5 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1};$$

$$n = 0,5 \text{ с}^{-1}; \quad p = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{300}{3}} = 10 \text{ с}^{-1}; \quad y_{n_0} = 8 \text{ см}.$$

Уравнение движения массы m было приведено в § 5.3 (уравнение (5.138), где надо y_0 заменить на h):

$$\ddot{y}_n + 2n \dot{y}_n + p_0^2 y_n = 2n\dot{h} + p_0^2 h, \quad (5.157)$$

где $2n = \alpha/m$; $p_0^2 = c/m$.

Вероятностные характеристики дорожных неровностей примем равными

$$m_h = 0; \quad K_h(\tau) = 20 e^{-0,05|\tau|} \text{ см}^2;$$

$$S_h = 20 \left(\frac{0,1v}{0,002v^2 + \omega^2} \right) \text{ см}^2 \cdot \text{с}, \quad (5.158)$$

где v — в м/с.

Дисперсия

$$D_{y_n} = 2v \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2ni\omega + p_0^2}{(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2} \right|^2 \frac{d\omega}{|\omega + 0,05v|^2}, \quad (5.159)$$

или

$$D_{y_n} = 2v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-4n^2(i\omega)^2 + p_0^4)d\omega}{|(i\omega)^3 + (2n + 0,05v)(i\omega)^2 + (p_0^2 + 0,1nv)i\omega + 0,05vp_0^2|^2}.$$

Взяв значение интеграла J_3 из приложения 2, получим

$$D_{y_n} = \frac{\pi \left[4n^2 + \frac{(2n + 0,05v)p_0^2}{0,05vp_0^2} \right]}{[-0,05vp_0^2 + (2n + 0,05v)(p_0^2 + 0,1nv)]}. \quad (5.160)$$

На рис. 5.20 приведен график изменения σ_{y_n} (при $n = 0,05p_0$) в зависимости от скорости движения автомобиля.

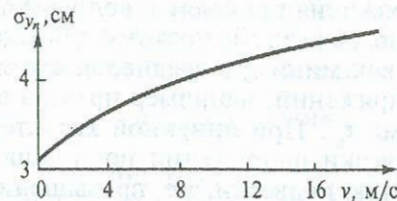


Рис. 5.20

Вероятность p превышения y_n значения y_{n_0} в зависимости от скорости движения машины показана на рис. 5.21. Например, при скорости движения 30 км/ч (8,3 м/с) вероятность превышения динамического хода подвески равна 0,02. Вероятность $p = 0,02$ — это вероятность наступления предельного состояния («пробоя» подвески), которое не может рассматриваться как массовое событие, т.е. это число не позволяет судить о качестве конструкции. Но если сравнить две конструкции, то оптимальной будет та, для которой p меньше.

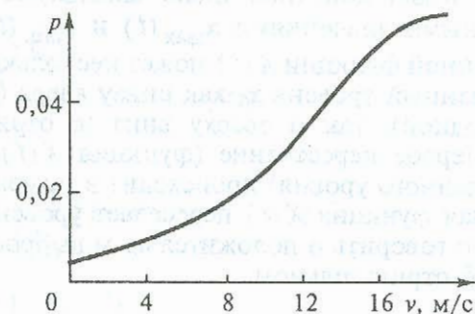


Рис. 5.21

Нормальный режим, правильно рассчитанный, не должен приводить к «пробоям», или, вернее, вероятность «пробоя» должна быть очень малой величиной, которая зависит от конкретных условий эксплуатации и требований к надежности конструкции. Случайные колебания подвески приводят к случайным напряжениям в упругих элементах подвески, от которых зависит долговечность конструкции. Переменные во вре-

мени случайные напряжения приводят к непрерывному накоплению усталостных повреждений, поэтому для оценки долговечности надо знать как минимум среднее число превышений заданного уровня напряжений, например предела выносливости, за известное время t_k . При линейной характеристике упругих элементов подвески напряжения пропорциональны относительному смещению подвески, т.е. превышения заданного уровня напряжений эквивалентны превышению заданного относительного смещения подвески, например y_{n1} на рис. 5.22.

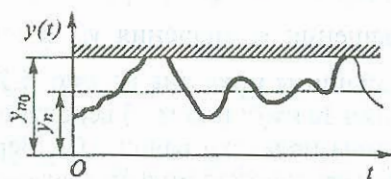


Рис. 5.22

Рассмотрим дифференцируемый случайный процесс длительностью t_k (рис. 5.23). Такая реализация на конечном интервале времени имеет конечное число максимумов и минимумов с различными значениями $x_{\max}(t)$ и $x_{\min}(t)$. График изменения случайной функции $X(t)$ может несколько раз пересекать фиксированный уровень x_0 как снизу вверх (с положительной производной), так и сверху вниз (с отрицательной производной). Первое пересечение (функция $X(t)$ в первый раз достигает заданного уровня) происходит в момент времени t_1 . Если случайная функция $X(t)$ пересекает уровень x_0 снизу вверх, то принято говорить о положительном выбросе, если же сверху вниз — об отрицательном.

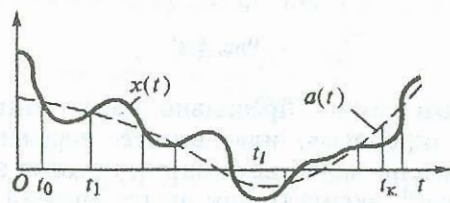


Рис. 5.23

Найдем среднее число пересечений случайного процесса $X(t)$ с заданной кривой $a(t)$ (рис. 5.23). Частным случаем этой задачи является задача о выбросах, когда

$$a(t) = x_0 = \text{const}.$$

В дальнейшем считаем, что $a(t)$ является непрерывной однозначной функцией t , случайная функция $X(t)$ дифференцируема, а совместная плотность вероятности для функции $X(t)$ и ее первой производной известна. Покажем, что число нулей для некоторой функции $f(t)$ на интервале (t_0, t_k) (рис. 5.24) определяется формулой

$$n = \int_{t_0}^{t_k} |f(t)| \delta[f(t)] dt. \quad (5.161)$$

Произведем замену переменных, полагая $f(t) = z$.

Тогда, так как $dz = fdt$, выражение (5.161) преобразуется к виду

$$n = \begin{cases} \int_{z_1}^{z_2} \delta(z) dz & 0 \leq f(t) < \infty; \\ - \int_{z_1}^{z_2} \delta(z) dz & -\infty < f(t) \leq 0, \end{cases} \quad (5.162)$$

$$n = \begin{cases} \int_{z_1}^{z_2} \delta(z) dz & 0 \leq f(t) < \infty; \\ - \int_{z_1}^{z_2} \delta(z) dz & -\infty < f(t) \leq 0, \end{cases} \quad (5.163)$$

где $z_1 = f(t_0)$; $z_2 = f(t_k)$.

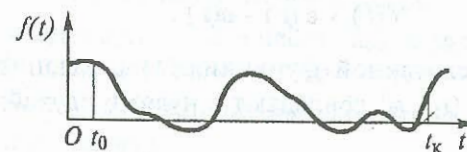


Рис. 5.24

Интегралы (5.162), (5.163) при $z \neq 0$ равны нулю. При $z_i = 0$ интеграл (5.162) равен

$$\int_{z_i - \varepsilon}^{z_i + \varepsilon} \delta(z) dz = 1,$$

где z_i — нуль функции $f(t)$.

Аналогично интеграл (5.163) при $z_i = 0$ равен

$$-\int_{z_i - \varepsilon}^{z_i + \varepsilon} \delta(z) dz = \int_{z_i - \varepsilon}^{z_i + \varepsilon} \delta(z) dz = 1.$$

Поэтому полное число нулей функции $f(t)$ на интервале (t_0, t_k) равно сумме интегралов, т.е.

$$n = \sum_{i=1}^n \int_{z_i - \varepsilon}^{z_i + \varepsilon} \delta(z) dz + \sum_{i=1}^n \int_{z_i - \varepsilon}^{z_i + \varepsilon} \delta(z) dz = n_+ + n_-,$$

где n_+ — число нулей на интервале (t_0, t_k) с положительной производной ($\dot{f}(t) > 0$) и n_- — число нулей на интервале (t_0, t_k) с отрицательной производной ($\dot{f}(t) < 0$).

Воспользуемся полученными результатами для определения среднего числа пересечений случайной функции $x(t)$ неслучайной кривой $a(t)$. Для этого введем функцию

$$f(t) = \varepsilon(t) - a(t).$$

Пересечения случайной функции $x(t)$ с заданной кривой $a(t)$ на интервале (t_1, t_2) совпадают с нулями случайной функции $\varepsilon(t)$, поэтому

$$n = \int_{t_0}^{t_k} |\dot{x} - \dot{a}| \delta(x - a) dt.$$

Число нулей n будет разным для разных реализаций процесса, следовательно, n — случайная величина, случайно меняющаяся от одной реализации к другой, поэтому среднее число нулей равно математическому ожиданию от n , т.е.

$$N = M[n] = \int_{t_0}^{t_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x} - \dot{a}| \delta(x - a) f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} dt. \quad (5.164)$$

В выражение (5.164) входит совместная плотность вероятности $f(x, \dot{x})$ случайной функции x и ее первой производной $\dot{x}$. Методы определения $f(x, \dot{x})$ изложены в работе [39]. В общем случае (для нестационарных случайных процессов) получение совместной плотности вероятности представляет значительные трудности, так как требуется большой объем информации о поведении случайной функции. Задача получения совместной плотности вероятности упрощается, если известно, что случайный процесс нормальный.

Для нормального случайного процесса совместная плотность вероятности (в момент времени t)

$$f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\sqrt{1-k_{x\dot{x}}^2}} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2(1-k_{x\dot{x}}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2k_{x\dot{x}}(x-m_x)(\dot{x}-m_{\dot{x}})}{\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} + \frac{(\dot{x}-m_{\dot{x}})^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right]}, \quad (5.165)$$

где $k_{x\dot{x}}$ — нормированная взаимная корреляционная функция.

Для стационарного процесса взаимная корреляционная функция $k_{x\dot{x}}$ (если x и $\dot{x}$ взяты в один и тот же момент времени) равна нулю (см. § 3.3), поэтому совместная плотность вероятности принимает вид

$$f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\dot{x}-m_{\dot{x}})^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}} = F(x) F(\dot{x}). \quad (5.166)$$

Выражения для N (5.164) можно упростить, выполнив интегрирование по x (воспользовавшись свойством δ -функции), т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a).$$

После преобразований получим

$$N = \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x} - \dot{a}| f(a, \dot{x}) d\dot{x} \right] dt.$$

Пусть t_i — моменты времени, соответствующие пересечению случайного процесса кривой $a(t)$ на интервале (t_0, t_k) , т.е. $x(t_i) = a(t_i)$. Как было показано выше, общее число пересечений n равно

$$n = n_+ + n_- ,$$

где

$$n_+ = \int_{t_0}^{t_k} (\dot{x} - \dot{a}) \delta(x-a) dt \quad (\dot{x} > 0);$$

$$n_- = \int_{t_0}^{t_k} (\dot{x} - \dot{a}) \delta(x-a) dt \quad (\dot{x} < 0).$$

Среднее число пересечений:
с положительной производной

$$N_+ = M[n_+] = \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_0^{\infty} \dot{\varepsilon}(t) f(a, \dot{a} + \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} \right] dt;$$

с отрицательной производной

$$N_- = M[n_-] = - \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_{-\infty}^0 \dot{\varepsilon}(t) f(a, \dot{a} + \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} \right] dt.$$

Общее среднее число пересечений

$$N = N_+ + N_-.$$

Найдем среднее число пересечений заданного уровня, если $a(t) = \text{const} = x_0$ (см. рис. 5.23). В этом случае

$$n_+ = \int_{t_0}^{t_k} \dot{\varepsilon} \delta(\varepsilon - x_0) dt \quad (\dot{\varepsilon} > 0);$$

$$n_- = - \int_{t_0}^{t_k} \dot{\varepsilon} \delta(\varepsilon - x_0) dt \quad (\dot{\varepsilon} < 0).$$

Среднее число пересечений

$$\begin{aligned} N_+ &= \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_0^{\infty} \dot{\varepsilon} f(x_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} \right] dt; \\ N_- &= \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_{-\infty}^0 \dot{\varepsilon} f(x_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} \right] dt. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Если $x_0 = 0$, то среднее число нулей процесса $x(t)$ на интервале времени (t_0, t_k)

$$N = N_+ + N_- = \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_0^{\infty} \dot{\varepsilon} f(x_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} \right] dt - \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_{-\infty}^0 \dot{\varepsilon} f(x_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} \right] dt. \quad (5.168)$$

Для получения числового результата по формуле (5.168) необходимо знать закон распределения плотности вероятности производной случайной функции $\varepsilon(t)$. Для стационарных случайных процессов выражения для N_+ и N_- упрощаются (так как внутренние интервалы в (5.168) от времени не зависят):

$$N_+ = (t_k - t_0) \int_0^{\infty} \dot{\varepsilon} f(a_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon};$$

$$N_- = - (t_k - t_0) \int_{-\infty}^0 \dot{\varepsilon} f(a_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon}. \quad (5.169)$$

Выражения (5.169) позволяют установить среднее число пересечений случайной стационарной функцией $x(t)$ заданного уровня в единицу времени:

$$\bar{N} = \frac{N_+ + N_-}{t_k - t_0} = \int_0^{\infty} \dot{\varepsilon} f(x_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon} - \int_{-\infty}^0 \dot{\varepsilon} (x_0, \dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon}. \quad (5.170)$$

Найдем среднее число пересечений нормального стационарного процесса $x(t)$ с горизонтальной прямой $x_0 = \text{const}$, воспользовавшись соотношениями (5.169) и совместным законом распределения (5.165). В этом случае $k_{xx} = 0$, поэтому из (5.167) получаем

$$N_+ = \frac{(t_k - t_0)}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \int_0^{\infty} \dot{x} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} d\dot{x}; \quad (5.171)$$

$$N_- = \frac{(t_k - t_0)}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^0 \dot{x} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} d\dot{x}.$$

Из (5.171) следует, что $N_+ = N_-$, следовательно, полное среднее число пересечений нормальным стационарным процессом заданного уровня $N = 2N_+$.

После вычислений получим

$$N = \frac{(t_k - t_0) \sigma_{\dot{x}}}{\pi\sigma_x} e^{-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.172)$$

Найдем среднее время пребывания случайной функции $x(t)$ выше уровня x_0 [39]. Вероятность этого

$$P(X > x_0) = \int_{a_0}^{\infty} f[x(t)] dx.$$

Разобьем интервал (t_k, t_0) на n равных малых интервалов Δt_i , каждый из которых расположен вблизи моментов време-

ни t_i . Интервалы Δt_i считаем настолько малыми, что случаями, когда функция $(x - a_0)$ меняет знак внутри этих интервалов, можно пренебречь. Введем систему случайных величин Δ_i , каждая из которых равна соответствующему интервалу Δt_i или 0 в зависимости от того, будет ли в этом интервале случайная функция больше или меньше x_0 . Тогда общее время пребывания случайной функции $x(t)$ выше заданного уровня x_0

$$t_{a_0} = \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

Среднее время пребывания случайной функции выше заданного уровня x_0 в течение времени $(t_k - t_0)$

$$T_a = M[t_{a_0}] = \sum_{i=1}^n M[\Delta_i] \left[M[\Delta_i] = \Delta t_i \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx \right]. \quad (5.173)$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ из (5.173) получим

$$T_a = \int_{t_0}^{t_k} \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx dt. \quad (5.174)$$

Среднюю продолжительность выброса найдем, разделив выражение (5.174) на среднее число положительных выбросов N_+ , т.е.

$$\tau_a = \frac{T_a}{N_+} = \frac{\int_{t_0}^{t_k} \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx dt}{\int_{t_0}^{t_k} \left[\int_0^{\infty} \dot{x} f(x_0, x) d\dot{x} \right] dt}. \quad (5.175)$$

Для стационарного случайного процесса выражения для T_a и τ_a принимают вид

$$T_a = (t_k - t_0) \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx; \quad (5.176)$$

$$\tau_a = \frac{\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx}{\int_0^{\infty} \dot{x} f(x_0, \dot{x}) d\dot{x}}. \quad (5.177)$$

Для нормального стационарного случайного процесса

$$T_a = \frac{(t_k - t_0)}{2\pi\sigma_x} \left[1 - \Phi \left(\frac{x_0 - m_x}{\sigma_x} \right) \right]; \quad (5.178)$$

$$\tau_a = \frac{\pi\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \left[1 - \Phi \left(\frac{x_0 - m_x}{\sigma_x} \right) \right]. \quad (5.179)$$

Пример 5.6. Корреляционная функция угла φ (см. рис. 5.13) при нормальных стационарных колебаниях прицепа ($m_\varphi = 0$)

$$K_\varphi(\tau) = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

Требуется определить среднее число превышений углом φ допустимого значения $a_0 = \varphi_0 = \pm 5^\circ$ за 10 мин и среднюю продолжительность выброса τ_a . Числовые значения параметров известны: $\sigma_\varphi = 2^\circ$; $\alpha = 0,1$ 1/с; $\beta = 0,6$ 1/с.

Так как

$$\sigma_\varphi^2 = -\frac{d^2 K_\varphi}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = \sigma_\varphi^2 (\alpha^2 + \beta^2),$$

то, воспользовавшись формулой (5.172), получим

$$N = \frac{600 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\pi} e^{-\frac{\varphi_0^2}{2\sigma_\varphi^2}} = \frac{600}{\pi} 0,61 \cdot 0,043 \approx 5.$$

Средняя продолжительность выброса

$$\tau_a = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{\frac{\varphi_0^2}{2\sigma_\varphi^2}} \left[1 - \Phi \left(\frac{\varphi_0}{\sigma_\varphi} \right) \right].$$

Подставив числовые значения, найдем

$$\tau_a = \frac{\pi}{0,615} 23,104 (1 - 0,9948) \approx 0,7 \text{ с}.$$

§ 5.5. Нелинейные случайные колебания

Нелинейные механические системы, нагруженные случайными силами, имеют широкое применение в технике. Например, в амортизаторах систем виброзащиты приборов, машин, конструкций, а также в системах управления летательными аппаратами и т.д. Решение нелинейных задач динамики, как правило, связано с большими трудностями. Как известно, получить решение нелинейного уравнения общего вида в аналитической форме (даже для наиболее простого уравнения второго порядка) нельзя — не говоря уже о решении системы нелинейных уравнений движения механических систем, нагруженных детерминированными или случайными силами.

Еще сравнительно недавно считалось, что при детерминированных нагрузках решение нелинейных уравнений является детерминированным, а при случайных нагрузках — случайным. Исследования в области нелинейной динамики, которые проводились в последние годы с использованием вычислительной техники, позволили установить новые физические явления, казавшиеся ранее просто невозможными в рамках традиционной механики. Было установлено, что в детерминированной нелинейной системе возможны хаотические (непредсказуемые) движения, т.е. нелинейные системы без внешних случайных воздействий могут сами являться генераторами случайных процессов. Причем приближенные численные методы решения,

использующие, как правило, различные упрощения и допущения, могут привести не только к количественным ошибкам, но и к качественно разным результатам. Поэтому ранее разработанные приближенные численные методы решения уравнений нелинейных случайных колебаний (например, метод статистической линеаризации, метод моментных функций) не всегда могут дать решение с требуемой точностью. Но при малых нелинейностях приближенные численные методы решения могут быть полезными. Получить точные численные решения нелинейных уравнений статистической динамики без линеаризации исходных уравнений можно методами теории марковских процессов и методами статистических испытаний. В этом параграфе для решения нелинейных уравнений первого и второго порядка изложены наиболее популярные в вычислительной практике методы: метод статистической линеаризации, метод, использующий марковские процессы, и метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

5.5.1. Метод статистической линеаризации

На рис. 5.25, а показана система с одной степенью свободы, у которой упругая характеристика пружины (рис. 5.25, б) является нелинейной функцией смещения x . Сила сопротивления $F_2(\dot{x})$ (сила трения между массой m и направляющей) также нелинейно зависит от скорости движения $\dot{x}$.

Уравнение вынужденных колебаний массы m

$$m\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = f_0(t), \quad (5.180)$$

где $F(x, \dot{x}) = F_1(x) + F_2(\dot{x})$.

В каждом случае имеет место конкретная явная зависимость функций F_1 и F_2 соответственно от x и $\dot{x}$. Например, для показанной на рис. 5.25 конической пружины до определенных значений x можно принять (рис. 5.25, б)

$$F_1(x) = cx + c_1x^3. \quad (5.181)$$

При квадратическом законе сопротивления функцию F_2 можно представить в виде

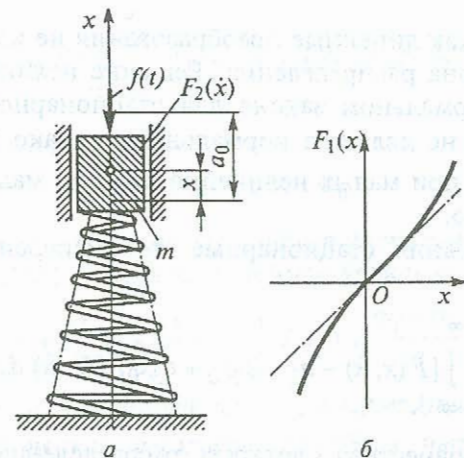


Рис. 5.25

$$F_2(\dot{x}) = \alpha \dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x}.$$

Рассмотрим метод статистической линеаризации, который заключается в замене нелинейной случайной функции $F(x, \dot{x})$ линейной, т.е.

$$F(x, \dot{x}) \approx F_* = a_1 + a_2x_0 + a_3\dot{x}_0, \quad (5.182)$$

где x_0 и $\dot{x}_0$ — центрированные случайные функции; a_i — произвольные коэффициенты, которые определяются из условия минимума дисперсии случайной функции

$$\Delta F = f(x, \dot{x}) - F_*. \quad (5.183)$$

Метод статистической линеаризации применим для стационарных нелинейных колебаний, которые возможны только в том случае, когда внешняя сила $f_0(t)$ является стационарной случайной функцией. Кроме того, предполагается, что решение $(x, \dot{x})$ имеет нормальное распределение. Для линейного уравнения (например, для уравнения (5.26)) при стационарной случайной функции $f_0(t)$, имеющей нормальный закон распределения, его стационарное решение было бы обязательно нор-

мальным, так как линейные преобразования не изменяют нормальность закона распределения. Решение нелинейного уравнения при нормальном законе для стационарной случайной функции $f_0(t)$ не является нормальным, однако можно предположить, что при малых нелинейностях оно мало отличается от нормального.

Если колебания стационарные, то дисперсия случайной функции ΔF

$$M[(\Delta F)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, \dot{x}) - a_1 - a_2 \dot{x}_0 + a_3 \ddot{x}_0] f(x, \dot{x}) dx d\dot{x}, \quad (5.184)$$

где $f(x, \dot{x})$ — совместная плотность распределения вероятности x и $\dot{x}$, которая для стационарных случайных функций от времени не зависит.

В формуле (5.184) $f(x, \dot{x})$ — неизвестная функция, поэтому приходится ввести допущение, что функция $f(x, \dot{x})$ близка к двумерному нормальному закону распределения независимых случайных функций, т.е. можно считать, что

$$f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right]}, \quad (5.185)$$

так как для стационарного процесса $m_{\dot{x}} = 0$.

Произвольные параметры a_1 , a_2 и a_3 найдем из условий

$$\frac{\partial M[(\Delta F)^2]}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.186)$$

После преобразований из (5.186) получим следующие значения для коэффициентов:

$$a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \dot{x}) f(x, \dot{x}) dx d\dot{x};$$

$$a_2 = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \dot{x})(x - m_x) f(x, \dot{x}) dx d\dot{x};$$

$$a_3 = \frac{1}{\sigma_{\ddot{x}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \dot{x}) \dot{x} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x}. \quad (5.187)$$

Из (5.187) найдем зависимости

$$a_i = a_i(m_x, \sigma_x, \sigma_{\dot{x}}). \quad (5.188)$$

В результате операции осреднения функции $F(x, \dot{x})$ вместо уравнения (5.180) получаем линейное уравнение

$$\ddot{x} + \frac{a_3}{m} \dot{x}_0 + \frac{a_2}{m} x_0 = \frac{1}{m} \dot{f}_0(t) + \frac{m_f - a_1}{m}. \quad (5.189)$$

Так как x_0 и f_0 — центрированные случайные функции, то, взяв математическое ожидание от обеих частей уравнения (5.189), получим

$$m_f - a_1 = 0 \quad (a_1 = a_1(m_x, \sigma_x, \sigma_{\dot{x}})). \quad (5.190)$$

Окончательно имеем уравнение

$$\ddot{x}_0 + \frac{a_3}{m} \dot{x}_0 + \frac{a_2}{m} x_0 = \frac{1}{m} \dot{f}_0(t). \quad (5.191)$$

Спектральные плотности x и $\dot{x}$

$$S_x(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_f(\omega), \quad S_{\dot{x}}(\omega) = |W(i\omega)|^2 \omega^2 S_f(\omega),$$

поэтому среднеквадратичные значения x и $\dot{x}$ находят из соотношений

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_f d\omega \quad (5.192)$$

и

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 \omega^2 S_f d\omega. \quad (5.193)$$

В результате получаем три уравнения (5.190), (5.192), (5.193) для определения трех неизвестных m_x , σ_x и $\sigma_{\dot{x}}$ в зависимости от m_f и σ_f .

Пример 5.7. Требуется найти среднее число N превышений центром тяжести массы m уровня a_0 за заданное время t_k . Характеристика пружины нелинейна. Рассмотрим стационарные случайные колебания массы, представленной на рис. 5.25, а, причем считаем, что характеристика пружины $F_1(x)$ может быть представлена в виде (5.181), а сила сопротивления линейно зависит от $\dot{x}$.

На массу m действует стационарная случайная сила типа нормального белого шума. т.е.

$$m_{f_0} = \text{const}, \quad S_{f_0} = s_0.$$

Уравнение движения массы m при нелинейной силе сопротивления имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p_0^2 x + \mu x^3 = \frac{1}{m} (\dot{f}_0 + m_{f_0}) \quad \left(\mu = \frac{c_1}{m} \right). \quad (5.194)$$

При $\mu = 0$ уравнение (5.194) становится линейным, а его решение — нормальным стационарным процессом. При $\mu \neq 0$ решение уравнения (5.194) не является нормальным процессом, но при малых значениях μ можно предположить, что оно мало отличается от нормального, и это дает возможность воспользоваться формулами (5.187) для определения коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 . После вычисления интегралов (5.187) получим

$$a_1 = \mu m_x (m_x^2 + 3\sigma_x^2); \quad a_2 = 3\mu (m_x^2 + \sigma_x^2); \quad a_3 = 2n. \quad (5.195)$$

Линеаризованное уравнение запишется как

$$\ddot{x}_0 + 2n\dot{x}_0 + p_0^2(x_0 + m_x) + a_2 x_0 + a_1 = \frac{f_0 + m_{f_0}}{m}. \quad (5.196)$$

Из (5.196) имеем

$$p_0^2 m_x + a_1 = \frac{m_{f_0}}{m}.$$

Воспользовавшись выражением для a_1 (5.195), получим первое уравнение, связывающее m_f с m_x и σ_x :

$$\mu m_x (m_x^2 + 3\sigma_x^2) = \frac{m_{f_0}}{m} - p_0^2 m_x. \quad (5.197)$$

После выделения из уравнения (5.196) постоянных составляющих получаем уравнение относительно центрированных случайных функций:

$$\ddot{x}_0 + 2n\dot{x}_0 + (p_0^2 + a_2)x_0 = \frac{f_0}{m}. \quad (5.198)$$

В рассматриваемом случае спектральные плотности x и $\dot{x}$ равны

$$S_x = \frac{s_0}{m^2 |(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2 + a_2|^2};$$

$$S_{\dot{x}} = \frac{s_0 \omega^2}{m^2 |(i\omega)^2 + 2ni\omega + p_0^2 + a_2|^2},$$

поэтому из (5.192) и (5.193) получаем

$$\sigma_x^2 = \frac{s_0}{4nm^2 [p_0^2 + 3\mu (m_x^2 + \sigma_x^2)]}; \quad \sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{s_0}{4nm^2}. \quad (5.199)$$

Из уравнений (5.197), (5.199) определяем m_x , σ_x и $\sigma_{\dot{x}}$. В частном случае, когда $m_f = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= -\frac{p_0^2}{6\mu} + \sqrt{\frac{p_0^4}{36\mu} + \frac{s_0}{12nm^2\mu}} = \\ &= \sigma_{x_0}^2 \left(-1 + \sqrt{1 + 6\mu} \right) \frac{1}{3\mu_1} = \sigma_{x_0}^2 h_1, \end{aligned} \quad (5.200)$$

где $\sigma_{x_0}^2 = \frac{1}{2ap_0^2}$ — дисперсия решения при $\mu = 0$; $a = \frac{2nm^2}{s_0}$;

$\mu_1 = \frac{\mu}{ap_0^4}$ — безразмерный малый параметр.

Число превышений уровня a_0 найдем, воспользовавшись формулой (5.172) (число превышений в 2 раза меньше числа пересечений уровня a_0):

$$N = \frac{t_k \sigma_{\dot{x}}}{3\pi\sigma_x} e^{-\frac{(a_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Пример 5.8. На рис. 5.26 схематично показан акселерометр, представляющий собой упруго закрепленную массу m на пружинах с линейной характеристикой (с суммарной жесткостью c). На массу m , кроме медленно меняющейся инерционной силы (которую должен измерять акселерометр), действует стационарное возмущение $f_0(t)$, вызывающее колебания массы m . Для уменьшения влияния случайного возмущения на показание акселерометра масса m находится в полости, заполненной жидкостью. При движении массы сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости $\dot{x}$. Так как номинальная сила, действующая на массу m , меняется во времени очень медленно, то скорость движения массы в номинальном режиме мала и силой сопротивления можно пренебречь, поэтому сила сопротивления основное влияние оказывает на случайные колебания.

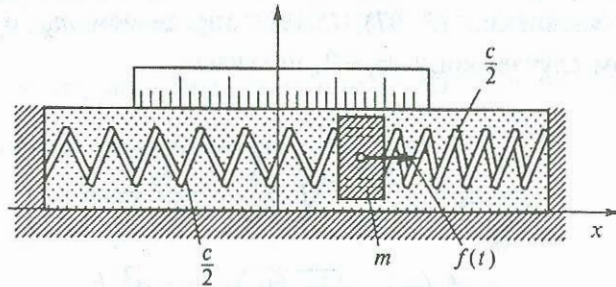


Рис. 5.26

Обозначив через Δx отклонение массы m от номинального положения, запишем выражение для силы сопротивления:

$$F_c = \alpha_1 \Delta \dot{x}^2 \text{sign } \Delta \dot{x}.$$

Вероятностные характеристики случайного возмущения считаем известными:

$$m_{f_0} = \text{const}; \quad S_{f_0} = \frac{2\alpha\sigma_{f_0}^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (K_f = \sigma_{f_0}^2 e^{-\alpha|\tau|}).$$

Требуется определить математическое ожидание $m_{\Delta x}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Delta x}$ случайного смещения массы m , считая, что имеют место стационарные случайные колебания. Уравнение движения массы m имеет вид

$$\Delta \ddot{x} + n_1 \Delta \dot{x}^2 \text{sign } \Delta \dot{x} + p_0^2 \Delta x = \frac{f}{m} \quad \left(n_1 = \frac{\alpha_1}{m} \right). \quad (5.201)$$

Нелинейную силу сопротивления $n_1 \Delta \dot{x}^2 \text{sign } \Delta \dot{x}$ заменим линейной:

$$n_1 \Delta \dot{x}^2 \text{sign } \Delta \dot{x} \approx a_1 + a_3 \Delta \dot{x}_0.$$

Найдем a_1 и a_3 по формулам (5.187). После вычислений имеем

$$a_1 = 0; \quad a_3 = \frac{4n_1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_{\Delta \dot{x}}; \quad m_{\Delta x} = \frac{m_{f_0}}{c}.$$

В результате получаем линейное уравнение относительно централизованного случайного смещения

$$\Delta \ddot{x}_0 + a_3 \Delta \dot{x}_0 + p_0^2 \Delta x_0 = \frac{\dot{f}_0}{m}. \quad (5.202)$$

Дисперсии Δx_0 и $\Delta \dot{x}_0$ соответственно равны:

$$D_{\Delta x} = \sigma_{\Delta x}^2 = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2\sigma_{\dot{f}}^2 \left(\alpha + \frac{4n_1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_{\Delta \dot{x}} \right)}{p_0^2 \sqrt{2} \sigma_{\Delta \dot{x}} \left(p_0^2 + \frac{4n_1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_{\Delta x} \alpha + \alpha^2 \right)}; \quad (5.203)$$

$$D_{\Delta x} = \sigma_{\Delta \dot{x}}^2 = \frac{\sqrt{\pi} \alpha \sigma_f^2}{\sqrt{2} \sigma_{\Delta \dot{x}} \left(p_0^2 + \frac{4n_1}{\sqrt{2}n} \sigma_{\Delta x} \alpha + \alpha^2 \right)}. \quad (5.204)$$

Из выражения (5.204) определяем $\sigma_{\Delta \dot{x}}$, а затем $\sigma_{\Delta x}$ по формуле (5.203).

Изложенный выше метод статистической линеаризации дает приближенное решение простейших задач динамики нелинейных систем, справедливое при ряде ограничений на входное воздействие и механическую систему. К таким ограничениям относятся следующие: малость нелинейных членов в левой части уравнения (5.180) и предположение, что закон распределения решения близок к нормальному. Эти ограничения существенно уменьшают информацию о случайном процессе, позволяя получить только приближенные значения вероятностных характеристик решения. Для случая, когда нелинейности нельзя рассматривать как малые, а также при анализе нестационарных процессов метод статистической линеаризации не применяют.

Для того чтобы ответить на вопрос, каков истинный закон распределения решения уравнения типа (5.180) при стационарной правой части, надо воспользоваться теорией марковских процессов.

5.5.2. Решение нелинейных уравнений с использованием марковских процессов

Изложенный в предыдущем пункте метод статистической линеаризации позволяет нелинейное уравнение свести к линейному. Но ответить на вопрос, с какой точностью получено решение, нельзя. Для этого надо знать точное решение, которое, например, в ряде случаев можно получить, воспользовавшись теорией марковских процессов.

Рассмотрим уравнение (5.194), которое можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка, полагая $\dot{x} = y_1$, $x = y_2$ (ограничимся случаем, когда $m_f = 0$, а f_0 — возмущение типа белого шума с $K_f = s_0 \delta(\tau)$):

$$\dot{y}_1 + 2ny_1 + p_0^2 y_2 + \mu y_2^3 = \frac{f_0}{m}; \quad \dot{y}_2 - y_1 = 0. \quad (5.205)$$

Второе уравнение Колмогорова (4.89) для стационарного процесса имеет вид

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 2nf - 2ny_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - (p_0^2 y_2 + \mu y_2^3) \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{s_0}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} = 0 \quad (f = f(y_1, y_2)). \quad (5.206)$$

Уравнение (5.206) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left[(p_0^2 y_2 + \mu y_2^3) f + \frac{s_0}{4nm^2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \right] + \left[-\frac{\partial}{\partial y_2} + 2n \frac{\partial}{\partial y_1} \right] \left(y_1 f + \frac{s_0}{4nm^2} \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) = 0. \quad (5.207)$$

Для решения уравнения (5.207) положим

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2),$$

т.е. примем, что y_1 и y_2 независимы.

В этом случае двумерный закон распределения можно представить в виде произведения одномерных законов распределения (1.52). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ f_1 \left[(p_0^2 y_2 + \mu y_2^3) f_2 + \frac{s_0}{4nm^2} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right] \right\} + \left(-\frac{\partial}{\partial y_2} + 2n \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \left[f_2 \left(y_1 f_1 + \frac{s_0}{4nm^2} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right) \right] = 0, \quad (5.208)$$

которое обращается в тождество, если функции f_1 и f_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \frac{(p_0^2 + \mu y_2^3) 4nm^2}{s_0} f_2 = 0; \quad \frac{df_1}{dy_1} + \frac{4nm^2}{s_0} y_1 f_1 = 0. \quad (5.209)$$

Решения уравнений (5.209) имеют вид

$$f_1 = c_1 e^{-\frac{4nm^2}{2s_0} y_1^2}; \quad (5.210)$$

$$f_2 = c_2 e^{-\frac{4nm^2}{2s_0} p_0^2 y_2^2} e^{-\mu \frac{4nm^2}{4s_0} y_2^4}.$$

Произвольные постоянные c_1 и c_2 находим из условий

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y_1) dy_1 = 1; \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y_2) dy_2 = 1. \quad (5.211)$$

Из первого условия (5.211) имеем

$$c_1 = \sqrt{\frac{2nm^2}{\pi s_0}}. \quad (5.212)$$

Из полученных выражений для f_1 и f_2 следует, что закон распределения y_1 (первой производной $\dot{y}$) нормальный, а закон распределения y_2 не является нормальным, как предполагалось в методе статистической линеаризации. Только при $\mu = 0$ f_2 переходит в нормальный закон.

Зная законы распределения f_1 и f_2 , находим дисперсии

$$D_{y_1} = \sigma_x^2 = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 f_1(y_1) dy_1; \quad (5.213)$$

$$D_{y_2} = \sigma_x^2 = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} y_2^2 f_2(y_2) dy_2. \quad (5.214)$$

Из (5.213) находим выражение для дисперсии σ_x^2 , точно совпадающее с выражением (5.199), полученным по методу статистической линеаризации. Уравнение (5.208) дает возможность численно определить σ_x^2 при любом μ в отличие от выражения (5.200), справедливого только для малых значений μ .

Рассмотрим алгоритм решения примера 5.8 с использованием теории марковских процессов. Основная особенность этого примера в том, что случайное возмущение не является белым шумом, так как спектральная плотность S_f зависит от ω .

Процесс с корреляционной функцией вида

$$K_f = \sigma_f^2 e^{-\alpha |\tau|}$$

всегда можно представить как результат прохождения белого шума через линейную систему первого порядка вида (§ 4.3)

$$\dot{f}_0 + \alpha f_0 = \sqrt{2\alpha} \sigma_f \varepsilon(t), \quad (5.215)$$

где $\varepsilon(t)$ — стационарное случайное возмущение типа белого шума с $m_\varepsilon = 0$, $K_\varepsilon = s_0 \delta(\tau)$.

Из уравнения (5.215) получаем спектральную плотность случайной функции f , совпадающую с примером (5.8):

$$S_f = \frac{2\alpha\sigma_f^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Уравнение (5.215) надо рассматривать совместно с уравнением (5.201), которое можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка. В результате получаем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + n_1 y_1^2 \operatorname{sign} y_1 + p_0^2 y_2 &= \frac{1}{m} y_3; \\ \dot{y}_2 - y_1 &= 0; \end{aligned} \quad (5.216)$$

$$\dot{y}_3 + \alpha y_3 = \sqrt{2\alpha} \sigma_f \varepsilon(t),$$

где $y_f = \Delta \dot{x}$, $y_2 = \Delta x$, $y_3 = f_0$.

Система уравнений (5.216) описывает трехмерный марковский процесс. Второе уравнение Колмогорова для этого случая, считая, что имеют место стационарные колебания массы m (частный случай уравнения (4.88)), можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left[\left(\frac{1}{m} y_3 - n_1 y_1^2 \operatorname{sign} y_1 - p_0^2 y_2 \right) f \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_2} (v_1 f) - \frac{\partial}{\partial y_3} (\alpha y_3 f) - \frac{1}{2} 2\alpha \sigma_f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} = 0. \quad (5.217)$$

Если коэффициенты a_i линейно зависят от y_i , а b_{ij} — постоянные, то решение уравнений типа (5.217) можно получить в аналитической форме. Метод решения уравнений многомерных марковских процессов для случая, когда

$$a_i = a_{0i} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j; \quad b_{ij} = \text{const},$$

изложен в работе [35].

5.5.3. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)

Выше были изложены два метода решения нелинейных уравнений первого и второго порядка: метод статистической линеаризации и метод, использующий марковские процессы. Первый метод является приближенным, поэтому, как уже известно, оценить точность и достоверность получаемых этим методом результатов нельзя. Чтобы обезопасить себя от грубых результатов, сделаем оговорку, что метод статистической линеаризации дает приемлемые результаты при малых нелинейностях, например, при малом μ , входящем в уравнение (5.194). Но установить интервал изменения μ , на котором его можно считать малым и какая будет для этого интервала изменения μ и погрешность решения, нельзя.

Недостатком метода является и необходимость постулирования законов распределения решения, которые неизвестны. Так как до решения информация о законах распределения «выхода» отсутствует, то приходится вводить вероятностные гипотезы, например, считать, что законы распределения «выхода» являются нормальными. Обосновать достоверность такого предположения нельзя. Установить точность решения с использованием метода статистической линеаризации можно только зная точное решение. Но если известно точное решение, то необходимость в приближенном решении отпадает. Поэтому область применения метода статистической линеаризации в

прикладных задачах (когда надо нести ответственность за результаты расчетов) очень ограничена. Но основную идею метода — замену в уравнении нелинейных слагаемых линейными — полезно знать, так как эта идея используется и при линеаризации нелинейных уравнений детерминированных колебаний (в основном уравнений второго порядка). Применение метода статистической линеаризации при решении систем нелинейных уравнений, когда надо вводить в алгоритм решения многомерные законы распределения, приводит к практически непреодолимым вычислительным трудностям.

Метод марковских процессов позволяет (теоретически) получать точные законы распределения компонент вектора состояния нелинейной динамической системы любой размерности и точные значения вероятностных характеристик компонент вектора состояния в любой момент времени. На практике, к сожалению, это далеко не так. Получить точное решение уравнения Колмогорова, особенно когда надо учитывать реальные случайные возмущения (а не белый шум), для реальной нелинейной механической системы с несколькими степенями свободы практически невозможно. Поэтому опять остаются только приближенные методы решения уравнения Колмогорова, требующие введения в алгоритм решения упрощений и предположений, что приводит, как и в методе статистической линеаризации, к несоответствию приближенного и точного решения. Оценить это несоответствие нельзя, так как нет точного решения. Свободным от этих недостатков является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Метод основан на численном решении исходных нелинейных уравнений без их упрощения.

Рассмотрим подробнее алгоритм решения нелинейных уравнений методом статистических испытаний на примере простейшей системы (рис. 5.27, а), имеющей один вход x и один выход y . Получив n решений для n реализаций случайной функции $x(t)$, пользуясь формулами математической статистики, находим математическое ожидание и дисперсию решения

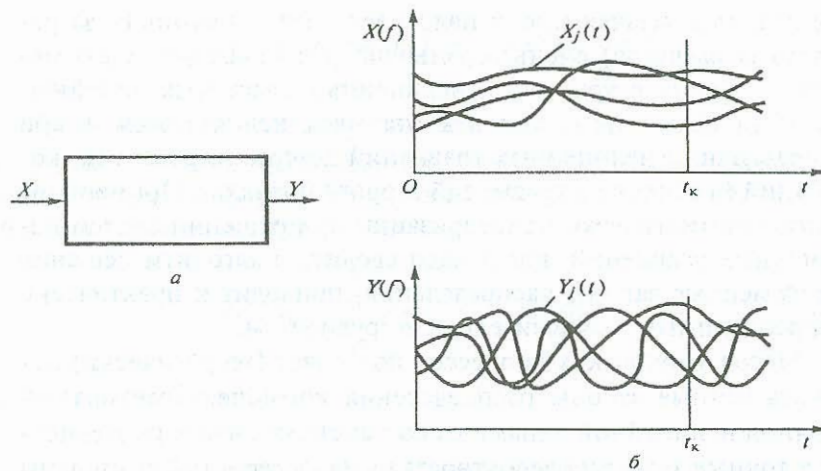


Рис. 5.27

$$\tilde{m}_y(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(t);$$

$$D_y(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{m}_y)^2.$$

Точность получаемых вероятностных характеристик решения математического ожидания и дисперсии зависит от числа решений n и оценивается средними квадратическими отклонениями оценок на основании формул математической статистики:

$$\sigma_{\tilde{m}_y}(t) = \sqrt{(\tilde{D}_y(t))/n}; \quad (5.218)$$

$$\sigma_{\tilde{D}_y} = \sqrt{\frac{2}{n-1} \tilde{D}_y(t)}. \quad (5.219)$$

Более полная оценка точности получаемых при решении результатов может быть получена на основе вычисления дове-

рительных вероятностей различных отклонений оценок $\tilde{m}_y$ и $\tilde{D}_y$ от соответствующих истинных вероятностных характеристик. Эти вероятности могут быть оценены приближенно при условии, что законы распределения оценок близки к нормальным, по следующим формулам:

$$P_1 = P(|\tilde{m}_y - m_y| < \varepsilon_1) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_{\tilde{m}_y}}\right);$$

$$P_2 = P(|\tilde{D}_y - D_y| < \varepsilon_2) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_{\tilde{D}_y}}\right),$$

где P_1, P_2 — доверительные вероятности; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — заданные границы отклонения оценок; $\Phi(\varepsilon_1/\sigma_{\tilde{m}_y})$ и $\Phi(\varepsilon_2/\sigma_{\tilde{D}_y})$ — интегралы вероятности.

Воспользовавшись соотношениями (5.218) и (5.219), получим

$$P_1 = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_1 \sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{D}_y}}\right);$$

$$P_2 = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_2 \sqrt{(n-1)/2}}{\tilde{D}_y}\right).$$

В табл. 5.1 и 5.2 приведены значения чисел испытаний (решений) n , необходимых для получения результатов с заданными относительными отклонениями $v_1 = \varepsilon_1/\sqrt{\tilde{D}_y}$, $v_2 = \varepsilon_2/\tilde{D}_y$ и точностью P_1 и P_2 .

Приведенные таблицы показывают, что с повышением требований к точности вероятностных характеристик $\tilde{m}_y(t)$ и $\tilde{D}_y(t)$ необходимое число решений n значительно увеличивается. Поэтому метод статистических испытаний из-за отсутствия быстродействующей вычислительной техники не получил распространения в практике проектирования. В настоящее время

проведение большого числа вычислительных экспериментов особых сложностей не вызывает.

Таблица 5.1

Число испытаний для определения математических ожиданий при различных значениях ν_1

P_1	ν_1				
	0,2	0,15	0,10	0,05	0,01
0,6	18	31	70	281	7000
0,7	27	47	108	431	10800
0,8	41	73	164	651	16400
0,9	68	121	272	1090	27200

Таблица 5.2

Число испытаний для определения дисперсии при различных ν_2

P_2	ν_2				
	0,2	0,15	0,10	0,05	0,01
0,6	37	63	141	563	14000
0,7	55	95	217	863	21600
0,8	83	147	239	1300	32800
0,9	137	243	545	2180	54400

Если необходимо получить закон распределения выходной величины y (см. рис. 5.27, а) в момент времени t_k , то полученные численные значения $y_i(t_k)$, соответствующие случайным функциям x_i (см. рис. 5.27, б), делят на разряды (интервалы значений $y_v(t)$) и подсчитывают число k_j значений $y_i(t_k)$, приходящихся на v -й интервал. Это число делят на общее число решений и получают частоту P_v появления числового значения решения $y_i(t_k)$, соответствующего данному интервалу (y_v, y_{v+1}) $\left(P_v = \frac{k_v}{n}\right)$. В результате получается гистограмма (рис. 5.28). Увеличивая число решений n , интервалы (y_v, y_{v+1}) можно уменьшать, а их число увеличить. При этом

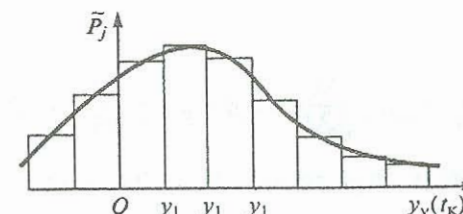


Рис. 5.28

гистограмма будет приближаться к некоторой кривой, которую можно рассматривать как плотность вероятности функции $y(t_k)$ в момент t_k . При рассмотрении механической системы с конечным числом степеней свободы с одной случайной функцией на «входе» можно получить одномерные законы распределения для обобщенных координат и их первых производных в любые моменты времени. Полученная методом статистических испытаний информация о законах распределения обобщенных координат и их скоростей достаточна для решения сложных прикладных задач, когда не требуется знания многомерных законов распределения компонент вектора состояния механической системы.

Метод статистических испытаний может быть применен как к нелинейным системам, где он особенно эффективен, так и к линейным, причем любой размерности. При применении этого метода к нелинейным системам в каждой математической реализации следует учитывать все действующие случайные возмущения, так как для нелинейных систем принцип суперпозиции не выполняется.

Глава 6. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В главе изложены теория и методы исследования случайных колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы. Рассмотрены конкретные примеры, иллюстрирующие алгоритмы численного решения задач при нестационарных и стационарных случайных колебаниях.

§ 6.1. Свободные случайные колебания линейных систем

Представление реальной механической системы как системы с одной степенью свободы, как правило, является приближенным. Например, показанная на рис. 6.1 система, которая обычно рассматривается как система с одной степенью свободы, есть система с двумя степенями свободы (если пренебречь инерцией стержня и рассматривать движение массы только в плоскости чертежа), так как реальная сосредоточенная масса имеет отличный от нуля момент инерции J_0 относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа.

Воспользовавшись методом сил, получим следующие два уравнения движения (рис. 6.2):

$$\begin{aligned} y &= \delta_{11}(-m\ddot{y}) + \delta_{12}(-J_0\ddot{\varphi}); \\ \varphi &= \delta_{21}(-m\ddot{y}) + \delta_{22}(-J_0\ddot{\varphi}), \end{aligned} \quad (6.1)$$

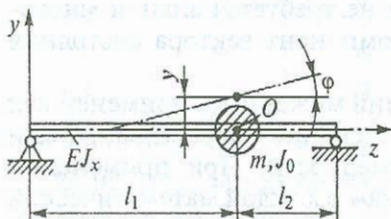


Рис. 6.1

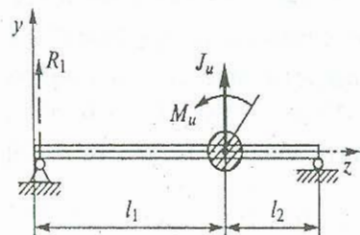


Рис. 6.2

где

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ_x}; \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^3}{2EJ_x}; \delta_{23} = \frac{l}{EJ_x}.$$

Систему уравнений (6.1) можно представить в векторной записи:

$$\Delta M \ddot{y} + y = 0, \quad (6.2)$$

где

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix}.$$

Векторная форма записи существенно упрощает изучение колебательных систем со многими степенями, так как уравнение (6.2) справедливо и для систем, имеющих любое конечное число степеней свободы:

$$M \ddot{y} + C y = 0 \quad (C = \Delta^{-1}) \quad (6.3)$$

или

$$\ddot{y} + A_1 y = 0, \quad (6.4)$$

где

$$A_1 = M^{-1} C.$$

Для решения на ЭВМ необходимо уравнение (6.4) представить в виде системы двух уравнений первого порядка, что можно сделать, если ввести новые неизвестные векторы $z_1 = \dot{y}$, $z_2 = y$. В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 + A_1 z_2 &= 0, \\ \dot{z}_2 - z_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

или

$$\dot{Z} + A Z = 0, \quad (6.6)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ -E & 0 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (Z = (\dot{y}, \dot{\varphi}, y, \varphi)^T).$$

Вектор Z имеет размерность 4, его называют *вектором состояния системы*. Первые n (1, 2, ..., n) компонент вектора Z являются производными от обобщенных координат по t , а последующие n компонент ($n+1$, $n+2$, ..., $2n$) есть обобщенные координаты.

Система уравнений (6.5) не учитывает силы сопротивления. С учетом сил сопротивления, если принять, что силы сопротивления пропорциональны первым производным от обобщенных координат, в уравнение (6.3) надо ввести еще одно слагаемое $B\dot{Z}$, где B — матрица, элементы которой b_{ij} являются коэффициентами сил трения.

Уравнение (6.3) с учетом сил сопротивления принимает вид

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = 0. \quad (6.7)$$

При учете сил трения в уравнении (6.6) изменится только матрица A :

$$A = \begin{bmatrix} M^{-1}B & A_1 \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы $M^{-1}B$ в дальнейшем обозначаются через b_{ij} . При случайных свободных колебаниях начальные данные при $t = 0$ являются случайными величинами, вероятностные характеристики которых считаем известными, т.е. известны их математические ожидания $m_{z_{i0}}$ и дисперсии $D_{z_{i0}}$ (для (6.6) с учетом сил вязкого сопротивления). В более общем случае, когда компоненты вектора Z в начальный момент времени между собой коррелируют, известны корреляционные моменты $K_{z_{i0}z_{j0}}$. Решение уравнения (6.6) в векторной форме имеет вид

$$Z = K(t) C, \quad (6.8)$$

где $K(t)$ — фундаментальная матрица решений системы однородных уравнений; C — произвольный вектор.

При численном решении уравнения (6.6) можно выбрать алгоритм получения столбцов матрицы $K(t)$ такой, что при $t =$

$= 0$ матрица $K(0)$ равна единичной, т.е. $K(0) = E$. В этом случае произвольный вектор C равен вектору начальных данных Z_0 , т.е.

$$Z = K(t) Z_0. \quad (6.9)$$

Все предыдущие выкладки и запись решения уравнения (6.6) в форме (6.9) справедливы и когда начальные данные детерминированные. Найдем математические ожидания, корреляционные и взаимно корреляционные функции компонент вектора Z .

Математическое ожидание вектора Z

$$M[z] = m_z = K(t) m_{z_0}, \quad (6.10)$$

где m_z — вектор, компонентами которого являются математические ожидания компонент вектора Z ; m_{z_0} — вектор, компонентами которого являются значения $m_{z_{j0}}$.

Математические ожидания компонент вектора Z

$$m_{z_i} = \sum_{j=1}^{2n} k_{ij} m_{z_{j0}}. \quad (6.11)$$

Для определения корреляционных и взаимно корреляционных функций компонент вектора решений представим решение (6.9) в скалярной форме записи:

$$z_j(t) = \sum_{j=1}^{2n} k_{ij}(t) z_{j0}. \quad (6.12)$$

Зная математические ожидания m , можно получить выражение для центрированных случайных компонент вектора решений:

$$\overset{\circ}{z}_i(t) = z_i(t) - m_{z_i}(t) = \sum_{j=1}^{2n} k_{ij} \overset{\circ}{z}_{j0};$$

$$M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{z}_i(t) & \overset{\circ}{z}_k(t') \end{bmatrix} = K_{z_i z_k} =$$

$$= M \left[\left(\sum_{j=1}^{2n} k_{ij}(t) \overset{\circ}{x}_{j0} \right) \left(\sum_{v=1}^{2n} k_{kv}(t) \overset{\circ}{z}_{v0} \right) \right]. \quad (6.13)$$

Для частного случая, когда $K_{z_{i0}z_{k0}} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} K_{z_i z_k} &= \sum_{v=1}^{2n} k_{iv}(t) k_{kv}(t') D_{z_{v0}}; \\ K_{z_i z_i} &= \sum_{v=1}^{2n} k_{iv}(t) k_{kv}(t') D_{z_{v0}}; \\ D_{z_i} &= \sum_{v=1}^{2n} k_{iv}^2(t) D_{z_{v0}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В результате получены все вероятностные характеристики компонент вектора состояния при случайных свободных колебаниях линейной системы с конечным числом степеней свободы, вызванных случайными начальными данными.

При расчете наибольший интерес представляют случайные динамические напряжения, возникающие в элементах конструкции, например нормальное напряжение в сечении k стержня (см. рис. 6.2). Найдем вероятностные характеристики нормального напряжения в сечении k :

$$\sigma_{\max} = \frac{R_1 l_1}{W_x}, \quad (6.15)$$

где R_1 — реакция в шарнире.

Воспользовавшись принципом Даламбера, получаем

$$R_1 = \frac{1}{(l_1 + l_2)} (-J_{\text{и}} l^2 + M_{\text{и}}), \quad (6.16)$$

где $J_{\text{и}}$, $M_{\text{и}}$ — соответственно инерционные сила и момент, $J_{\text{и}} = -m \ddot{y}$, $M_{\text{и}} = -J_o \phi$.

Из уравнений (6.1) определяем

$$\ddot{y} = -\frac{\delta_{22}}{m \Delta} y + \frac{\delta_{12}}{m \Delta} \phi \quad (\Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21});$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\delta_{21}}{J_o \Delta} y - \frac{\delta_{11}}{J_o \Delta} \phi. \quad (6.17)$$

После преобразований с учетом (6.16) и (6.17) получаем

$$\sigma_{\max} = b_1 y + b_2 \phi, \quad (6.18)$$

где

$$b_1 = -\frac{(\delta_{21} + \delta_{22} l_2) l_1}{W_x (l_1 + l_2) \Delta}; \quad b_2 = -\frac{(\delta_{11} + \delta_{12} l_2) l_1}{W_x (l_1 + l_2) \Delta}.$$

Для определения максимально возможного значения $\sigma_{\max}$, зависящего от двух случайных функций y и ϕ , необходимо знать совместный закон распределения $f(y, \phi, t)$. Считая, что закон совместного распределения y и ϕ является нормальным законом распределения, находим параметры закона распределения случайной функции $\sigma_{\max}$, линейно зависящей от случайных функций y и ϕ (6.18). В этом случае распределение $\sigma_{\max}$ будет также нормальным со следующими параметрами:

$$m_{\sigma_{\max}}(t) = b_1 m_y(t) + b_2 m_{\phi}(t); \quad (6.19)$$

$$(\sigma_{\sigma_{\max}})^2 = b_1^2 \sigma_y^2(t) + b_2^2 \sigma_{\phi}^2(t) + 2b_1 b_2 K_{y\phi}(t), \quad (6.20)$$

где

$$K_{y\phi} = K_{z_3 z_4}(t, t). \quad (6.21)$$

Взаимно корреляционная функция (6.21) есть частный случай (6.12) при $n = 2$ (если начальные данные независимы).

Определив параметры нормального распределения для $\sigma_{\max}$, находим максимально возможное значение нормального напряжения $\sigma_{\max}$ в каждый момент времени:

$$\max(\sigma_{\max}(t)) = m_{\sigma_{\max}}(t) + 3\sigma_{\sigma_{\max}}(t). \quad (6.22)$$

§ 6.2. Колебания при случайном импульсном нагружении

Часто в прикладных задачах приходится рассматривать движение системы, вызванное действием случайного импульса

силы (или системы сил). На рис. 6.3 показан случай наезда автомобиля на единичную неровность, резко отличающуюся от остальных неровностей дороги по высоте. При большой скорости горизонтального движения автомобиля действие этой неровности эквивалентно одиночному импульсу силы, который приведет к резкому изменению полного вектора скорости $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}_1 + \dot{y} \mathbf{i}_2$ и угловой скорости $\omega = \dot{\varphi}$.

Считаем, что при движении автомобиля смещение центра тяжести (точка 0) и поворот автомобиля как жесткого целого происходит в плоскости чертежа. В более общем случае возможен наезд колесом на неровность, что приведет к возникновению пространственных колебаний (если до этого колебания были в плоскости чертежа).

В зависимости от конкретных условий задачи и целей, для которых предназначена конструкция, конечная цель расчета может быть различной. Например, при расчете конструкции, показанной на рис. 6.4, при ее импульсном нагружении $\mathbf{J}_j$ инженера-расчетчика могут интересовать следующие вопросы: 1) максимально возможные отклонения масс от вертикального положения; 2) максимально возможные динамические напряжения, возникающие в конструкции. Рассмотрим последовательно эти задачи. При действии на массы m_i импульсных нагрузок $\mathbf{J}_j$ (рис. 6.4) массы после прекращения действия импульса приобретают скорости, равные (при $\mathbf{J}_i = J_i \mathbf{i}_1$)

$$\dot{x}_{1i}(0) = \frac{J_1}{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.23)$$

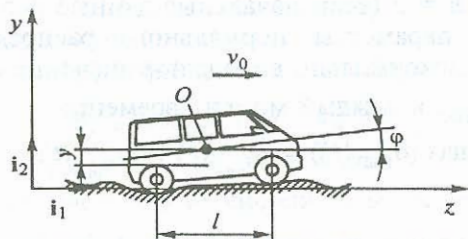


Рис. 6.3

Считаем, что законы распределения J_j известны (рис. 6.5 или рис. 6.6).

Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда направления $\mathbf{J}_j$ известны, например случай, когда $\alpha = 0$. После окончания действия импульсов сил массы получают скорости, например, при $\mathbf{J}_i = J_i \mathbf{i}_1$

$$\dot{x}_{1i} = \frac{J_j}{m_j}, \quad (6.24)$$

которые можно рассматривать как начальные данные последующего свободного движения системы. (При импульсном нагружении смещения x_{1j} после окончания действия импульса равны нулю.)

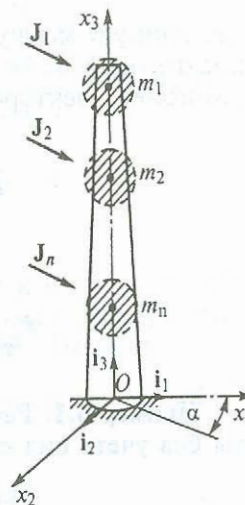


Рис. 6.4

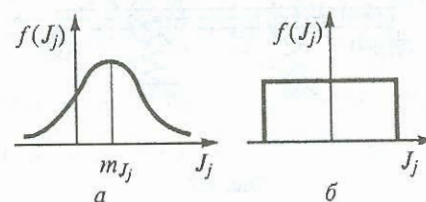


Рис. 6.5

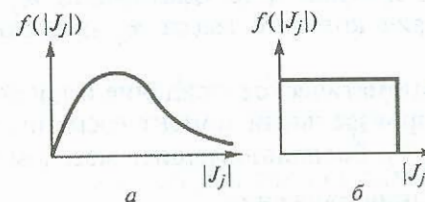


Рис. 6.6

В данном случае вектор начальных данных

$$\mathbf{X}_0 = (\dot{x}_{11}, \dot{x}_{12}, \dots, \dot{x}_{1n}, 0, \dots, 0)^T,$$

т.е. данную задачу можно рассматривать как частный случай предыдущей задачи. Поэтому вероятностные характеристики компонент вектора Z равны (при $k = n$)

$$m_{z_i} = \sum_{j=1}^n k_{ij} m_{z_{nj}} = \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{m_{l_1}}{m_j}; \quad (6.25)$$

$$K_{z_i z_j} = \sum_{v=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ik}(t) k_{jv}(t') K_{z_{k0} z_{v0}}. \quad (6.26)$$

Пример 6.1. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы без учета сил сопротивления (рис. 6.7).

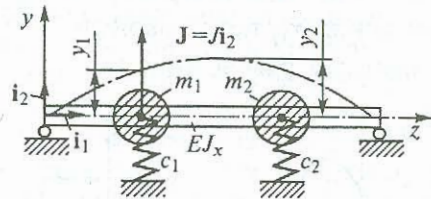


Рис. 6.7

На массу m_1 при $t = 0$ внезапно действовал случайный кратковременный импульс J (с известными m_J и D_J), после окончания действия которого масса m_1 получила случайную скорость y_{10} .

Надо найти математическое ожидание и дисперсию смещения массы m_1 в произвольный момент времени, т.е. требуется найти $m_{y_1}(t)$ и $D_{y_1}(t)$. Воспользовавшись методом сил, получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1 - c_1 y_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2 - c_2 y_2); \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1 - c_1 y_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2 - c_2 y_2) \end{aligned} \quad (6.27)$$

или

$$a_{11} \ddot{y}_1 + a_{12} \ddot{y}_2 + b_{11} y_1 + b_{12} y_2 = 0; \quad (6.28)$$

$$a_{21} \ddot{y}_1 + a_{22} \ddot{y}_2 + b_{21} y_1 + b_{22} y_2 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \delta_{11} m_1; \quad a_{12} = \delta_{12} m_2; \quad b_{11} = I + \delta_{11} c_1; \\ b_{12} &= \delta_{12} c_2; \quad a_{21} = \delta_{21} m_1; \quad a_{22} = \delta_{22} m_2; \\ b_{21} &= \delta_{21} c_1; \quad b_{22} = I + \delta_{22} c_2. \end{aligned}$$

Систему уравнений (6.28) можно свести к системе уравнений первого порядка, однако в данном частном случае решение можно получить сразу для исходной системы. Полагая

$$y_1 = A_1 \cos pt; \quad y_2 = A_2 \cos pt \quad (6.29)$$

или

$$y_1 = B_1 \sin pt; \quad y_2 = B_2 \sin pt, \quad (6.30)$$

из системы (6.28) получим

$$\begin{aligned} (b_{11} - a_{11} p^2) A_1 + (b_{12} - a_{12} p^2) A_2 &= 0; \\ (b_{21} - a_{21} p^2) A_1 + (b_{22} - a_{22} p^2) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Определив p^1 и p^2 из (6.31), находим коэффициенты распределения:

$$k_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = - \frac{b_{12} - a_{12} p_1^2}{b_{11} - a_{11} p_1^2}; \quad (6.32)$$

$$k_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = - \frac{b_{12} - a_{12} p_2^2}{b_{11} - a_{11} p_2^2}.$$

В результате получаем решение системы (6.27):

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t + A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t; \\ y_2 &= A_1 k_1 \cos p_1 t + B_1 k_1 \sin p_1 t + A_2 k_2 \cos p_2 t + B_2 k_2 \sin p_2 t. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Так как при $t = 0$ $y_1 = y_2 = \dot{y}_2 = 0$, а $\dot{y}_1 = \dot{y}_{10}$, то после определения произвольных постоянных A_i, B_i получим

$$y_1 = \frac{k_1 \ddot{y}_{10} \sin p_1 t}{p_1 (k_2 - k_1)} - \frac{k_2 \dot{y}_{10} \sin p_2 t}{p_2 (k_2 - k_1)}. \quad (6.34)$$

Математическое ожидание и дисперсия y_1 равны соответственно

$$\begin{aligned} m_{y_1}(t) &= \left[\frac{k_1 \sin p_1 t}{p_1 (k_2 - k_1)} - \frac{k_2 \sin p_2 t}{p_2 (k_2 - k_1)} \right] m_{\dot{y}_{10}}; \\ D_{y_1}(t) &= \left[\frac{k_1 \sin p_1 t}{p_1 (k_2 - k_1)} - \frac{k_2 \sin p_2 t}{p_2 (k_2 - k_1)} \right] D_{\dot{y}_{10}}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Входящие в выражения (6.35) $m_{\dot{y}_{10}}$ и $D_{\dot{y}_{10}}$ связаны с вероятностными характеристиками случайного импульса соотношениями

$$m_{\dot{y}_{10}} = \frac{m_J}{m_1}; \quad D_{\dot{y}_{10}} = \frac{D_J}{m_1^2}.$$

Приняв, что смещения y_i и их первые две производные имеют нормальное распределение, получим максимально возможное отклонение массы m_1

$$\max(y_1) = \frac{I}{m_1} \left[\frac{k_1 \sin p_1 t}{p_1 (k_2 - k_1)} - \frac{k_2 \sin p_2 t}{p_2 (k_2 - k_1)} \right] (m_J + 3\sigma_J).$$

Рассмотрим случай импульсного нагружения конструкции, когда направление импульсов $\mathbf{J}_i$ случайно (см. рис. 6.4), например, векторы $\mathbf{J}_i$ параллельны плоскости $x_1 x_3$ и произвольны по направлению ($\alpha \neq 0$). Импульс силы, действующей на массу m_i , сообщает ей скорость (при $\mathbf{J}_i = J_{ix_1} \mathbf{i}_1 + J_{ix_2} \mathbf{i}_2$)

$$\dot{\mathbf{u}}_{i0} = \dot{x}_{10} \mathbf{i}_1 + \dot{x}_{20} \mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{J}_i}{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.36)$$

В случае произвольного направления векторов $\mathbf{J}_i$ в плоскости $x_1 x_2$ считаем, что законы распределения модуля $|\mathbf{J}_i|$ известны (см. рис. 6.5, 6.6). В уравнения движения войдут

проекции $\mathbf{J}_i$ на оси x_1 и x_2 (J_{ix_1} и J_{ix_2}), которые связаны дополнительным условием

$$(J_{ix_1})^2 + (J_{ix_2})^2 = |\mathbf{J}_i|^2. \quad (6.37)$$

В этом случае надо знать закон распределения модуля случайной величины, распределенной по нормальному закону, плотность вероятности которой подчиняется закону

$$f(|\mathbf{J}_i|) = \frac{1}{\sigma_{J_i} \sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(J_i - m_{J_i})^2}{2\sigma_{J_i}^2}} + e^{-\frac{(J_i + m_{J_i})^2}{2\sigma_{J_i}^2}} \right), \quad (6.38)$$

где m_{J_i} и σ_{J_i} — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение исходного нормального закона распределения [38] для J_i . На рис. 6.8 приведены графики изменения $f(|\mathbf{J}_i|)$ для ряда значений m_{J_i} .

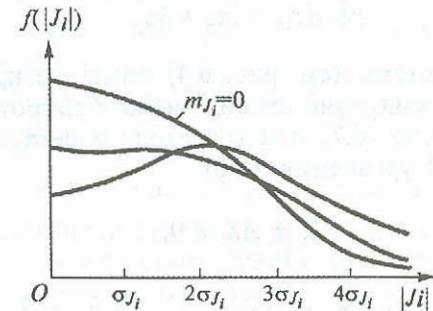


Рис. 6.8

Считая, что компоненты вектора $\mathbf{Z}$ имеют нормальные распределения, воспользуемся правилом трех сигм для определения максимально возможных их значений в произвольный момент времени:

$$\max(z_i(t)) = m_{J_i} + 3\sigma_{J_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n). \quad (6.39)$$

Первые n соотношений (6.39) есть максимально возможные скорости масс m_i , последующие $(n + 1, n + 2, \dots, 2n)$ соотношения есть максимально возможные отклонения масс от со-

стояния равновесия. Для получения максимально возможных ускорений масс m_j (перегрузок) из уравнения (6.6) находим (с учетом (3.9)) производную вектора состояния

$$\dot{\mathbf{Z}} = -AK\mathbf{Z}_0. \quad (6.40)$$

Первые n компонент вектора $\dot{\mathbf{Z}}$ есть ускорения (в данном примере линейные ускорения масс). Математические ожидания и дисперсии первых n компонент вектора $\mathbf{Z}$ (при $K_{z_0, z_{0k}} = 0$, если $i \neq k$):

$$m_{z_j} = \sum_{v=1}^n k_{jv}^{(1)} m_{z_{0v}} \left(m_{z_{0v}} = \frac{m_{J_v}}{m_v} \right);$$

$$D_{z_j} = \sum_{v=1}^n k_{jv}^{(1)} D_v \left(D_v = \frac{D_{J_v}}{m_v^2} \right),$$

где $k_{jv}^{(1)}$ — элементы матрицы $K^{(1)} = -AK$.

Максимально возможные ускорения масс m_j

$$\max(\dot{z}_j) = m_{z_j} + 3\sigma_{z_j}. \quad (6.41)$$

Движение системы (см. рис. 6.4) после прекращения действия импульсов сил с учетом сил вязкого сопротивления аналогично уравнению (6.7) или (переходя в систему уравнений первого порядка) уравнению (6.6):

$$\dot{\mathbf{Z}} + A\mathbf{Z} = 0, \quad (6.42)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} M^{-1}B & M^{-1}C \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (6.42) имеет вид

$$\mathbf{Z} = K(t) \mathbf{Z}_0 \quad (K(0) = E).$$

При импульсном нагружении имеем следующие начальные данные:

$$\mathbf{Z}_1(0) = \dot{\mathbf{X}}(0), \quad \mathbf{Z}_2(0) = 0, \quad (6.43)$$

причем ряд компонент вектора $\mathbf{Z}_1(0)$ может быть равен нулю, если $k < n$ (где n — число степеней свободы; k — число масс, на которые действуют импульсы сил).

Импульсы $\mathbf{J}_i$ имеют случайные совпадающие между собой направления, параллельные плоскости x_1x_2 (см. рис. 6.4). Примем, что $\mathbf{J}_i$ связаны соотношениями

$$\mathbf{J}_i = \beta_i \mathbf{J}_1. \quad (6.44)$$

Если каждая масса имеет две степени свободы (смещение по осям x_1 и x_2), в отличие от частного случая, рассмотренного выше, система уравнений (6.42) имеет размерность $4n$, так как теперь допускается движение масс по двум осям x_1 и x_2 . После прекращения действия импульсов каждая масса начнет двигаться со скоростью (начальные условия)

$$\dot{x}_{0i} = \dot{x}_{10} i_1 + \dot{x}_{20} i_2 = \frac{\beta_i}{m_i} J_{1x_1} i_1 + \frac{\beta_i}{m_i} J_{1x_2} i_1, \quad (6.45)$$

где J_{1x_1} , J_{1x_2} — проекции вектора $\mathbf{J}_1$ на оси x_1 и x_2 (рис. 6.9):

$$J_{1x_1} = |\mathbf{J}_1| \cos \alpha; \quad J_{1x_2} = |\mathbf{J}_1| \sin \alpha, \quad (6.46)$$

где α — случайный угол.

Первые $2n$ компонент вектора начальных условий $\mathbf{X}_0$ известны ($\dot{\mathbf{X}}_{10j}$, $\dot{\mathbf{X}}_{20j}$), ($j = 1, 2, \dots, n$). Остальные $2n$ компонент вектора $\mathbf{Z}$ равны нулю.

Компоненты вектора $\mathbf{Z}$ с учетом (6.45) и (6.46) можно представить в виде

$$z_i = a_{i1} \cos \alpha |\mathbf{J}_1| + a_{i2} \sin \alpha |\mathbf{J}_1|. \quad (6.47)$$

(Явный вид коэффициентов a_{i1} , a_{i2} приведен ниже.)

Если использовать соотношения (6.47) для получения вероятностных характеристик решения уравнений движения, то необходимо иметь информацию о случайном угле α (необходимо знать закон распределения угла α).

Если закон распределения α известен, например, угол α подчиняется в интервале $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ закону равномерного распределения, то можно определить все вероятностные характеристики z_i , однако при таком варианте решения нельзя ответить на вопрос о наилучшем воздействии импульсов $\mathbf{J}_i$ на систему, что в первую очередь интересует инженера-расчетчика.

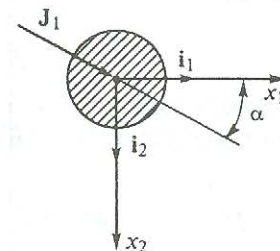


Рис. 6.9

Рассмотрим метод решения уравнения (6.42) с определением максимальных значений компонент вектора состояния системы в произвольный момент времени и их вероятностных характеристик. В изложенном ниже методе требуется знание закона распределения случайного угла α , что существенно упрощает получение статистической информации о входе, т.е. достаточно знать закон распределения (6.38) модуля вектора импульса силы.

Рассмотрим решение уравнения (6.42), имея в виду обобщенное решение для рассматриваемого случая, когда массы m_j имеют две степени свободы:

$$\mathbf{Z} = K(t) \mathbf{Z}_0 \quad (\mathbf{Z}_0 = (\dot{x}_{10}^{(1)}, \dot{x}_{20}^{(1)}, \dots, \dot{x}_{10}^{(n)}, \dot{x}_{20}^{(n)}, 0 \dots 0)^T).$$

Вектор $\mathbf{Z}_0$ с учетом (6.45) можно записать в виде

$$\mathbf{Z}_0 = \beta \mathbf{J}, \quad (6.48)$$

где

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{m_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{m_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\beta_n}{m_n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\beta_n}{m_n} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J} = (J_{1x_1}, J_{1x_2}, J_{1x_1}, J_{1x_2}, J_{1x_1}, J_{1x_2}, 0 \dots 0)^T.$$

Поэтому

$$\mathbf{Z} = K(t) \beta \mathbf{J}. \quad (6.49)$$

В скалярной форме из (6.49) получаем

$$z_i = a_{i1}(t) J_{1x_1} + a_{i2}(t) J_{1x_2}, \quad (6.50)$$

где

$$a_{i1} = k_{i1} \frac{\beta_1}{m_1} + k_{i3} \frac{\beta_2}{m_2} + k_{i5} \frac{\beta_3}{m_3} + \dots + k_{i(2n-1)} \frac{\beta_n}{m_n};$$

$$a_{i2} = k_{i2} \frac{\beta_1}{m_1} + k_{i4} \frac{\beta_2}{m_2} + k_{i6} \frac{\beta_3}{m_3} + \dots + k_{i2n} \frac{\beta_n}{m_n}.$$

Представим (6.50) в виде скалярного произведения

$$z_i = (\mathbf{a}_i, \mathbf{J}_1), \quad (6.51)$$

где

$$\mathbf{a}_i = a_{i1} \mathbf{i}_1 + a_{i2} \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{J}_1 = J_{1x_1} \mathbf{i}_1 + J_{1x_2} \mathbf{i}_2.$$

Проекция импульса $\mathbf{J}_1$ удовлетворяют условию

$$\frac{J_{1x_1}^2}{|\mathbf{J}_1|^2} + \frac{J_{1x_2}^2}{|\mathbf{J}_1|^2} = 1, \quad (6.52)$$

которое можно представить в виде

$$(C \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1) = 1 \quad \left(C = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\mathbf{J}_1|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\mathbf{J}_1|^2} \end{bmatrix} \right). \quad (6.53)$$

Найдем выражения для максимальных значений компонент (6.51) при дополнительном условии (6.53), воспользовавшись множителем Лагранжа:

$$J = (\mathbf{a}_i, \mathbf{J}_1) - \lambda [(C \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1) - 1] = \max, \quad (6.54)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Максимум функционала J определяется из условия

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{J}_1} = 0 \quad (6.55)$$

или

$$\mathbf{a}_i = \lambda \mathbf{C} \mathbf{J}_1. \quad (6.56)$$

Умножим (6.56) на матрицу $\mathbf{C}^{-1}$:

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i = \lambda \mathbf{J}_1. \quad (6.57)$$

Умножив скалярно левые и правые части уравнений (6.56) и (6.57), получим (с учетом соотношения (6.53))

$$\lambda^2 = (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i), \quad (6.58)$$

откуда определяем множитель

$$\lambda = \sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i)}. \quad (6.59)$$

Зная множитель Лагранжа, находим вектор из соотношения (6.57)

$$\mathbf{J}_{1x} = \frac{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i}{\lambda} = \frac{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i}{\sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i)}}. \quad (6.60)$$

Максимальное значение компонента вектора решения z_i

$$\max(z_i) = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{J}_1) = \sqrt{(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i)} = \lambda, \quad (6.61)$$

или

$$\max(z_i) = |\mathbf{J}_1| \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2}. \quad (6.62)$$

Выражение (6.62) для $\max z_i$ позволяет определить вероятностные характеристики максимальных значений компонент вектора состояния системы (m_{zi} и σ_{zi}):

$$\max(m_{zi}) = \sqrt{a_{i1}^2(t) + a_{i2}^2(t)} \tilde{m}_{J_1}; \quad (6.63)$$

$$\max(\sigma_{zi}) = \sqrt{a_{i1}^2(t) + a_{i2}^2(t)} \tilde{\sigma}_{J_1}, \quad (6.64)$$

где

$$\tilde{m}_{J_1} = 2 \left[m_{J_{12}} \Phi_0 \left(\frac{m_{J_1}}{\sigma_{J_1}} \right) + \sigma_{J_1} \varphi \left(\frac{m_{J_1}}{\sigma_{J_1}} \right) \right]; \quad (6.65)$$

$$\Phi_0 \left(\frac{m_{J_1}}{\sigma_{J_1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{m_{J_1}/\sigma_{J_1}}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad (6.66)$$

$$\tilde{\sigma}_{J_1}^2 = \sigma_{J_1}^2 + m_{J_1}^2 - \tilde{m}_{J_1}^2$$

(m_{J_1} , σ_{J_1} — параметры нормального закона распределения).

Получим законы распределения максимальных значений компонент $\max(z_i)$, линейно зависящих от случайного модуля вектора импульса силы (соотношение (6.62)). В соответствии с общей теорией определения законов распределения монотонно изменяющихся функций случайных аргументов имеем

$$f_{i1}(\max(z_i), t) = \frac{1}{|b_i(t)| \sigma_{J_1} \sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{(z_{im} - b_i(t) m_{J_1})^2}{2b_i^2(t) \sigma_{J_1}^2}} + e^{-\frac{(z_{im} + b_i(t) m_{J_1})^2}{2b_i^2(t) \sigma_{J_1}^2}} \right], \quad (6.67)$$

где

$$b_i(t) = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2}, \quad z_{im} = \max(z_i).$$

Максимально возможное значение максимальной компоненты вектора решения z_i (например, смещения массы m_j) найдем из условия, аналогичного правилу трех сигм:

$$P(0 < z_{im} < z_{im}^*) = 0,99, \quad (6.68)$$

или

$$\int_0^{z_{im}^*} f_{i1}(z_{im}, t) dz_{im} = 0,99. \quad (6.69)$$

Из (6.69) для произвольного фиксированного момента времени определяем z_{im}^* . Изложенный метод позволяет определить максимально возможные значения каждой из компонент вектора состояния системы, например максимальное отклонение k -й массы $\max(x_{jk})$ или ее максимальной скорости $\max(\dot{x}_{jk})$. Зная закон распределения максимальных отклонений масс системы, можно определить вероятность того, что максимальное отклонение j -й массы удовлетворяет условию (6.62). Аналогичные задачи имеют место и при расчете системы подвески транспортных систем (см. рис. 6.3) при наезде на единичные неровности. Эта вероятность

$$P_1(0 < z_{im} < \Delta) = \int_0^{\Delta} f_{i1}(z_{im}, t) dz_{im} \quad (y_{im} = y_0). \quad (6.70)$$

Для автомашины (см. рис. 6.3) выражение (6.70), позволяющее определить y_0 (y_0 — вертикальное смещение подвески), справедливо только в интервале времени $t_k = l/v_0$ (до наезда задних колес).

Полученное выражение для вероятности зависит от времени t . Момент t , когда P_1 достигает максимального значения, находим из условия

$$\frac{dP_1}{dt} = 0. \quad (6.71)$$

Зависимость $P_1(t)$ можно получить для ряда дискретных значений, а затем, воспользовавшись сплайн-функциями, получить аналитическое выражение для $P_1(t)$.

Аналогичным методом можно определить и максимальные значения ускорений (первые n компонент вектора $\mathbf{Z}$):

$$\max(\dot{z}_i) = |\mathbf{J}_1| = |\mathbf{J}_1| b_{i1}(t). \quad (6.72)$$

По аналогии с (6.67) получаем закон распределения максимальных значений ускорений масс системы:

$$f_{i2}(\dot{z}_{im}, t) = \frac{1}{|b_i(t)| \sigma_{J_1} \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(z_{im} - b_i m_{J_1})^2}{b_i^2 2\sigma_{J_1}^2}} + e^{-\frac{(z_{im} + b_i m_{J_1})^2}{b_i^2 2\sigma_{J_1}^2}} \right]. \quad (6.73)$$

Максимально возможное значение ускорения ($\max(\max \dot{z}_i) = \max \dot{z}_i^*$) находим из условия

$$\dot{z}_i^* \max \int_0^{\dot{z}_i^*} f_{i2}(\dot{z}_{im}, t) d(\dot{z}_{im}) = 0,99. \quad (6.74)$$

Зная закон распределения ускорений, можно определить вероятность того, что перегрузки, действующие на сосредоточенные массы системы, будут находиться в заданном интервале значений:

$$P_2(0 < \dot{z}_{im} < \dot{z}_{i\ddot{a}}) = \int_0^{\dot{z}_{i\ddot{a}}} f_{i2}(\dot{z}_{im}, t) d(\dot{z}_{im}), \quad (6.75)$$

где $\dot{z}_{i\ddot{a}}$ — верхнее значение допускаемых ускорений. Момент времени, при котором P_2 достигает максимального значения, находим из условия

$$\frac{dP_2}{dt} = 0.$$

В качестве иллюстрации изложенного метода рассмотрим систему с двумя степенями свободы (рис. 6.10), на которую в точке K действует случайный, произвольно направленный импульс в плоскости $x_1 x_2$. Воспользовавшись методом сил, получаем следующие уравнения малых колебаний системы (без учета сил сопротивления):

$$\begin{aligned} y_2 &= \delta_{11}(-M\ddot{x}_2) + \delta_{12}(-J_0\ddot{\varphi}); \\ \varphi &= \delta_{21}(-M\ddot{x}_2) + \delta_{22}(-J_0\ddot{\varphi}). \end{aligned} \quad (6.76)$$

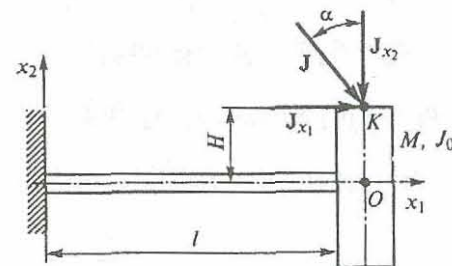


Рис. 6.10

В данном примере нет необходимости переходить к системе уравнений первого порядка, так как решение можно получить в аналитической форме записи. Находим начальные скорости системы после прекращения действия импульса из следующих соотношений:

$$J_{x_2} = -M \dot{x}_{20};$$

$$J_{x_1} H = -J_0 \dot{\phi}_0.$$

Решение системы (6.76) имеет вид

$$x_2 = c_1 \sin p_1 t + c_2 \cos p_1 t + c_3 \sin p_2 t + c_4 \cos p_2 t;$$

$$\phi = c_1 \alpha_1 \sin p_1 t + c_2 \alpha_1 \cos p_1 t + c_3 \alpha_2 \sin p_2 t + c_4 \alpha_2 \cos p_2 t.$$

При $t = 0$ $x_2 = \phi = 0$, поэтому $c_2 = c_4 = 0$. Произвольные постоянные

$$c_1 = \frac{\left(\frac{Hp_1}{J_0}\right) J_{x_1} - p_1 \left(\frac{l}{J_0} - \frac{a_1}{M}\right) J_{x_2}}{p_1 p_2 (a_2 - a_1)}.$$

В результате имеем

$$x_2 = a_1 J_{x_1} + a_2 J_{x_2};$$

$$\phi = b_1 J_{x_1} + b_2 J_{x_2},$$

где

$$a_2 = \gamma_{11} \sin p_1 t - \gamma_{21} \sin p_2 t;$$

$$a_1 = \gamma_{22} \sin p_2 t - \gamma_{12} \sin p_1 t;$$

$$b_1 = \gamma_{11} \alpha_1 \sin p_1 t - \gamma_{21} \alpha_2 \sin p_2 t;$$

$$b_2 = \gamma_{22} \sin p_2 t - \gamma_{12} \alpha_1 \sin p_1 t;$$

$$\gamma_{11} = \frac{Hp_2}{J_0 p_1 p_2 (a_2 - a_1)}; \quad \gamma_{12} = \frac{\left(\frac{a_2}{M} - \frac{l}{J_0}\right)}{p_1 (a_2 - a_1)};$$

$$\gamma_{21} = \frac{Hp_1}{J_0 (a_2 - a_1) p_1 p_2}; \quad \gamma_{22} = \frac{\left(\frac{l}{J_0} - \frac{a_1}{M}\right)}{p_2 (a_2 - a_1)}.$$

Получим выражения для максимального значения смещения x_2 и $\dot{x}_2$. В соответствии с ранее изложенным алгоритмом рассмотрим функционал

$$J = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}) - \lambda [(\mathbf{CJ} \cdot \mathbf{J}) - 1],$$

где

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}) = \sum_{i=1}^2 a_i J_{x_i}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \end{bmatrix}.$$

Из условия (6.55) следует уравнение

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{C} \cdot \mathbf{J}.$$

Воспользовавшись условием (6.53), получаем

$$\lambda = \sqrt{|\mathbf{J}|^2 (a_1^2 + a_2^2)} = |\mathbf{J}| \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)},$$

или

$$\lambda = |\mathbf{J}| \sqrt{c_{11} \sin^2 p_1 t + c_{22} \sin^2 p_2 t + c_{12} \sin p_1 t \cdot \sin p_2 t},$$

где

$$c_{11} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2; \quad c_{22} = \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2;$$

$$c_{12} = -(\gamma_{11} \gamma_{21} + \gamma_{22} \gamma_{12}).$$

Максимальное значение x_2 (6.55)

$$\max(x_2) = \lambda = |\mathbf{J}| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} =$$

$$= |\mathbf{J}| \sqrt{c_{11} \sin^2 p_1 t + c_{12} \sin p_1 t \sin p_2 t + c_{22} \sin^2 p_2 t}.$$

В соответствии с (6.67) получаем закон распределения для $\max(x_2)$ и $\max(\dot{x}_2)$:

$$f(x_{2m}, t) = \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi} b} \left[e^{-\frac{(x_{2m} - bm)^2}{b^2 2\sigma_J^2}} + e^{-\frac{(x_{2m} + bm)^2}{b^2 2\sigma_J^2}} \right], \quad (6.77)$$

где

$$b = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Проделав аналогичные выкладки для $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = \dot{a}_1 J_{x_1} + \dot{a}_2 J_{x_2},$$

определяем $\max \dot{x}_2$ и соответствующий ему закон распределения:

$$\max \dot{x}_2 = |J| \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$$f(\dot{x}_{2m}, t) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi} b_1} \left[e^{-\frac{(\dot{x}_{2m} - b_1 m_1)^2}{2b_1^2 \sigma_f^2}} + e^{-\frac{(\dot{x}_{2m} + b_1 m_0)^2}{2b_1^2 \sigma_f^2}} \right], \quad (6.78)$$

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad x_{2m} = \max(x_2), \quad \dot{x}_{2m} = \max(\dot{x}_2).$$

С изменением времени законы распределения непрерывно изменяются, а при дискретных моментах времени законы распределения x_{2m} , $\dot{x}_{2m}$ подобны законам распределения модуля случайного импульса (см. рис. 6.8).

Максимально возможное отклонение $\max(x_{2m})$ и скорость $\max(\dot{x}_{2m})$ найдем из условий

$$p_{x_2} = \int_0^{x_{2m}^*} f_{x_2}(x_{2m}^*, t) dx_{2m} = 0,99; \quad (6.79)$$

$$p_{\dot{x}_2} = \int_0^{\dot{x}_{2m}^*} f_{\dot{x}_2}(\dot{x}_{2m}^*, t) d\dot{x}_{2m} = 0,99, \quad (6.80)$$

где

$$x_{2m}^* = \max(x_{2m}), \quad \dot{x}_{2m}^* = \max(\dot{x}_{2m}).$$

Определить x_{2m}^* и $\dot{x}_{2m}^*$ из (6.79) и (6.80) можно только численно для ряда конкретных значений времени t .

Изложенный метод анализа механических систем при действии случайных импульсов произвольного направления позволяет определить максимально возможные динамические эффекты в системе и выбором параметров системы их минимизировать.

§ 6.3. Нестационарные случайные колебания линейных систем

Системы с одной степенью свободы, как правило, позволяют получать решение уравнений движения в аналитической форме, что существенно упрощает последующее определение вероятностных характеристик «выхода» при известных вероятностных характеристиках «входа». Причем для уравнений с постоянными коэффициентами вероятностные характеристики выхода в ряде случаев можно получить и в аналитической форме, удобной для анализа. Для систем с конечным числом степеней свободы, например линейных с постоянными параметрами, решение можно, в принципе, получить в аналитической форме записи, но существенной пользы от такого решения вследствие громоздкости формул по сравнению с численным решением нет, поэтому, как правило, численным методам исследования случайных колебаний отдается предпочтение.

В качестве введения в раздел нестационарных случайных колебаний линейных систем рассмотрим систему с тремя степенями свободы (рис. 6.11, а), где массы m_j считаем точечными. На рис. 6.11, а число внешних сил равно числу степеней свободы, но возможны случаи, когда число возмущений меньше числа степеней свободы или больше, как показано на рис. 6.11, б, когда возмущения приложены в безмассовые точки. Возможны и механические системы (системы амортизации), когда элементы, реализующие сосредоточенные силы вязкого трения $(\alpha_j \dot{y}_j)$, связаны с безмассовыми точками (рис. 6.11, в).

В дальнейшем будем считать, что все необходимые сведения о случайных силах (вероятностные характеристики случайных возмущений) известны. При такой постановке основная трудность, связанная с получением этих вероятностных характеристик, не рассматривается, что допустимо при изложении математических методов решения дифференциальных уравне-

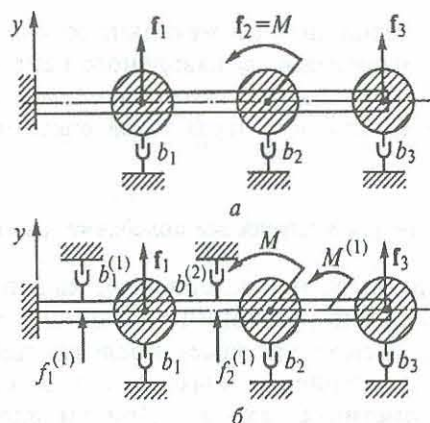


Рис. 6.11

ний, но недопустимо при решении конкретных задач, с которыми приходится сталкиваться инженеру в повседневной работе.

В большинстве случаев вероятностные характеристики случайных сил (или других видов случайных возмущений), которые могут действовать на проектируемую конструкцию в реальных условиях эксплуатации, отсутствуют. К тому же случайные возмущения могут зависеть от самой конструкции, которой тоже пока нет. Поэтому решению уравнений предшествует очень большая подготовительная работа по получению информации о случайных возмущениях экспериментальными методами с последующей обработкой экспериментальных данных для определения вероятностных характеристик «входа», что особенно трудоемко, когда требуется иметь информацию о вероятностных характеристиках нестационарных случайных процессов.

Эта трудоемкость существенно ограничивает возможности теории нестационарных случайных колебаний при решении прикладных задач.

На подготовительную работу по определению вероятностных характеристик входа требуется несоизмеримо больше времени, чем для решения уравнений движения при известном (в вероятностном смысле) входе. В конечном счете надежность

работы механической системы целиком зависит от того, насколько точно заданный в решении вход отражает реальную физику процесса. В ряде случаев вероятностные характеристики входа не зависят от самой конструкции и являются хорошо изученными случайными функциями. Например, в результате обработки большого числа экспериментальных данных получены вероятностные характеристики неровностей дорог [36], неровностей аэродромного покрытия, скорости ветра для различных районов и т.д. В этом случае при анализе движения системы можно использовать известные вероятностные характеристики входа.

Основные методы решения уравнений движения при нестационарных случайных возмущениях частично изложены в § 2.4.

Воспользовавшись методом сил, получим систему уравнений малых колебаний (рис. 6.11, а):

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1 - b_1 \dot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2 - b_2 \dot{y}_2) + \\ &+ \delta_{13}(-m_3 \ddot{y}_3 - b_3 \dot{y}_3) + \delta_{14}M + \delta_{11}f_1 + \delta_{13}f_3; \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1 - b_1 \dot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2 - b_2 \dot{y}_2) + \\ &+ \delta_{23}(-m_3 \ddot{y}_3 - b_3 \dot{y}_3) + \delta_{21}f_1 + \delta_{23}f_3 + \delta_{24}M; \\ y_3 &= \delta_{31}(-m_1 \ddot{y}_1 - b_1 \dot{y}_1) + \delta_{32}(-m_2 \ddot{y}_2 - b_2 \dot{y}_2) + \\ &+ \delta_{33}(-m_3 \ddot{y}_3 - b_3 \dot{y}_3) + \delta_{31}f_1 + \delta_{33}f_3 + \delta_{34}M, \end{aligned} \quad (6.81)$$

или в векторной форме записи (после преобразований)

$$M \ddot{y} + B \dot{y} + C y = D_1 f \quad (D_1 = \Delta^{-1} \Delta_1). \quad (6.82)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{33} & \delta_{34} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ M \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}.$$

В более общем случае силы вязкого трения могут зависеть и от относительных скоростей. Тогда матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (6.82) преобразуем к виду

$$\dot{\mathbf{Z}} + A\mathbf{Z} = D\mathbf{F}, \quad (6.83)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} M^{-1}B & M^{-1}C \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Компоненты f_j вектора $\mathbf{F}$ являются случайными функциями с известными вероятностными характеристиками (известны m_{f_1} и $K_{f_1 f_1}$).

В дальнейшем принято, что число компонент f_j вектора $\mathbf{F}$ меньше или равно числу степеней свободы системы. Решение уравнения (6.83) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\mathbf{Z} = \int_0^t G(t, \tau) D(\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau; \quad (6.84)$$

$$G(t, \tau) = K(t) K^{-1}(\tau),$$

где $K(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения (6.83).

В § 5.2 был приведен алгоритм определения матрицы Грина $G(t, \tau)$. Для уравнений с постоянными коэффициентами матрица Грина

$$G(t, \tau) = G(t - \tau) = K(t - \tau).$$

Для вероятностных характеристик компонент z_i вектора состояния системы $\mathbf{Z}$ (6.84) (приняв число возмущений f_j равным числу степеней свободы) запишем

$$m_{z_i}(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t g_{ij}(t, \tau) m_{f_j}(\tau) d\tau; \quad (6.85)$$

$$K_{z_i z_k}(t, t') = \sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^n \int_0^t \int_0^{t'} g_{ij}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau') K_{f_j f_v} d\tau d\tau',$$

где $g_{ij}(t, \tau)$ — элементы матрицы $G(t, \tau)$.

Рассмотрим два частных случая: 1) f_i — независимые случайные функции и 2) f_i — независимые случайные величины.

Если f_i независимые случайные функции, то

$$K_{z_i z_k}(t, t') = \sum_{v=1}^n \int_0^t \int_0^{t'} g_{iv}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau') K_{f_v f_v} d\tau d\tau'. \quad (6.86)$$

Автокорреляционные функции и дисперсии компонент

$$K_{z_i z_i}(t, t') = \sum_{v=1}^n \int_0^t \int_0^{t'} g_{iv}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau') K_{f_v f_v} d\tau d\tau'; \quad (6.87)$$

$$D_{z_i}(t) = \sum_{v=1}^n \int_0^t \int_0^t g_{iv}(t, \tau) g_{kv}(t, \tau') K_{f_v f_v} d\tau d\tau'. \quad (6.88)$$

В частном случае, когда возмущения являются случайными величинами, т.е. при

$$m_{f_j} = \text{const}; \quad K_{f_j f_v}(\tau, \tau') = K_{jv} = \text{const},$$

выражения для математических ожиданий и взаимно корреляционных функций решения принимают вид

$$K_{z_j z_k}(t, t') = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n K_{f_j f_v} \int_0^t \int_0^{t'} g_{iv}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau') K_{f_v f_v} d\tau d\tau';$$

$$m_{z_i}(t) = \sum_{i=1}^n m_{f_j} \int_0^t g_{ij} d\tau; \quad (6.89)$$

$$D_{z_i} = \sum_{v=1}^n \sum_{j=1}^n K_{f_j f_v} \int_0^t \int_0^{t'} g_{ij}(t, \tau) g_{iv}(t', \tau') d\tau d\tau'.$$

Рассмотрим второй частный случай, когда возмущения $f_i(t)$ являются случайными функциями типа белого шума:

$$K_{f_i f_j} = S_{ij} \delta(t - t'), \quad (6.90)$$

поэтому

$$K_{z_i z_k}(t, t') = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n S_{iv} \int_0^t g_{ij}(t, \tau) \left[\int_0^{t'} g_{kv}(t', \tau') \delta(\tau' - \tau) d\tau' \right] d\tau,$$

или

$$K_{z_i z_k}(t, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n S_{iv} \int_0^t g_{ij}(t, \tau) g_{kv}(t, \tau) d\tau. \quad (6.91)$$

Для дисперсий компонент z_i вектора Z получаем следующие выражения:

$$D_{z_i}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n S_{iv} \int_0^t g_{ij}(t, \tau) g_{kv}(t, \tau) d\tau. \quad (6.92)$$

Для независимых f_i имеем

$$K_{f_i f_j}(t, t') = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \sigma_i^2 \delta(t - t'), & j = i, \end{cases}$$

поэтому

$$K_{z_i z_k}(t, t') = \sum_{v=1}^n \sigma_v^2 \int_0^t g_{iv}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau) d\tau;$$

$$D_{z_i}(t) = \sum_{v=1}^n \sigma_v^2 \int_0^t [g_{iv}(t, \tau)]^2 d\tau. \quad (6.93)$$

§ 6.4. Метод главных координат при исследовании нестационарных колебаний

Рассмотрим метод решения системы неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами при нестационарных случайных колебаниях, позволяющий получать решения в аналитической форме записи.

Если силами сопротивления можно пренебречь или если силы сопротивления удовлетворяют определенным условиям, то для решения системы уравнений (6.81) может быть использован метод главных координат.

Предварительно рассмотрим задачу об определении собственных значений P_j и собственных векторов для системы однородных уравнений малых колебаний без учета сил сопротивления. Уравнение свободных колебаний (при $b_{ij} = 0$) имеет вид (частный случай уравнения (6.29))

$$M \ddot{y} + C y = 0. \quad (6.94)$$

Решение уравнения (6.94) ищем в виде

$$y = u \cos pt$$

и в результате получаем

$$p^2 M u + C u = 0$$

или

$$[C - p^2 M] u = 0. \quad (6.95)$$

Частоты p_i определяем из уравнения

$$\det [C - p^2 M] = 0. \quad (6.96)$$

Зная частоты, находим соответствующие векторы $u^{(i)}$, которые удовлетворяют алгебраическим однородным уравнениям (считаем, что все частоты различны и отличны от нуля):

$$[C - p_i^2 M] u^{(i)} = 0, \quad (6.97)$$

или в скалярной форме записи

$$\sum_{v=1}^n c_{kv}^{(i)} u_v^{(i)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.98)$$

Здесь $c_{kv}^{(i)}$ — элементы матрицы $C^{(i)}$,

$$C^{(i)} = [C - p_i^2 M].$$

Из общей теории линейных алгебраических уравнений известно, что система (6.98) всегда совместна и имеет решение, отличное от тривиального (при условии, что ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных). Например, можно $n - 1$ компонент вектора $\mathbf{u}^{(i)}$ выразить через компоненту $u_n^{(i)}$, взяв первые $(n - 1)$ уравнений системы (6.98):

$$u_j^{(i)} = d_j^{(i)} u_n^{(i)} \quad (j = 1, \dots, n - 1). \quad (6.99)$$

В результате для каждой из частот p_i получаем

$$\mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)} \cos p_i t, \quad (6.100)$$

где $(n - 1)$ — компонент вектора $\mathbf{u}^{(i)}$, находят из системы уравнений (6.99). Компоненту $u_n^{(i)}$ вектора $\mathbf{u}^{(i)}$ можно взять любой и, в частности, равной единице.

Векторы $\mathbf{u}^{(i)}$ удовлетворяют условию

$$(p_i^2 - p_j^2) (M \mathbf{u}^{(i)} \mathbf{u}^{(j)}) = 0, \quad (6.101)$$

или (при $p_i^2 \neq p_j^2$)

$$(M \mathbf{u}^{(i)} \mathbf{u}^{(j)}) = 0 \quad (i \neq j), \quad (6.102)$$

которое называют *условием ортогональности векторов $\mathbf{u}^{(i)}$ и $\mathbf{u}^{(j)}$* .

Составим из компонент векторов $\mathbf{u}^{(i)}$ матрицу U :

$$U = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & \dots & u_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^{(1)} & \dots & u_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (u_n^{(i)} = 1; i = 1, 2, \dots, n)$$

и рассмотрим преобразование

$$\mathbf{y} = U \mathbf{q}, \quad (6.103)$$

где $\mathbf{q}$ — вектор новых неизвестных.

Подставив (6.103) в уравнение (6.82) (без учета сил сопротивления), получим

$$MU \ddot{\mathbf{q}} + CU \mathbf{q} = D_1 \mathbf{f}. \quad (6.104)$$

Умножим уравнение (6.104) на транспонированную матрицу:

$$U^T MU \ddot{\mathbf{q}} + U^T CU \mathbf{q} = U^T D_1 \mathbf{f}. \quad (6.105)$$

Можно показать, что матрицы $U^T MU$ и $U^T CU$ с учетом условия ортогональности (6.102) являются диагональными:

$$U^T MU = M^{(1)}, \quad U^T CU = A^{(1)}.$$

Диагональные элементы матриц $M^{(1)}$ и $A^{(1)}$ соответственно равны

$$m_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n (u_j^{(1)})^2 m_j, \quad a_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n u_{ij}^2 m_j. \quad (6.106)$$

В скалярной форме из (6.105) с учетом условий ортогональности (6.101) получаем

$$\ddot{q}_i + p_i^2 q_i = \frac{\sum_{v=1}^n e_{iv} f_v(t)}{\sum_{k=1}^n (u_k^{(1)})^2 m_k}, \quad (6.107)$$

где $e_{iv} = \sum_{k=1}^n (u_{ik} d_{kv}^{(1)})$, $d_{kv}^{(1)}$ — элементы матрицы D_1 .

Если система нагружена только силами f_i (случайных моментов нет), приложенными к массам m_j (см. рис. 6.11, а), то матрица D_1 равна единичной, т.е. $D_1 = E$ и $d_{kv}^{(1)} = 0$ при $v \neq k$.

Введенные новые неизвестные q_i называют *главными координатами*. Решение уравнений (6.107) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$q_i = \frac{1}{p_i} \int_0^t \sin p_i(t-\tau) \left[\sum_{v=1}^n \beta_{iv} f_v(\tau) \right] d\tau, \quad (6.108)$$

или

$$q_i = \sum_{v=1}^n \int_0^t q_{iv}^0 f_v d\tau,$$

где

$$\beta_{iv} = \frac{e_{iv}}{n}; \quad q_{iv}^0 = \frac{1}{p_i} \sin p_i(t-\tau) \beta_{iv} \cdot \sum_{i=1}^n u_{ij} m$$

Зная q_i , находим решение уравнения (6.82) без учета сил сопротивления:

$$y_k = \sum_{i=1}^n u_i^{(k)} q_i = \sum_{v=1}^n \int_0^t q_{kv} f_v d\tau, \quad (6.109)$$

где $q_{kv} = \sum_{i=1}^n u_{ki} q_{iv}^0$.

При наличии сил вязкого сопротивления уравнение движения системы (6.82) после замены y на Uy и умножения на транспонированную матрицу U^T принимает вид

$$U^T M U \ddot{q} + U^T B U \dot{q} + U^T C U q = U^T D^{(1)} f. \quad (6.110)$$

При учете сил сопротивления необходимо, чтобы матрица $U^T B U$ была также диагональной. Это имеет место, если

$$B = 2nM + 2\lambda C, \quad (6.111)$$

где $2n$ и 2λ — скалярные множители.

Умножив (6.111) слева на матрицу U^T , а справа — на матрицу U , получим

$$U^T B U = 2n(U^T M U) + 2\lambda(U^T C U). \quad (6.112)$$

С учетом (6.112) из (6.110) получаем в скалярной форме уравнения

$$\ddot{q}_i + 2n_i \dot{q}_i + p_i^2 q_i = \frac{\sum_{v=1}^n e_{iv} f_v(t)}{\sum_{j=1}^n (u_j^{(i)})^2 m_j}, \quad (6.113)$$

где

$$n_i = n + \lambda p_i^2. \quad (6.114)$$

Так как распределение сил трения практически неизвестно, а известен (экспериментально) только интегральный эффект действия сил трения, то можно принять любую гипотезу о распределении сил трения, эффект действия которых эквивалентен интегральному эффекту. Поэтому естественно предположить, что сила трения распределена так, что выполняется условие (6.114), т.е. главные координаты для консервативной системы остаются главными и для неконсервативной системы, учитывающей силы вязкого трения. Решение уравнения (6.113) имеет вид

$$q_i = e^{-n_i t} (c_1^{(i)} \cos p_i t + c_2^{(i)} \sin p_i t) + \frac{1}{p_i} \int_0^t e^{-n_i(t-\tau)} \sin p_i(t-\tau) \left[\sum_{v=1}^n \beta_{iv} f_v(\tau) \right] d\tau, \quad (6.115)$$

или в более компактной форме записи

$$q_i = e^{-n_i t} (c_1^{(i)} \cos p_i t + c_2^{(i)} \sin p_i t) + \sum_{v=1}^n \int_0^t g_{iv}^{(2)}(t, \tau) f_v(\tau) d\tau, \quad (6.116)$$

где

$$g_{iv}^{(2)} = \frac{1}{p_i} e^{-n_i(t-\tau)} \sin p_i(t-\tau) \beta_{iv};$$

$$\beta_{iv} = \frac{e_{iv}}{n \sum_{i=1}^n (u_j^{(i)})^2 m_j}.$$

Определив q_i , найдем компоненты вектора y и первых двух производных:

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{j=1}^n u_{kj} q_j; \\ \dot{y}_k &= \sum_{j=1}^n \dot{u}_{kj} \dot{q}_j; \\ \ddot{y}_k &= \sum_{j=1}^n u_{kj} \ddot{q}_j. \end{aligned} \quad (6.117)$$

При нулевых начальных данных имеем

$$q_k = \sum_{v=1}^n \int_0^t g_{iv}^{(2)} f_v d\tau. \quad (6.118)$$

Например, для y_k после преобразований получаем следующее выражение (при нулевых начальных данных), аналогичное (6.109):

$$y_k = \sum_{v=1}^n \int_0^t g_{kv}^{(3)} f_v d\tau, \quad (6.119)$$

где $g_{kv}^{(3)} = \sum_{i=1}^n u_k^{(i)} g_{iv}^{(2)}$.

Находим вероятностные характеристики компонент вектора состояния y :

$$m_{y_k} = \sum_{v=1}^n \int_0^t g_{kv}^{(3)} m_{f_v} d\tau; \quad (6.120)$$

$$K_{y_k y_j} = \sum_{v=1}^n \sum_{p=1}^n \int_0^t \int_0^{t'} g_{kv}^{(3)}(t) g_{jp}^{(3)}(t') K_{f_v f_p} d\tau dt'. \quad (6.121)$$

Рассмотрим нестационарные колебания при внезапно приложенных постоянных во времени случайных силах, например, как показано на рис. 6.12. Высотное сооружение представлено здесь как система сосредоточенных масс m_i , соединенных безынерционными упругими стержнями. Рассмотрим два случая колебаний конструкции: 1) случайные силы f_i лежат в плоскости чертежа и параллельны оси x_1 и 2) случайные силы параллельны плоскости $x_1 O x_2$ и параллельны между собой, но направления их произвольны, аналогично ранее рассмотренному случаю импульсного нагружения (см. рис. 6.4).

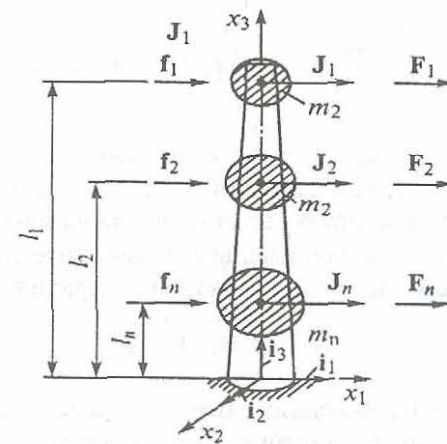


Рис. 6.12

В первом случае, если главные оси сечений стержня совпадают по направлению с осями x_1 и x_2 , колебания масс m_i происходят в плоскости $x_1 O x_2$. Так как f_i параллельны, то можно положить

$$\mathbf{f}_i = p_i \mathbf{f}_i. \quad (6.122)$$

Уравнение малых колебаний аналогично уравнению (6.82) ($D_1 = E$):

$$M \ddot{\mathbf{x}}_1 + B \dot{\mathbf{x}}_1 + C \mathbf{x}_1 = \mathbf{f} \quad (\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T), \quad (6.123)$$

где B — диагональная матрица.

Поскольку модули сил $\mathbf{f}_i$ не зависят от времени, то из (6.89) с учетом (6.122) получаем вероятностные характеристики компонент вектора $\mathbf{x}_1$:

$$\begin{aligned} m_{x_k} &= m_{f_1} \sum_{v=1}^n \beta_v \int_0^t g_{kv} d\tau; \\ K_{x_i x_k} &= D_{f_1} \sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^n \beta_j \beta_v \int_0^t \int_0^{t'} g_{ij}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau') d\tau d\tau'; \\ D_{x_k}(t) &= \sum_{v=1}^n \sum_{j=1}^n K_{f_j f_v} \int_0^t \int_0^t g_{kj}(t, \tau) g_{kv}(t', \tau') d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Можно воспользоваться и выражениями (6.120), (6.121), полученными с использованием главных координат. Считая, что компоненты вектора $\mathbf{x}_1$ имеют нормальное распределение, можно определить их максимально возможные значения в каждый момент времени, воспользовавшись правилом «трех сигм»:

$$\max x_k = m_{x_k} + 3\sigma_{x_k}. \quad (6.125)$$

При расчете наибольший интерес представляют напряжения, возникающие в конструкции при нагружении ее случайными силами. Например, в конструкции, показанной на рис. 6.12, при постоянном сечении стержня при нагружении ее случайными силами f_i , направленными в одну сторону, опасным сечением будет сечение в заделке. Изгибающий момент M_{II} в заделке от внешних сил, действующих на массы m_i (включая и силы вязкого сопротивления $F_{i \text{ тр}}$),

$$M_{II} = \sum_{\rho=1}^n l_{\rho} (f_{\rho} + y_{\rho} + F_{\rho}) = \sum_{\rho=1}^n l_{\rho} (f_{\rho} - m_{\rho} \ddot{x}_{1\rho} - \alpha_{\rho} \dot{x}_{1\rho}). \quad (6.126)$$

Воспользовавшись уравнением движения массы m_{ρ} , найдем

$$M_{II} = \sum_{\rho=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{\rho j} x_{1j} \right); \quad (6.127)$$

Выражение для компонент вектора состояния системы

$$x_{1j} = \sum_{v=1}^n \int_0^t g_{jv}^{(3)} f_v d\tau. \quad (6.128)$$

Подставив (6.128) в (6.127), получим

$$M_{II} = \sum_{v=1}^n \int_0^t \left(\sum_{\rho=1}^n l_{\rho} q_{\rho v}^{(4)} \right) f_v d\tau, \quad (6.129)$$

где

$$q_{\rho v}^{(4)} = \sum_{j=1}^n c_{\rho j} q_{jv}^{(3)}.$$

Максимальное нормальное напряжение в заделке

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_{II}}{W_{x_2}} \sum_{v=1}^n \int_0^t q_v f_v d\tau; \\ q_v &= \frac{1}{W_{x_2}} \sum_{\rho=1}^n l_{\rho} q_{\rho v}^{(4)}. \end{aligned} \quad (6.130)$$

При нагружении случайными силами, постоянными во времени, имеем

$$\sigma = \sum_{v=1}^n \int_0^t q_v d\tau \cdot f_v. \quad (6.131)$$

Считая, что σ имеет нормальное распределение, получаем максимально возможное его значение (при $f_v = \beta_v f_1$)

$$\sigma^* = m_\sigma + 3\sigma_\sigma, \quad (6.132)$$

где

$$m_\sigma = \sum_{v=1}^n \int_0^t q_v d\tau m_{f_v} \quad (m_{f_v} = \beta_v m_{f_1});$$

$$\sigma_\sigma^2 = D_{f_1} \sum_{v=1}^n \sum_{p=1}^n \beta_v \beta_p \int_0^t \int_0^{t'} q_v(\tau) \dot{q}_v(\tau') d\tau d\tau'.$$

Пример 6.2. На массу m_2 ($m_2 = m_1$) (рис. 6.13) внезапно подействовала случайная сила $P = P_0 H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда. Вероятностные характеристики случайной величины P_0 известны: m_{p_0} и D_{p_0} . Требуется определить математическое ожидание и дисперсию максимального нормального напряжения в заделке. Уравнения малых колебаний масс

$$y_1 = \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2) + \delta_{12} P_0 H(t);$$

$$y_2 = \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2) + \delta_{22} P_0 H(t).$$

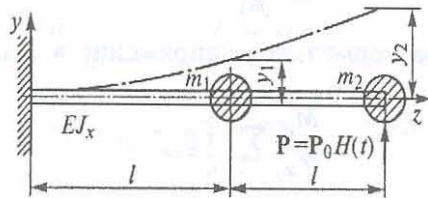


Рис. 6.13

Находим частоты

$$p_1 = 0,585 \sqrt{\frac{EJ_x}{m_1 l^2}}; \quad p_2 = 3,881 \sqrt{\frac{EJ_x}{m_1 l^2}}$$

и собственные векторы (положив $u_{11} = u_{12} = 1$)

$$u_1 = (1, u_{21}), \quad u_2 = (1, u_{22}),$$

где $u_{21} = 3,132$; $u_{22} = -0,319$.

Перейдем к главным координатам q_1 и q_2 :

$$y_1 = u_{11} q_1 + u_{12} q_2; \quad (6.133)$$

$$y_2 = u_{21} q_1 + u_{22} q_2.$$

В результате получаем следующие уравнения движения:

$$q_1 + p_1^2 q_1 = \frac{\sum_{j=1}^2 u_{j1} f_j}{\sum_{j=1}^2 u_{j1}^2 m_j} = \frac{4,132 P_0 H}{m_1 (1 + 3,132^2)};$$

$$q_2 + p_2^2 q_2 = \frac{\sum_{j=1}^2 u_{j2} f_j}{\sum_{j=1}^2 u_{j2}^2 m_j} = \frac{0,681 P_0 H}{m_2 (1 + 0,319^2)}.$$

Решения уравнений (6.134) при нулевых начальных данных имеют вид

$$q_1 = \frac{0,382 P_0}{m_1 p_1^2} (1 - \cos p_1 t);$$

$$q_2 = 0,618 \frac{P_0}{m_1 p_2^2} (1 - \cos p_2 t).$$

Определив q_j , находим y_1 и y_2 (6.133):

$$y_1 = \frac{0,382 P_0}{m_1 p_1^2} (1 - \cos p_1 t) + \frac{0,618 P_0}{m_1 p_2^2} (1 - \cos p_2 t);$$

$$y_2 = \frac{1,196 P_0}{m_1 p_1^2} (1 - \cos p_1 t) - 0,191 \frac{P_0}{m_1 p_2^2} (1 - \cos p_2 t).$$

Изгибающий момент в заделке

$$M = l(-m_1 \ddot{y}_1) + 2l(-m_1 \ddot{y}_1 + P_0),$$

или

$$M = (0,382 \cos p_1 t + 0,618 \cos p_2 t + 2,392 \cos p_1 t - \\ - 0,382 \cos p_2 t + 2) p_0 l = F(t) P_0 l.$$

Максимальное нормальное напряжение в заделке

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{F(t)}{W_x} l P_0.$$

Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$m_{\sigma \max} = \frac{F(t)}{W_x} l m_{p_0};$$

$$D_{\sigma \max} = \frac{F^2(t)}{W_x^2} l^2 D_{p_0}.$$

Считая, что $\sigma_{\max}$ распределено по нормальному закону, находим максимально возможное значение напряжения в заделке

$$\max(\sigma_{\max}) = \frac{F(t)}{W_x} l (m_{p_0} + 3\sigma_{p_0}).$$

Рассмотрим случай, когда внезапно приложенные постоянные во времени силы f_j параллельны, т.е. выполняется условие $f_j = \beta_j f_j$, и параллельны плоскости $x_1 O x_2$, а направления их произвольны. Векторы f_j удовлетворяют условиям, аналогичным (6.53):

$$(C^{(i)} f_i f_i) = 1, \quad (f_i = f_{ix_1} i_1 + f_{ix_2} i_2), \quad (6.136)$$

где n — число случайных сил, принятое равным числу сосредоточенных масс.

При условии, что главные оси сечений конструкции совпадают по направлению с осями x_1 и x_2 , уравнения малых коле-

баний масс в плоскостях $x_1 O x_3$ и $x_1 O x_2$ независимы, поэтому имеем соответственно два векторных уравнения вида

$$M \ddot{x}_1 + B^{(1)} \dot{x}_1 + C^{(1)} x_1 = f_{x_1}; \quad (6.137)$$

$$M \ddot{x}_2 + B^{(2)} \dot{x}_2 + C^{(2)} x_2 = f_{x_2}, \quad (6.138)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}; \quad f_{x_1} = \begin{bmatrix} f_{1x_1} \\ f_{2x_2} \\ \vdots \\ f_{nx_1} \end{bmatrix}; \quad f_{x_2} = \begin{bmatrix} f_{1x_2} \\ f_{2x_2} \\ \vdots \\ f_{nx_2} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим алгоритм численного решения исходных уравнений (6.137) и (6.138) без использования главных координат, которые при численном решении мало полезны. Решения уравнений при нулевых начальных данных имеют вид

$$x_1 = \int_0^t G^{(1)} dt f_{x_1}; \quad (6.139)$$

$$x_2 = \int_0^t G^{(2)} dt f_{x_2}. \quad (6.140)$$

В рассматриваемом случае f_{ix_1} и f_{ix_2} зависимы, так как являются проекциями векторов f_i . Проекции векторов f_i удовлетворяют условиям (6.136). Так как векторы f_i параллельны, имеем

$$\beta_i^2 (C^{(1)} f_i f_i) = 1. \quad (6.141)$$

Рассмотрим задачи, возникающие при исследовании колебаний механических систем при действии внезапно приложен-

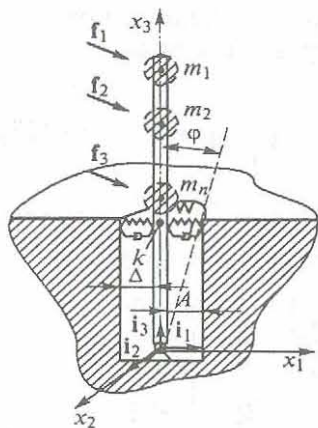


Рис. 6.14

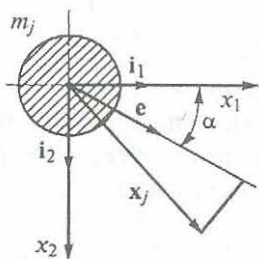


Рис. 6.15

$$J_j = (x_j, e), \quad (x_j = x_1 i_1 + x_2 i_2, \quad e = e_1 i_1 + e_2 i_2),$$

где x_j — вектор перемещения массы m_j в плоскости $x_1 O x_2$. Из общего решения (6.137) — (6.138) можно получить векторы x_j вида

$$x_j = \sum_{i=1}^n \int_0^t G^{(j)}(t, \tau) f_i d\tau \quad (f_i = f_{ix_1} i_1 + f_{ix_2} i_2), \quad (6.142)$$

где $G^{(j)}(t, \tau)$ — диагональные матрицы (2×2).

Например,

ных случайных постоянных во времени сил произвольного направления. Например, к таким задачам относят задачу расчета системы амортизации с ограниченным ходом. На рис. 6.14 показана система амортизации объекта, допускающая (до удара объекта о стенки конструкции) ограниченное угловое перемещение, зависящее от Δ . При расчете системы амортизации требуется определить максимально возможное перемещение точки k (рис. 6.14) при наихудшем действии f_i в заданном направлении, которое должно быть меньше Δ . В общей постановке требуется определить максимально возможное перемещение (или скорость) массы m_i по заданному направлению, определяемому единичным вектором e (рис. 6.15), т.е. требуется определить максимум функционала

$$G^{(j)} = \begin{bmatrix} (g_{11}^{(j)})_1 & 0 \\ 0 & (g_{22}^{(j)})_1 \end{bmatrix}.$$

С учетом $f_i = \beta_i f_1$ имеем

$$f_j = \sum_{i=1}^n \int_0^t G^{(j)}(t, \tau) d\tau \beta_i f_1 \quad (6.143)$$

и условие, которому удовлетворяет вектор f_1 ,

$$(C^{(1)} f_1 f_1) = 1. \quad (6.144)$$

Рассмотрим частный случай, когда вектор e совпадает с одним из векторов базиса $\{i_j\}$, например с i_1 . В этом случае

$$J_j = x_{j1}, \quad (6.145)$$

или, если воспользоваться выражением (6.143),

$$J_j = x_{j1} = \int_0^t G^{(j)T} i_1 d\tau f_1 \left(G^{(j)} = \sum_{i=1}^n G^{(j)} \beta_i \right). \quad (6.146)$$

Требуется определить максимальное значение (6.146) с учетом условия (6.144). Матрицы $G^{(j)}$ — диагональные с элементами

$$g_{11}^{(j)} = \sum_{i=1}^n g_{ji}^{(1)} \beta_i, \quad g_{22}^{(j)} = \sum_{i=1}^n g_{ji}^{(2)} \beta_i,$$

поэтому $G^{(j)T} = G^{(j)}$.

Воспользовавшись множителем Лагранжа, получаем функционал

$$J_{j1} = J_j - \frac{1}{2} \lambda_1 [(C^{(1)} f_1 f_1) - 1]. \quad (6.147)$$

Из (6.147) находим уравнение для определения вектора f_1^* , при котором функционал J_{j1} в момент времени t достигает максимального значения:

$$\frac{\partial J_{j1}}{\partial \mathbf{f}_1} = 0$$

или

$$\int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau - \lambda_1 C^{(1)} \mathbf{f}_1 = 0. \quad (6.148)$$

Соотношения (6.148) и (6.144) дают возможность определить множитель Лагранжа:

$$\lambda_1^2 = (C^{(1)})^{-1} \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau. \quad (6.149)$$

Так как $G^{(1)-1} = |\mathbf{f}_1|^2 E$, то

$$\lambda_1 = |\mathbf{f}_1| \left| \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau \right|. \quad (6.150)$$

Определив λ_1 из соотношения (6.148), найдем

$$\mathbf{f}_1^* = \frac{1}{\lambda_1} (C^{(1)})^{-1} \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau. \quad (6.151)$$

С учетом (6.151) получаем

$$\mathbf{f}_1^* = |\mathbf{f}_1| \frac{\int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau}{\left| \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau \right|} = |\mathbf{f}_1| \mathbf{i}_1, \quad (6.152)$$

что и следовало ожидать, так как уравнения движения (6.137) и (6.138) независимы.

Подставив выражение для $\mathbf{f}_1^*$ в (6.146), получим максимальное значение перемещения массы m_j по направлению оси x_1 :

$$\max x_{j1} = |\mathbf{f}_1| \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau \mathbf{i}_1 = |\mathbf{f}_1| \int_0^t G^{(0)} d\tau. \quad (6.153)$$

Находим вероятностные характеристики максимально возможного отклонения массы x_{j1} :

$$m_{x_{j1}} = a_j m_{f_1}, \quad D_{x_{j1}} = a_j^2 D_{f_1} \left(a_j = \int_0^t G^{(0)} \mathbf{i}_1 d\tau \mathbf{i}_1 \right). \quad (6.154)$$

Закон распределения случайной величины $\max x_{j1} = x_{j1}^*$ имеет вид (аналогично (6.67))

$$f_1(x_{j1}^*, t) = \frac{1}{|a_j(t)| \sigma_{f_1} \sqrt{2\pi}} \times \\ \times \left(e^{-\frac{(x_{j1}^* - a_j m_{f_1})^2}{a_j^2 2\sigma_{f_1}^2}} + e^{-\frac{(x_{j1}^* + a_j m_{f_1})^2}{a_j^2 2\sigma_{f_1}^2}} \right). \quad (6.155)$$

Зная закон распределения $\max x_{j1}$, можно определить максимально возможное значение x_1 в произвольный фиксированный момент времени, воспользовавшись условием (6.69):

$$\int_0^{x_{j1}^* \max} f_j(x_{j1}^*, t) dx_{j1}^* = 0,99. \quad (6.156)$$

Определив $x_{j1}^* \max$ из (6.156) для ряда дискретных моментов времени t , получим график изменения $x_{j1}^* \max$ во времени, позволяющий определить момент времени t^* , при котором $x_{j1}^* \max$ достигает максимального значения, т.е. ($\max x_{j1}^* \max$).

Рассмотрим основной случай, когда надо определить максимально возможное значение проекции вектора смещения x_j j -й массы на заданное направление, определяемое вектором $\mathbf{e}$ (см. рис. 6.15), т.е. нужно найти максимум J_j при $\mathbf{f}_i = \beta_i \mathbf{f}_1$:

$$J_j = (\mathbf{x}_j \mathbf{e}) = x_{j1} \cos \alpha + x_{j2} \sin \alpha,$$

или с учетом (6.142)

$$J_j = \int_0^t (G^{(j)} \mathbf{e} \mathbf{f}_1) d\tau \quad \left(G^{(j)} = \sum_{i=1}^n G_i^{(j)} \beta_i \right). \quad (6.157)$$

С учетом условия (6.144) получаем функционал

$$J_j = \int_0^t (G^{(j)} \mathbf{e} \mathbf{f}_1) d\tau - \frac{1}{2} \lambda_1 [(G^{(j)} \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_1) - 1]. \quad (6.158)$$

В соответствии с ранее изложенным методом находим $\mathbf{f}_1^*$:

$$\mathbf{f}_1^* = \frac{(C^{(1)})^{-1} \int_0^t G^{(j)T} \mathbf{e} d\tau}{\sqrt{(C^{(1)})^{-1} \int_0^t G^{(j)T} \mathbf{e} d\tau \int_0^t G^{(j)} \mathbf{e} d\tau}}, \quad (6.159)$$

или после преобразований

$$\mathbf{f}_1^* = |\mathbf{f}_1| \mathbf{e}. \quad (6.160)$$

Максимальное значение функционала (6.157)

$$\begin{aligned} \max J_j &= \max (\mathbf{x}_j \mathbf{e}) = \lambda_1 = \\ &= |\mathbf{f}_1| \sqrt{\left(\int_0^t g_{11}^{(j)} \cos \alpha d\tau \right)^2 + \left(\int_0^t g_{22}^{(j)} \sin \alpha d\tau \right)^2}. \end{aligned} \quad (6.161)$$

Определив максимальное значение проекции перемещения j -й массы на заданное направление (6.161), найдем параметры закона распределения (6.155) для $\max (\mathbf{x}_j \mathbf{e}) = \max x_{je}$:

$$f_j(x_{je}^*; t) = \frac{1}{|c_j| \sigma_{f_1} \sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(x_{je}^* - c_j m_j)^2}{c_j^2 2 \sigma_{f_1}^2}} + e^{-\frac{(x_{je}^* + c_j m_{f_1})^2}{2 c_j^2 \sigma_{f_1}^2}} \right), \quad (6.162)$$

где

$$x_{je}^* = \max x_{je}; \quad c_j = \sqrt{\left(\int_0^t g_{11}^{(j)} \cos \alpha d\tau \right)^2 + \left(\int_0^t g_{22}^{(j)} \sin \alpha d\tau \right)^2}.$$

Максимально возможное значение x_{ji}^* найдем из условия

$$\max_{x_{je}^*} \int_0^t f_j(x_{je}^*, t) dx_{je}^* = 0,99. \quad (6.163)$$

Изложенные методы исследования нестационарных колебаний линейных систем при действии случайных внезапно приложенных сил, постоянных во времени, позволяют решить ряд практически важных задач, в частности задачу о вероятности нахождения масс (если иметь в виду объект, показанный на рис. 6.4) при колебаниях в области допустимых отклонений в пределах заданного интервала времени при наихудших внешних случайных воздействиях на систему.

Рассмотрим в качестве примера старт летательного аппарата (рис. 6.16, а), считая, что движение системы *направляющая — ракета* происходит в плоскости чертежа и относительно этой плоскости. До потери контакта с направляющей система имеет две степени свободы (угол φ в плоскости $x_1 O x_2$ и угол ψ в плоскости $x_1 O x_3$). При запуске двигателя тяга R изменяется во

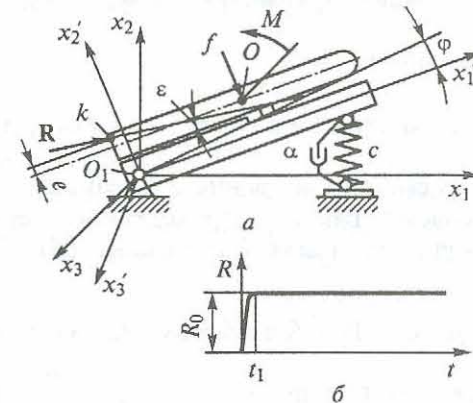


Рис. 6.16

времени, как показано на рис. 6.16, б. В пределе, пренебрегая интервалом времени $(0, t_1)$, можно считать, что тяга практически мгновенно достигает своего номинального значения R_0 (это наихудший случай воздействия на систему), т.е. функцию R можно рассматривать как внезапно приложенную постоянную во времени силу. В реальных системах из-за технологических погрешностей вектор тяги двигателя R не совпадает по направлению с осевой линией летательного аппарата (отклонен на случайный угол ϵ) и, кроме того, смещен на некоторое случайное расстояние e , что приводит к появлению случайной силы f и случайного момента M (рис. 6.16, а).

В общем случае точка k приложения силы R не лежит в плоскости чертежа (рис. 6.16, а), поэтому возникающие случайные векторы f и M имеют произвольные направления, т.е. имеют отличные от нуля проекции на оси x_i , что приводит к колебаниям системы при старте как в плоскости чертежа, так и относительно этой плоскости. Рассматривая движение системы при старте, можно получить два линейных уравнения (считая возникающие колебания малыми) относительно углов φ и ψ в системе координат $x_j^{(1)}$, связанных с направляющей (рис. 6.16, а):

$$\ddot{\varphi} + a_{11}\dot{\varphi} + a_{12}\dot{\psi} + b_{11}\varphi + b_{12}\psi = c_{11}f_{x_2} + c_{12}f_{x_3} + d_{11}M_{x_2} + d_{12}M_{x_3};$$

$$\ddot{\psi} + a_{21}\dot{\varphi} + a_{22}\dot{\psi} + b_{21}\varphi + b_{22}\psi = c_{21}f_{x_2} + c_{22}f_{x_3} + d_{22}M_{x_2} + d_{22}M_{x_3},$$

или в векторной форме

$$\ddot{v} + B\dot{v} + Cv = D_1f + D_2M \quad (v = (\varphi, \psi)^T). \quad (6.164)$$

На рис. 6.17 в системе координат, связанных с направляющей, показано сечение ракеты и приведенные к ее центру масс случайные возмущения (сила f и момент M). Из рис. 6.17 следует:

$$f = -R_0\epsilon \cos \alpha \, i'_3 - R_0\epsilon \sin \alpha \, i'_2 = f_{x_3} i'_3 + f_{x_2} i'_2;$$

$$M = -R_0 e \cos \alpha \, i'_3 + R_0 e \sin \alpha \, i'_2 = M_{x_3} i'_3 + M_{x_2} i'_2,$$

где α — случайный угол.

Проекции случайной силы f и случайного момента M удовлетворяют условиям, аналогичным (6.144):

$$\left(\frac{f_{x_2}^2}{|R_0\epsilon|^2} + \frac{f_{x_3}^2}{|R_0\epsilon|^2} \right) = 1, \quad \left(\frac{M_{x_2}^2}{|R_0e|^2} + \frac{M_{x_3}^2}{|R_0e|^2} \right) = 1.$$

При старте (в момент t_k потери контакта летательного аппарата с направляющей) представляет интерес максимально возможное значение, например, функционала

$$J = a_1 \varphi(t_k) + a_2 \psi(t_k),$$

который позволяет оценить разброс ракеты по дальности, вызванный начальными возмущениями $\varphi(t_k)$ и $\psi(t_k)$. Считая, что законы распределения модулей $|e|$ и $|\epsilon|$ известны, максимально возможное значение функционала J определяют по вышеизложенному алгоритму.

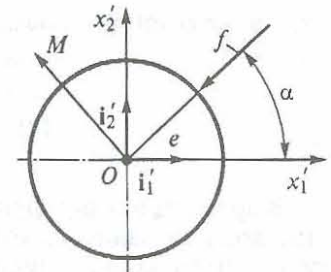


Рис. 6.17

§ 6.5. Вынужденные стационарные случайные колебания линейных систем

В случае, когда время процесса много больше времени переходного процесса, колебания системы можно рассматривать как установившиеся или, если они вызваны стационарными случайными силами, как стационарные.

Векторное уравнение вынужденных колебаний системы с n степенями свободы имеет вид (6.82)

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = D_1 f. \quad (6.165)$$

Считаем, что вероятностные характеристики компонент вектора $f(t)$ известны, в частности известны спектральные плотности $S_{f_i}(\omega)$ и $S_{f_i f_j}(\omega)$.

Предварительно выясним, при каких дополнительных условиях центрированную стационарную случайную функцию $f_k(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье

$$f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

или в векторной форме (когда имеется система случайных функций)

$$\mathbf{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Phi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.166)$$

Корреляционная функция стационарной случайной функции должна зависеть от разности моментов времени (§ 3.1). Рассмотрим корреляционную функцию

$$\begin{aligned} K_{f_k}(t, t') &= M \left[f_k(t), f_k^*(t') \right] = \\ &= M \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{i\omega t} d\omega, \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k^* e^{-i\omega' t'} d\omega' \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} K[\Phi_k \Phi_k^*] d\omega d\omega', \end{aligned} \quad (6.167)$$

подынтегральное выражение которой будет зависеть от разности моментов времени, если корреляционная функция $K[\Phi_k, \Phi_k^*]$ удовлетворяет условию

$$K[\Phi_k(\omega), \Phi_k^*(\omega')] = S_{f_k}(\omega) \delta(\omega' - \omega). \quad (6.168)$$

В этом случае после интегрирования по ω получим из (6.168)

$$K_{f_k}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_k}(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \quad (6.169)$$

где $\tau = t - t'$; $S_{f_k}(\omega)$ — спектральная плотность компонента вектора $\mathbf{f}$.

Аналогично получаем выражение для взаимно корреляционных функций

$$K_{f_k f_v}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} K[\Phi_k(\omega') \Phi_v^*(\omega)] d\omega d\omega'. \quad (6.170)$$

Из (6.170) следует, что в общем случае стационарные случайные функции могут быть связаны нестационарно, так как их взаимно корреляционная функция зависит от двух моментов времени t и t' , а не от их разности, но если

$$K[\Phi_k(\omega) \Phi_v^*(\omega)] = S_{f_k f_v}(\omega) \delta(\omega' - \omega), \quad (6.171)$$

где $S_{f_k f_v}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность, то корреляционная функция $K_{f_k f_v}$ зависит от $t - t'$.

Действительно, подставив (6.171) в (6.170), после интегрирования по ω' получим

$$K_{f_k f_v}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \tau} S_{f_k f_v}(\omega) d\omega. \quad (6.172)$$

Решение уравнения (6.165) (стационарное решение) будем искать в виде

$$\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_0 e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (6.173)$$

Подставив (6.173) и (6.166) в уравнение (6.165), получим

$$\| -\omega^2 M + i\omega B_1 + C \| \mathbf{y}_0 = B \mathbf{\Phi}, \quad (6.174)$$

откуда

$$\mathbf{y}_0 = W(i\omega) \mathbf{\Phi}, \quad (6.175)$$

где

$$W(i\omega) = \| -\omega^2 M + i\omega B_1 + C \|^{-1} B.$$

В скалярной форме

$$y_{k0}(\omega) = \sum_{j=1}^n W_{kj}(\omega) \Phi_j(\omega), \quad (6.176)$$

где $W_{kj}(\omega)$ — элементы матрицы W .

Из (6.173) находим решение в скалярной форме:

$$y_k = \int_{-\infty}^{\infty} y_{k0}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.177)$$

Подставив в (6.177) выражения для y_{k0} , получим

$$y_k = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n W_{kj}(\omega) \Phi_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.178)$$

Взаимно корреляционные функции компонент вектора Y равны

$$K_{y_k y_v}(t, t') = M[Y_k(t) Y_v^*(t')] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[y_{k0}(\omega) y_{v0}^*(\omega') e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'].$$

Взаимно корреляционная функция $K_{y_k y_v}$ зависит от разности моментов времени $t - t'$ только в том случае, когда выполняется условие, аналогичное (6.171):

$$M[y_{k0}(\omega) y_{v0}^*(\omega')] = S_{y_k y_v}(\omega) \delta(\omega' - \omega). \quad (6.179)$$

Поэтому из (6.179) получаем

$$K_{y_k y_v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_k y_v}(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (6.180)$$

Получим выражения для автокорреляционных функций $K_{y_k y_v}(\tau)$, зависящих от спектральных плотностей «входа»:

$$K_{y_k y_v}(t, t') = M[Y_k(t) Y_v^*(t')] =$$

$$= M \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n w_{kj}(\omega) \Phi_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^n w_{vp}(\omega') \Phi_p^*(\omega') e^{-i\omega' t'} d\omega' \right) \right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n w_{kj}(\omega) w_{vp}^*(\omega') M[\Phi_j(\omega) \Phi_p^*(\omega')] e^{i\omega t - i\omega' t'} d\omega d\omega'. \quad (6.181)$$

Выражение (6.181) зависит от разности $t - t'$, если выполняется условие (6.171):

$$M[\Phi_j(\omega) \Phi_p^*(\omega')] = S_{f_j f_p}(\omega) \delta(\omega' - \omega).$$

Поэтому из (6.181) имеем

$$K_{y_k y_v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n w_{kj}(\omega) w_{vp}^*(\omega) S_{f_j f_p}(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (6.182)$$

Приравнявая полученные выражения для взаимно корреляционных функций (6.180) и (6.182), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[S_{y_k y_v}(\omega) - \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n w_{kj}(\omega) w_{vp}^*(\omega) S_{f_j f_p}(\omega) \right] e^{i\omega \tau} d\omega = 0. \quad (6.183)$$

Тождественное равенство нулю левой части соотношения (6.183) (так как $e^{i\omega \tau} \neq 0$) будет выполнено, если

$$S_{y_k y_v}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n w_{kj}(\omega) w_{vp}^*(\omega) S_{f_j f_p}(\omega). \quad (6.184)$$

Из полученного соотношения (6.184) находим спектральные плотности каждой из компонент ($k = v$):

$$S_{y_k}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n w_{kj}(\omega) w_{kp}^*(\omega) S_{f_j f_p}(\omega). \quad (6.185)$$

В частном случае, когда f_j независимы:

$$S_{f_j f_p}(\omega) = \begin{cases} 0 & j \neq p, \\ S_{f_j} & j = p, \end{cases}$$

соотношения (6.184) и (6.185) принимают вид

$$S_{y_k y_v}(\omega) = \sum_{j=1}^n w_{kj} w_{vj}^* S_{f_j}(\omega); \quad (6.186)$$

$$S_{y_k}(\omega) = \sum_{j=1}^n w_{kj} w_{kj}^* S_{f_j}(\omega) = \sum_{j=1}^n |w_{kj}|^2 S_{f_j}(\omega).$$

Дисперсии компонент $y_k(t)$ вектора решения y

$$D_{y_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_k}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^n w_{kj} w_{vj}^* S_{f_j f_v}(\omega) d\omega, \quad (6.187)$$

или в частном случае, когда

$$S_{f_j f_v}(\omega) = \begin{cases} 0 & j \neq v, \\ S_{f_j} & j = v, \end{cases} \quad (6.188)$$

$$D_{y_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^n |w_{kj}|^2 S_{f_j}(\omega) d\omega \right].$$

Зная спектральные плотности, можно определить корреляционные функции компонент вектора y :

$$K_{y_k y_k} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_k}(\omega) e^{i\omega\tau} d\tau; \quad (6.189)$$

$$K_{y_k y_v} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_k y_v}(\omega) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Соотношения (6.189) позволяют определить параметры совместного многомерного нормального закона распределения компонент y_k :

$$\sigma_{y_k}^2 = K_{y_k y_k}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_k}(\omega) d\omega;$$

$$r_{y_k y_v} = \frac{K_{y_k y_v}(0)}{\sigma_{y_k} \sigma_{y_v}} = \frac{1}{\sigma_{y_k} \sigma_{y_v}} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_k y_v}(\omega) d\omega.$$

Для решения уравнения (6.165) можно воспользоваться методом главных координат (аналогично ранее рассмотренному случаю нестационарных случайных колебаний). С учетом сил вязкого трения получаем для q_j уравнения вида (6.113):

$$\ddot{q}_j + 2n_j \dot{q}_j + p_j^2 q_j = \frac{\sum_{v=1}^n d_{jv} f_v(t)}{\sum_{k=1}^n u_{kj}^2 m_k} = \sum_{v=1}^n d'_{jv} f_v(t). \quad (6.190)$$

Воспользовавшись преобразованием Лапласа, из (6.190) получим

$$Q_j(p) = \sum_{v=1}^n w_{jv}(p) \Phi_v(p) \quad (6.191)$$

$$\left(w_{jv} = d_{jv} / (p^2 + 2n_j p + p_j^2) \right).$$

Для k -й компоненты вектора решений (переходя к преобразованию Лапласа) запишем

$$y_k(p) = \sum_{j=1}^n u_{kj} Q_j(p). \quad (6.192)$$

Подставив (6.191) в (6.192), получим

$$y_k(p) = \sum_{i=1}^n w_{kv}(p) \Phi_v(p) \left(w_{kv} = \sum_{j=1}^n u_{kj} w_{vj} \right). \quad (6.193)$$

Если заменим в (6.193) оператор p на $i\omega$, то получим следующее выражение:

$$y_k(\omega) = \sum_{v=1}^n w_{kv}(\omega) \Phi_v(\omega). \quad (6.194)$$

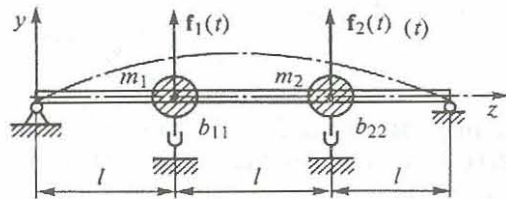


Рис. 6.18

Рассмотрим частный случай, когда система имеет две степени свободы (рис. 6.18). Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1 - b_{11}\dot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2 - b_{22}\dot{y}_2) + \delta_{11}f_1 + \delta_{12}f_2; \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1 - b_{11}\dot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2 - b_{22}\dot{y}_2) + \delta_{21}f_1 + \delta_{22}f_2. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Спектральные плотности S_{f_1} , S_{f_2} и $S_{f_1f_2}$ случайных стационарных сил, действующих на систему, считаются неизвестными. Для определения спектральных плотностей выхода S_{y_1} , S_{y_2} и взаимно спектральной плотности $S_{y_1y_2}$ необходимо получить выражения для $w_{ik}(\omega)$.

В соответствии с изложенным методом решения для общего случая системы с n степенями свободы имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{10} e^{i\omega t} d\omega; \quad y_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y_{20} e^{i\omega t} d\omega; \\ f_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 e^{i\omega t} d\omega; \quad f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (6.196)$$

Для определения y_{10} и y_{20} получаем систему уравнений $(1 + b_{11}i\omega\delta_{11} - \omega^2\delta_{11})y_{10} + (b_{12}i\omega\delta_{22} - \delta_{12}m_2\omega^2)y_{20} = \delta_{11}\Phi_1 + \delta_{12}\Phi_2$;

$$\begin{aligned} (\delta_{21}b_{11}i\omega - \delta_{21}m_1\omega^2)y_{10} + (1 + b_{22}i\omega\delta_{22} - \delta_{22}m_2\omega^2)y_{20} = \\ = \delta_{21}\Phi_1 + \delta_{22}\Phi_2. \end{aligned} \quad (6.197)$$

Из системы (6.197) определяем

$$y_{10} = w_{11}(\omega)\Phi_1 + w_{12}(\omega)\Phi_2;$$

$$y_{20} = w_{21}(\omega)\Phi_1 + w_{22}(\omega)\Phi_2,$$

где $w_{ij} = \Delta_{ij}/\Delta$;

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \delta_{11}(i\omega b_{22} - m_2\omega^2) & \delta_{12} \\ \delta_{21} & (1 + \delta_{22}i\omega b_{22} - \delta_{22}m_2\omega^2) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \delta_{12}(i\omega b_{22} - m_2\omega^2) & \delta_{12} \\ \delta_{22} & (1 + \delta_{22}i\omega b_{22} - \delta_{22}m_2\omega^2) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} (1 + \delta_{11}i\omega b_{11} - \delta_{11}m_1\omega^2) & \delta_{21} \\ (i\omega b_{11} - m_1\omega^2)\delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} (1 + \delta_{11}i\omega b_{11} - \delta_{11}m_1\omega^2) & \delta_{21} \\ (i\omega b_{11} - m_1\omega^2)\delta_{12} & \delta_{22} \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1 + \delta_{11}i\omega b_{11} - \delta_{11}m_1\omega^2) & (i\omega b_{22} - m_2\omega^2)\delta_{12} \\ (i\omega b_{11} - m_1\omega^2)\delta_{21} & (1 + \delta_{22}i\omega b_{22} - \delta_{22}m_2\omega^2) \end{vmatrix}.$$

В соответствии с (6.183) получаем выражения для спектральных плотностей решений:

$$S_{y_1}(\omega) = w_{11}w_{11}^*S_{f_1} + w_{11}w_{12}^*S_{f_1f_2} + w_{12}w_{11}^*S_{f_2f_1} + w_{12}w_{12}^*S_{f_2};$$

$$S_{y_2}(\omega) = w_{21}w_{21}^*S_{f_1} + w_{21}w_{22}^*S_{f_1f_2} + w_{22}w_{21}^*S_{f_2f_1} + w_{22}w_{22}^*S_{f_2};$$

$$S_{y_1y_2}(\omega) = w_{11}w_{21}^*S_{f_1} + w_{11}w_{22}^*S_{f_1f_2} + w_{12}w_{21}^*S_{f_2f_1} + w_{12}w_{22}^*S_{f_2}. \quad (6.198)$$

Пример 6.6. На массу m_1 (рис. 6.19) действует стационарная случайная сила $f_1(t)$ с известной спектральной плотностью

$$S_{f_1} = \frac{2D_{f_1}\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \left(K_{f_1}(\tau) = D_{f_1} e^{-\alpha|\tau|} \right).$$

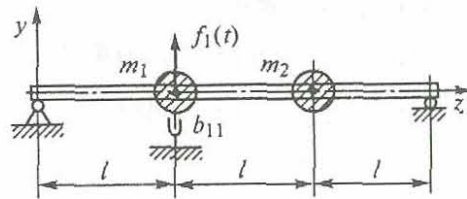


Рис. 6.19

Требуется определить дисперсию прогиба y_1 в зависимости от отношения масс m_2/m_1 . Уравнения движения масс m_1 и m_2 (частный случай уравнений (6.195)) имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + \delta_{11} b_{11} \dot{y}_1 + y_1 &= \delta_{11} f_1; \\ m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + \delta_{21} b_{11} \dot{y}_1 + y_2 &= \delta_{21} f_1, \end{aligned} \quad (6.199)$$

где $\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{9EJ_x}$; $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{18EJ_x}$.

Перейдя к безразмерному времени $t_1 = p_0 t$, где p_0 — частота колебаний массы m_1 (при $m_2 = 0$), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \frac{7}{8} n_1 \ddot{y}_2 + \frac{2}{3} b_{11} \sqrt{\frac{l^3}{m_1 EJ_x}} \dot{y}_1 + y_1 &= \delta_{11} f_1; \\ \frac{7}{8} \ddot{y}_1 + n_1 \ddot{y}_2 + \frac{7}{12} b_{11} \sqrt{\frac{l^3}{m_1 EJ_x}} \dot{y}_1 + y_2 &= \delta_{21} f_1 \quad \left(n_1 = \frac{m_2}{m_1} \right). \end{aligned} \quad (6.200)$$

Коэффициент b_{11} можно представить в виде $b_{11} = m_1 p_0 n_2$, где n_2 — безразмерный коэффициент. Перейдем к безразмерному времени, тогда корреляционная функция (τ — безразмерное время)

$$K_{f_1}(\tau) = D_{f_1} e^{-\alpha' |\tau|} \quad (\alpha' = \alpha/p_0).$$

Получим спектральную плотность, выраженную через безразмерную частоту $\omega' = \frac{\omega}{p_0}$:

$$S_{f_1} = \frac{2D_{f_1} \alpha'}{(\alpha'^2 + \omega'^2) p_0}.$$

Полагая $\alpha' = n p_0$, где n — безразмерный параметр, получаем

$$S_{f_1} = \frac{2D_{f_1} n}{p_0(n^2 + \omega'^2)} = \frac{2D_{f_1} n}{p_0 |n + i\omega'|^2}.$$

Окончательно имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \frac{7}{8} n_1 \ddot{y}_2 + n_2 \dot{y}_1 + y_1 &= \delta_{11} f_1; \\ \frac{7}{8} \ddot{y}_1 + n_1 \ddot{y}_2 + \frac{7}{8} n_1 \dot{y}_1 + y_2 &= \delta_{21} f_1. \end{aligned} \quad (6.201)$$

Спектральная плотность (частный случай (6.198))

$$S_{y_1}(\omega) = |w_{11}|^2 S_{f_1}, \quad (6.202)$$

где

$$w_{11} = \frac{l^3 \left[\frac{4}{9} + (i\omega')^2 \frac{15}{144} n_1 \right]}{EJ_x \left[\frac{15}{64} n_1 (i\omega')^4 + \frac{15}{64} n_1 n_2 (i\omega')^2 + (n_1 + 1)(i\omega')^2 + n_2 i\omega + 1 \right]}.$$

Дисперсия амплитуды прогиба

$$D_{y_1} = \frac{1}{p_0} \int_{-\infty}^{\infty} |w_{11}|^2 \frac{2D_{f_1} n}{|n + i\omega'|^2} d\omega'. \quad (6.203)$$

После преобразования приходим к следующему выражению для D_{y_1} , которое позволяет воспользоваться табличными интегралами (см. приложение 2):

$$D_{y_1} = \frac{D_{f_1}}{\pi p_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega')}{A(i\omega)^2} d\omega = \frac{2D_{f_1} n J_5}{p_0}, \quad (6.204)$$

где

$$G(i\omega') = \frac{4}{9} + \frac{15}{144} n_1 (i\omega')^2;$$

$$A(i\omega) = \frac{15}{64} n_1 (i\omega')^5 + \frac{15}{64} (n_1 n + n_1 n_2)(i\omega') + \left(1 + n_1 + \frac{15}{64} n_1 n_2 n\right) \times \\ \times (i\omega')^3 + (n_1 n + n + n_2)(i\omega')^2 + (1 + n n_2) i\omega' + n.$$

Воспользовавшись значениями интеграла, приведенными в приложении 2, получим

$$J_5 = \frac{M_5}{2a_0 \Delta_5}. \quad (6.205)$$

Здесь

$$M_5 = a_0 b_3 (-a_0 a_3 + a_1 a_2) + \frac{a_0 b_4}{a_5} (-a_0 a_1 a_5 + a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3); \\ \Delta_5 = a_0^2 a_5^2 - 2a_0 a_1 a_4 a_5 - a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2^2 - a_1 a_2 a_3 a_4; \\ a_1 = \frac{15}{64} n_1 (n + n_2); \quad a_2 = 1 + n_1 + \frac{15}{64} n_1 n_2 n; \\ a_3 = n_1 n + n + n_2; \quad a_4 = 1 + n n_2; \quad a_5 = n; \\ b_0 = b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = \frac{15}{144} n_1; \quad b_4 = \frac{4}{9}; \quad a_0 = \frac{15}{64} n_1.$$

График изменения J_5 в зависимости от $n_1 = m_2/m_1$ для $n_2 = 0,2$ и $n_2 = 0,6$ при $n = 0,05$ показан на рис. 6.20.

Рассмотрим случайные колебания механической системы, вызванные стационарными силами с запаздыванием. Например,

$$f_k(t) = f_1(-t_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (6.206)$$

где $t_k (t_1 = 0)$.

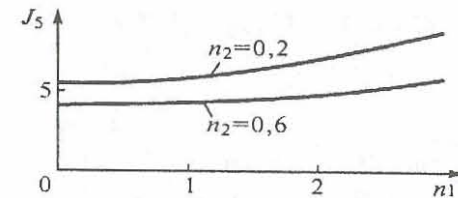


Рис. 6.20

Подобного рода возмущения действуют, например, на автомобиль (рис. 6.21), который движется по неровной дороге. Возмущения, действующие на колеса, зависят от неровностей дороги. Если в момент времени t неровность находится под передними колесами, то в момент времени $t + t_2$, где $t_2 = \frac{l}{v}$, она будет находиться под задними колесами, и тогда случайные возмущения можно представить в виде

$$f_k(t) = f_1(t - t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\omega) e^{i\omega(t-t_k)} d\omega. \quad (6.207)$$

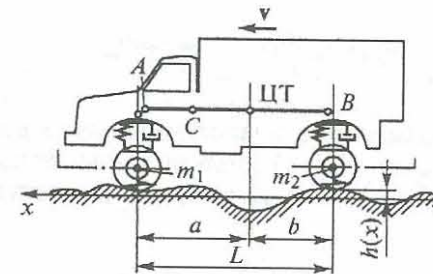


Рис. 6.21

Решение уравнения (6.165) ищем в виде (6.177):

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{k_0}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.208)$$

Подставив (6.206) и (6.207) в уравнение (6.165) (перейдя к векторной записи), получим

$$\| -\omega^2 M + i\omega B_1 + C \| y_0 = D_1 H \Phi, \quad (6.209)$$

где

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega t_3} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & e^{-i\omega t_n} \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_1 \end{bmatrix}.$$

Из (6.209) следует:

$$y_0 = W_1(\omega) \Phi \quad (W_1(\omega) = \| -\omega^2 M + i\omega B_1 + C \|^{-1} D_1 H),$$

или в скалярной форме

$$y_{k0} = \sum_{j=1}^n w_{1k_j} \Phi_j = \left(\sum_{j=1}^n w_{1k_j} \right) \Phi_1 = w_k \Phi_1. \quad (6.210)$$

Для k -й компоненты вектора $y(t)$ получаем выражение

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_k(\omega) \Phi_1 e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.211)$$

После преобразований, аналогичных преобразованиям при выводе соотношения (6.185), получаем следующие выражения для спектральных плотностей и взаимных спектральных плотностей:

$$\begin{aligned} S_{y_k} &= w_k w_k^* S_{f_1} = |w_k|^2 S_{f_1}; \\ S_{y_k y_p} &= w_k w_p^* S_{f_1}, \end{aligned} \quad (6.212)$$

так как $S_{y_j f_v} = S_{f_v}$.

Рассмотрим стационарные колебания автомобиля при движении по дороге со случайными неровностями (рис. 6.21).

Ограничимся случаем колебаний автомашины в плоскости чертежа (см. рис. 6.21). Требования, предъявляемые к автотранспорту (грузоподъемность, скорость движения, проходимость ит.д.),

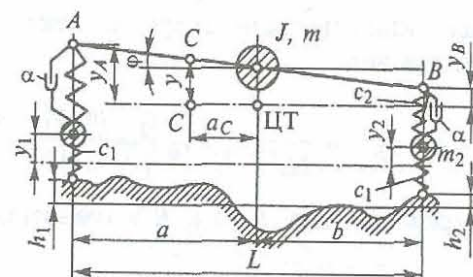


Рис. 6.22

существенно зависят от упругой характеристики системы подвески. Расчет подвески осложняется тем, что, как правило, силы, действующие на нее со стороны дороги, носят случайный характер. В последние годы были проведены многочисленные экспериментальные исследования воздействия различного рода дорог на транспортные средства, что позволило получить необходимую информацию о случайных возмущениях, действующих на машину (в частности, спектральные плотности сил, возникающих из-за случайных неровностей дороги).

На рис. 6.22 приведена расчетная схема машины (с учетом масс систем подвесок).

При выводе уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода, для чего получим выражения для кинетической и потенциальной энергии и для диссипативной функции Релея:

$$T = \frac{m \dot{y}^2}{2} + \frac{J \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2};$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_2 (y_A - y_1)^2 + \frac{1}{2} c_1 (y_1 - h_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} c_2 (y_B - y_2)^2 + \frac{1}{2} c_1 (y_2 - h_2)^2; \end{aligned}$$

$$R = \frac{\alpha}{2} (\dot{y}_A - \dot{y}_1)^2 + \frac{\alpha}{2} (\dot{y}_B - \dot{y}_2)^2.$$

Так как

$$y_A = y + a\phi, \quad y_B = y - b\phi,$$

то выражение для кинетической энергии, исключая φ и y , можно представить в виде

$$T = \frac{m}{2h^2} (b\dot{y}_A + a\dot{y}_B)^2 + \frac{J}{2L^2} (\dot{\varphi}_A + \dot{\varphi}_B)^2 + \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2}.$$

Подставив выражения для T , Π и R в уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (6.213)$$

после преобразований получим систему уравнений вида

$$\frac{mb^2 + J}{L^2} \ddot{y}_A + \frac{mab - J}{L^2} \ddot{y}_B + c_2 (y_A - y_1) + \alpha (\ddot{y}_A - \ddot{y}_1) = 0;$$

$$\frac{ma^2 + J}{L^2} \ddot{y}_B + \frac{mab - J}{L^2} \ddot{y}_A + c_2 (y_B - y_1) + \alpha (\ddot{y}_B - \ddot{y}_2) = 0;$$

$$m_1 \ddot{y}_1 - c_2 (y_A - y_1) + c_1 (y_1 - h_1) - \alpha (\ddot{y}_A - \ddot{y}_1) = 0;$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_2 (y_B - y_2) + c_1 (y_2 - h_2) - \alpha (\ddot{y}_B - \ddot{y}_2) = 0. \quad (6.214)$$

Если выполняется условие $J = mab$, то колебания передней и задней подвесок становятся независимыми. В этом случае из системы (6.214) получаем две независимые системы уравнений:

$$m_A \ddot{y}_A + c_2 (y_A - y_1) + \alpha (\ddot{y}_A - \ddot{y}_1) = 0,$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + (c_1 + c_2) y_1 - \alpha \dot{y}_A - c_2 y_A = c_2 h_1(t); \quad (6.215)$$

$$m_B \ddot{y}_B + c_2 (y_B - y_2) + \alpha (\ddot{y}_B - \ddot{y}_2) = 0,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + (c_1 + c_2) y_2 - \alpha \dot{y}_B - c_2 y_B = c_1 h_2(t - t_2)). \quad (6.216)$$

Здесь

$$m_A = \frac{J + mb^2}{L^2}; \quad m_B = \frac{J + ma^2}{L^2}.$$

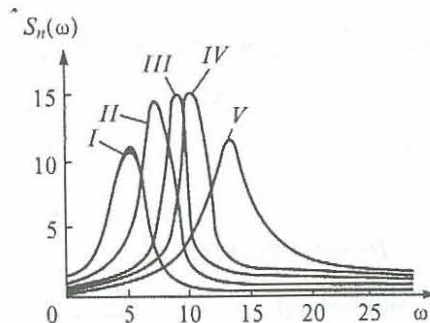


Рис. 6.23

Рассмотрим пример (см. рис. 6.22) со следующими конкретными числовыми данными: $a = 240$ см; $b = 150$ см; $m = 50$ Н · см⁻¹; $m_1 = m_2 = 8$ Н · с² · см⁻¹; $c_2 = 4000$ Н · см⁻¹; $c_1 = 10^4$ Н · см⁻¹; $\alpha = 150$ Н · с · см⁻¹. Спектральная плотность неровностей дороги h (для данного типа дороги) имеет вид

$$S_h = \frac{3v(\omega^2 + 0,6v^2)}{(\omega^2 - 0,6v^2)^2 + 3v^2\omega^2} + \frac{25,5v}{\omega^2 + 15v^2}, \quad (6.217)$$

где v — скорость движения автомобиля, км/ч. Числовые коэффициенты, входящие в левую часть выражения (6.217), размерные.

На рис. 6.23 показаны законы изменения спектральной плотности $S_h(\omega)$ в зависимости от ω для ряда значений скорости движения v , км/ч: I — $v = 20$; II — $v = 30$; III — $v = 40$; IV — $v = 50$; V — $v = 60$. Полагая $\alpha = 0$ в уравнениях (6.213), (6.214), найдем четыре частоты: для системы (6.215) получаем $p_{11} = 12,2$ с⁻¹, $p_{12} = 42,6$ с⁻¹; для системы (6.216) $p_{21} = 9,6$ с⁻¹, $p_{22} = 40,2$ с⁻¹.

Получим изображение уравнений (6.215) и (6.216) в частотной области:

$$[m_A(i\omega)^2 + \alpha(i\omega) + c_2] Y_A(i\omega) - c_2 + \alpha i\omega Y_1(i\omega) = 0;$$

$$- (c_2 + \alpha i\omega) Y_A(i\omega) + [m_1(i\omega)^2 + \alpha i\omega + c_1 + c_2] Y_1(i\omega) = c_1 H_1(i\omega);$$

$$[m_B(i\omega)^2 + \alpha(i\omega) + c_2] Y_B(i\omega) - (c_2 + \alpha i\omega) Y_2(i\omega) = 0;$$

$$(c_2 + \alpha i\omega) Y_B(i\omega) + [m_2(i\omega)^2 + \alpha(i\omega) + c_1 + c_2] Y_2(i\omega) = c_2 H_2(i\omega),$$

где

$$H_2(i\omega) = H_1(i\omega) e^{-i\omega t_2}.$$

Из полученной системы алгебраических уравнений находим $Y_A(i\omega)$, $Y_B(i\omega)$, $Y_1(i\omega)$ и $Y_2(i\omega)$:

$$\begin{aligned} Y_A(i\omega) &= W_A(i\omega) H_1(i\omega), \quad Y_B(i\omega) = W_B(i\omega) e^{-i\omega t_2} H_1(i\omega), \\ Y_1(i\omega) &= W_1(i\omega) H_1(i\omega), \quad Y_2(i\omega) = W_2(i\omega) e^{-i\omega t_2} H_1(i\omega). \end{aligned} \quad (6.218)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_A &= \frac{\Delta_A}{\Delta_1} = \\ &= \frac{c_1 c_2 + i\alpha \omega c_1}{c_1 c_2 + m_A m_1(i\omega)^4 + (m_A + m_1) \alpha(i\omega)^3 + (m_A c_1 + m_1 c_2 + m_A c_2)(i\omega)^2 +} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{+ \alpha (c_1 - c_2) (i\omega)}, \\ W_1 &= - \frac{c_1 (m_A(i\omega)^2 + \alpha i\omega + c_2)}{\Delta_1}; \quad (6.219) \\ W_B &= \frac{\Delta_B}{\Delta_2} = \\ &= \frac{(i\alpha \omega c_1 + c_1 c_2) e^{-i\omega t_2}}{m_B m_2(i\omega)^4 + \alpha (m_B + m_2)(i\omega)^2 + (m_2 c_2 + m_B c_2 + m_B c_1)(i\omega)^2 +} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{+ \alpha (c_1 - c_2) (i\omega)}, \end{aligned}$$

$$W_2 = - \frac{c_1 (m_B(i\omega)^2 + \alpha i\omega + c_2)}{\Delta_2} \quad (t_2 = L/v). \quad (6.220)$$

В соответствии с § 3.6 получаем спектральные плотности перемещений y_A , y_B , y_1 , y_2 и их первых производных. Ограничимся определением спектральных плотностей ускорений точек A и B :

$$S_{\ddot{y}_A} = |W_A|^2 \omega^4 S_h(\omega), \quad (6.221)$$

$$S_{\ddot{y}_B} = |W_B^{(1)}|^2 \omega^4 S_h(\omega) \quad (W_B^{(1)} = W_B e^{-i\omega t_2}).$$

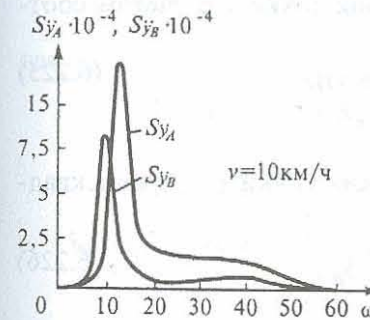


Рис. 6.24

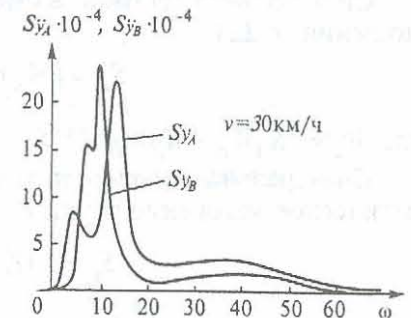


Рис. 6.25

Изменение спектральных плотностей ускорения точек A и B в зависимости от ω для разных скоростей v показано на рис. 6.24–6.26. Найдем дисперсию вертикального ускорения точки c (место водителя), которая характеризует степень комфортабельности езды. Согласно рис. 6.22,

$$y_c = y + \varphi a_c,$$

или, переходя к y_A и y_B ,

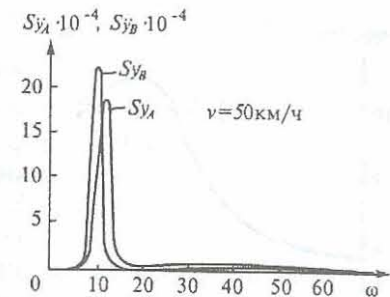


Рис. 6.26

$$y_c = K_A y_A + K_B y_B, \quad (6.222)$$

где

$$K_A = \frac{b}{L} + \frac{a_c}{L}; \quad K_B = \left(\frac{a}{L} + \frac{a_c}{L} \right).$$

Переходя в (6.222) к изображению по Фурье, получаем

$$y_c(i\omega) = K_A y_A(i\omega) + K_B y_B(i\omega), \quad (6.223)$$

или, используя (6.218),

$$y_c(i\omega) = (K_A W_A + K_B W_B e^{-i\omega t_2}) H_1 = W_c H_1. \quad (6.224)$$

Спектральная плотность смещения точки с с учетом соотношения (6.224)

$$S_{y_c} = |W_c|^2 S_h(v, \omega), \quad (6.225)$$

где $W_c = (K_A W_A + K_B W_B e^{-i\omega t_2})$.

Спектральная плотность ускорения точки с и среднее квадратическое ускорение точки с

$$S_{\ddot{y}_c} = |W_c|^2 \omega^4 S_h; \quad (6.226)$$

$$\sigma_{\ddot{y}_c}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |W_c|^2 \omega^4 S_h(v, \omega) d\omega. \quad (6.227)$$

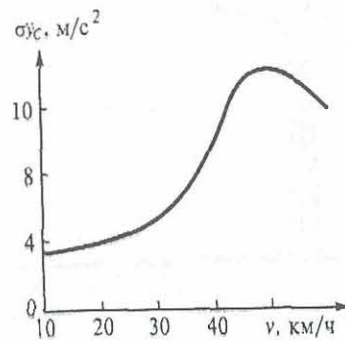


Рис. 6.27

Изменение среднее квадратического значения ускорения $\sigma_{\ddot{y}_c}$ точки с в зависимости от скорости v для рассматриваемого примера показано на рис. 6.27. Из графика следует, что при езде по данной дороге (характеризуемой спектральной плотностью (6.218)) имеется наиболее неблагоприятная скорость v ($v \approx 50$ км/ч), при которой средние квадратические значения ускоре-

ний, действующих на водителя, достигают максимальных значений.

Приведем выражение для W_c к виду, удобному для интегрирования. Как известно, любую функцию $f(i\omega)$, зависящую от мнимого аргумента, можно представить в виде

$$f(i\omega) = f_1(\omega) + if_2(\omega).$$

Поэтому

$$W_A = W_{A_1} + iW_{A_2}, \quad W_B = W_{B_1} + iW_{B_2},$$

и выражение для W_c преобразуется к виду

$$W_c(i\omega) = W_1(\omega) + iW_2(\omega),$$

где

$$W_1 = K_A W_{A_1} + K_B W_{B_1} \cos \omega t_2 + K_B W_{B_2} \sin \omega t_2,$$

$$W_2 = K_A W_{A_2} + K_B W_{B_2} \cos \omega t_2 + K_B W_{B_1} \sin \omega t_2.$$

Квадрат модуля $W_c(i\omega)$ равен

$$|W_c|^2 = W_1^2(\omega) + W_2^2(\omega).$$

В результате получаем

$$\sigma_{\ddot{y}_c}^2(v) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1^2 \omega^4 S_h(v, \omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} W_2^2 \omega^4 S_h(v, \omega) d\omega.$$

Считая, что $\ddot{y}_c$ имеет нормальное распределение, получаем максимально возможное значение случайного ускорения (при $m_h = 0$), которое действует на водителя:

$$\max \ddot{y}_c(v) = 3\sigma_{\ddot{y}_c}(v).$$

Так как $S_h(v, \omega)$ зависит от скорости движения машины v (6.217), можно определить (численно) такое ее значение v_* , при котором $\ddot{y}_c(v)$ достигает максимального значения:

$$\max(\max \ddot{y}_c(v)) = \max \ddot{y}_c(v_*).$$

Глава 7. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН. ПРОДОЛЬНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В предыдущих главах, посвященных случайным колебаниям механических систем с конечным числом степеней свободы, считалось, что упругие элементы (например, стержневые элементы рис. 5.8, 5.9, 5.24, 6.7, 6.10) являются безынерционными. Это, конечно, не совсем так. Это справедливо только в том случае, когда сосредоточенные массы много больше масс упругих элементов. К сожалению, понятие «много больше» не связано с конкретной числовой оценкой, поэтому является неопределенным и не всегда убедительным. Все зависит от точности, предъявляемой к конечным числовым результатам расчета. Например, на рис. 5.24 была показана сосредоточенная масса m , связанная с пружиной, которая рассматривалась как безмассовая (безынерционная). Но реальная пружина имеет массу, поэтому при колебаниях возникнут силы инерции, которые могут существенно изменить результаты расчета, полученные без их учета.

На рис. 5.4 показана мачта с антенной. При исследовании случайных колебаний этой конструкции силы инерции стержня (мачты) не учитывались, поэтому оценить точность полученных результатов нельзя. Единственное, что можно утверждать: чем больше отношение $\frac{M}{m_1 l}$ (где m_1 — масса единицы длины мачты), тем точнее результат. Но чтобы получить конкретные числовые результаты влияния этого отношения на точность решения, необходимо в расчетах учесть силы инерции мачты. Это возможно сделать только в том случае, если мачту рассматривать

как систему с распределенными параметрами. Аналогичные проблемы возникают и в системах с несколькими степенями свободы (например, рис. 6.7, 6.10). Оценить точность результатов расчета механических систем, содержащих сосредоточенные массы, соединенные упругими элементами, когда упругие элементы рассматриваются как безмассовые, можно только переходя к более точным математическим моделям, таким, которые учитывают инерционные свойства упругих элементов, т.е. упругие элементы надо рассматривать как системы с бесконечным числом степеней свободы (системы с распределенными параметрами).

В данной главе рассматриваются случайные колебания наиболее простых механических систем с распределенными параметрами. К этим системам относятся реальные объекты, расчетные схемы которых можно представить как струну (струна — это стержень, изгибной и крутильной жесткостью которого можно пренебречь), рис. 7.1–7.5; стержень, когда рассматриваются продольные колебания (рис. 7.6, а), или вал, когда рассматриваются крутильные колебания (рис. 7.6, б). Случайные колебания пространственно-криволинейных стержней рассмотрены в следующей главе.

На рис. 7.1 показана натянутая струна, которая часто используется как частотный датчик или как низкочастотный электромеханический фильтр (низкочастотный по сравнению с частотным спектром электрических фильтров).

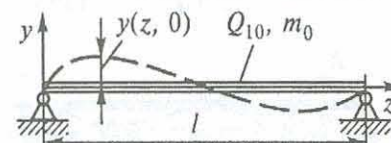


Рис. 7.1

На рис. 7.2, а приведена упрощенная математическая модель канатной дороги. По натянутому тросу (струне) движется со скоростью v сосредоточенная масса m , на которую действует случайная аэродинамическая сила F . В результате возникнут пространственные случайные колебания массы m . Если ограничиться, в качестве примера, колебаниями только в вертикальной плоскости (yOz), то математическая модель может быть представлена, как показано на рис. 7.2, б, где F_y — вертикальная составляющая аэродинамической силы F . Возникающие при колебаниях случайные ускорения могут быть весьма значитель-

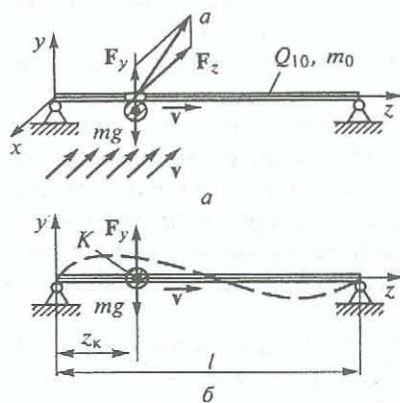


Рис. 7.2

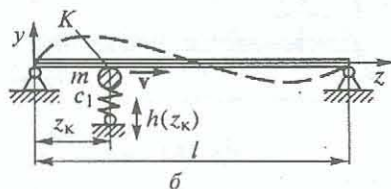
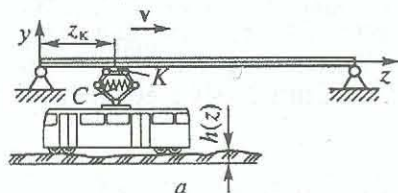


Рис. 7.3

Это может иметь место, так как связь между проводом и массой односторонняя. В реальных условиях всегда имеется небольшое провисание провода (штрихпунктирная линия на рис. 7.3, а), что очень сильно увеличивает вероятность нарушения контакта.

На рис. 7.4, а показан лентопротяжный механизм в системе записи и воспроизведения информации. Система находится на основании, которое имеет случайное перемещение $Y_0(t)$

ными. Определив максимально возможные значения ускорений, действующих на массу m при движении по тросу, можно уменьшить, изменяя натяжение Q_{10} , скорость движения массы. Но это можно сделать только в том случае, если имеется решение (аналитическое или численное) сформулированной задачи.

На рис. 7.3, а показан участок провода (струны), с которым контактирует, например, движущийся троллейбус. Контактное устройство (токоъемник) можно представить как сосредоточенную массу m и жесткость c_1 (рис. 7.3, б). Из-за случайных неровностей дороги (h) точка k_1 получает случайные вертикальные перемещения, что приводит к кинематическому возбуждению системы. В зависимости от вероятностных характеристик дороги, скорости движения V и остальных параметров системы (m, c_1, Q_{10}) при возникающих колебаниях возможны случаи, когда контактная сила между проводом и массой m в дискретные моменты времени обращается в нуль.

(рис. 7.4, б). В результате возникают случайные колебания движущейся ленты, что приводит к искажению информации.

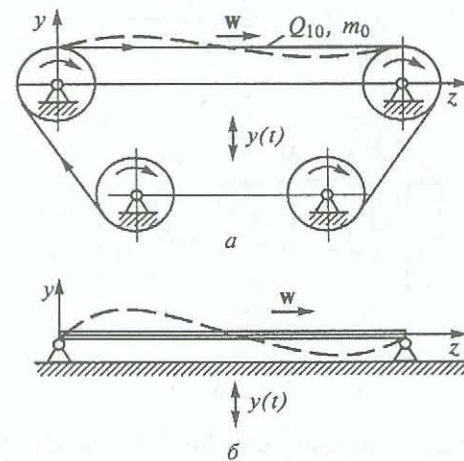


Рис. 7.4

На рис. 7.5 показан участок шланга, внутри которого движется жидкость (шланг — это частный случай трубопровода, у которого изгибные и крутильная жесткости равны нулю, т.е. его можно рассматривать как абсолютно гибкий стержень). Шланг имеет в сечении k (рис. 7.5, а) локальную двустороннюю связь, которая имеет случайное вертикальное перемещение, что приводит к кинематически возбуждаемым колебаниям шланга. Режимы случайных колебаний зависят от скорости движения жидкости w и давления p .

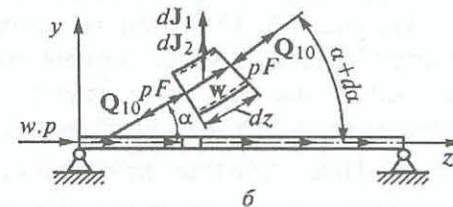
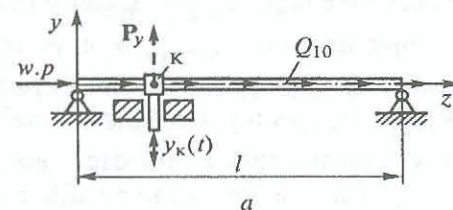


Рис. 7.5

На рис. 7.6, а показан стержень переменного сечения с сосредоточенной мас-

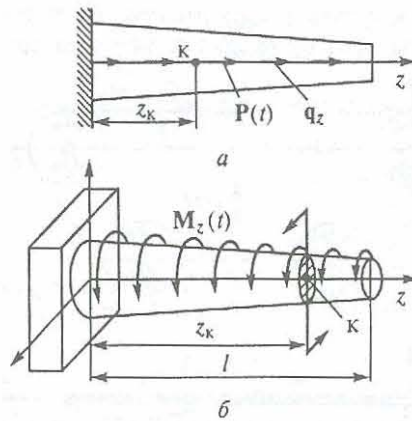


Рис. 7.6

сой m , на который действует случайная распределенная сила $q_z(t)$ и сосредоточенная сила $P_z(t)$. Случайные продольные колебания стержня приводят к появлению случайных напряжений, которые необходимо учитывать при расчетах. Например, если для нормальной работы стержня необходимо выполнение условия $(\sigma_T - \sigma_{\max}) > 0$, где σ_T — предел текучести материала стержня; $\sigma_{\max}$ — максимальное напряжение в стержне, то при случайном $\sigma_{\max}$ и с учетом возможных разбросов σ_T требуется определить вероятность выполнения неравенства, т.е. $P[(\sigma_T - \sigma_{\max}) > 0]$. Определить числовое значение P можно в том случае, когда имеются вероятностные характеристики $\sigma_{\max}$, которые можно получить только из решения уравнения случайных продольных колебаний стержня.

На рис. 7.6, б показан вал переменного сечения, имеющий сосредоточенную массу, момент инерции которой относительно оси Z равен J_z . Вал нагружен случайным распределенным моментом $\mu_z(t)$ и случайным сосредоточенным моментом $M_z(t)$. При случайных крутильных колебаниях вала возникают случайные касательные напряжения. Для оценки нормальной работы вала, по аналогии с предыдущим примером, надо определить вероятность безотказной работы $P[(\tau_T - \tau_{\max}) > 0]$.

§ 7.1. Уравнения малых колебаний

Уравнения малых колебаний струны, продольных колебаний стержня и крутильных колебаний вала относятся к одному классу уравнений в частных производных — к уравнениям гиперболического типа. В монографиях и учебниках, посвященных уравнениям математической физики, приводятся уравнения, не учитывающие сосредоточенные массы и сосредоточенные силы. В основном рассматриваются волновые уравнения или уравнения, когда действующие на струну, стержень или вал силы распределены по всей длине. В примерах на рис. 7.1–7.7 показано, что реальные задачи могут быть существенно сложнее не только классических задач, которые приводятся в математической литературе, но и тех, которые обычно рассматриваются в монографиях, посвященных теории колебаний. Эти уравнения, которые приводятся без вывода для наиболее общих случаев, имеют следующий вид (с учетом сил вязкого трения).

1. Уравнение поперечных колебаний неоднородной струны, которая имеет сосредоточенную массу m , нагружена осевой q_z и поперечной $q_y(z)$ распределенными нагрузками и сосредоточенной силой $P_y(t)$ в сечении с координатами z_1 ,

$$m_1(z) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta(z - z_k) = \frac{\partial}{\partial z} \left[Q_{10}(z) \frac{\partial y}{\partial z} \right] + q_y(z, t) + P_y \delta(z - z_1), \quad (7.1)$$

где y — вертикальное смещение точек осевой линии струны; $\delta(z - z_1)$, $\delta(z - z_k)$ — дельта-функции Дирака; α — коэффициент силы вязкого трения.

Сила вязкого трения — это сила, приближенно учитывающая все потери энергии при колебаниях, зависящие от сопротивления внешней среды, гистерезиса и т.д.

Осевое усилие $Q_{10}(z)$ и масса единицы длины струны $m_1(z)$ известны.

Получим уравнение малых колебаний для движущейся струны (ленты) (см. рис. 7.4) и для шланга, заполненного потоком жидкости (см. рис. 7.5).

На рис. 7.5, б показан элемент шланга с жидкостью. На элемент шланга с жидкостью при колебаниях действуют силы инерции dJ_1 и dJ_2 , равные

$$dJ_1 = -m_1 \frac{d^2 y}{dt^2} dz, \quad dJ_2 = -m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} dz, \quad (7.2)$$

где m_1 — масса единицы длины шланга; m_2 — масса жидкости, приходящаяся на единицу длины шланга. Проецируя все силы, приложенные к элементу шланга, на ось Y , получаем

$$-m_1 \frac{d^2 y}{dt^2} dz - m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} dz + Q_{10} d\alpha - pF d\alpha = 0, \quad (7.3)$$

где $d\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz$.

Чтобы получить уравнение в частных производных, надо перейти к переменным, которые используются в механике сплошной среды (переменные Лагранжа или Эйлера). В задачах, где имеется относительное движение сред, наиболее эффективными являются переменные Эйлера. Переходя в (7.2) к переменным Эйлера, получаем

$$m_1 \frac{d^2 y}{dt^2} = m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2};$$

$$m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = m_2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2w \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + w^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right).$$

Поэтому после преобразований из (7.3) получаем следующее уравнение (с учетом силы вязкого трения):

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + 2wm_2 \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} =$$

$$= \left[Q_{10} - (pF + m_2 w^2) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}. \quad (7.4)$$

Слагаемое, содержащее смешанную производную, есть сила Кориолиса. Из (7.4) как частный случай при $m_1 = 0$, $p = 0$ получаем уравнение колебаний ленты (см. рис. 7.4, б)

$$m_2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + 2wm_2 \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} = (Q_{10} - m_2 w^2) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \quad (7.5)$$

где m_2 — масса единицы длины ленты.

Если шланг в сечении с координатой Z_k имеет сосредоточенную массу m , а в сечении Z_p приложена сила P_y , то уравнение вынужденных колебаний шланга имеет вид

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + 2wm_2 \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \delta(z - z_k) =$$

$$= Q_{10}^{(1)} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + P_y \delta(z - z_p), \quad (7.6)$$

где $Q_{10}^{(1)} = Q_{10} - (pF + m_2 w^2)$.

2. Уравнение продольных колебаний стержня переменного сечения с сосредоточенной массой m и нагруженного распределенной и сосредоточенной нагрузкой (рис. 7.7, а)

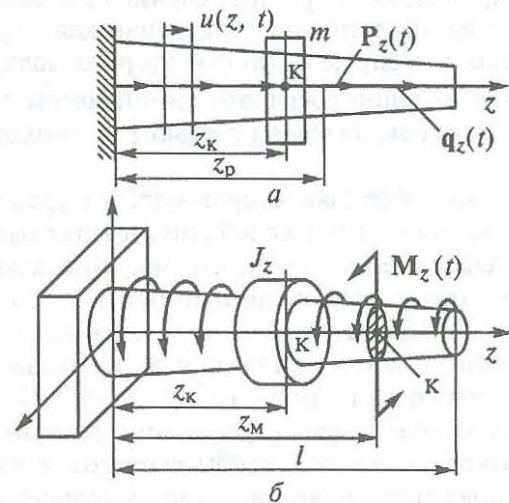


Рис. 7.7

$$m_0(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \delta(z - z_k) = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left[F(z) E \frac{\partial u}{\partial z} \right] + q_z(z, t) + P_z \delta(z - z_p), \quad (7.7)$$

где u — продольное смещение сечения стержня (смещение точек осевой линии стержня при колебаниях); F — площадь поперечного сечения стержня; E — модуль упругости первого рода.

3. Уравнение крутильных колебаний вала переменного сечения с сосредоточенной «массой», распределенным и сосредоточенным моментом M (см. рис. 7.7, б)

$$\rho J_z(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta(z - z_J) = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(J_z(z) G \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mu_z(z, t) + M \delta(z - z_M), \quad (7.8)$$

где φ — угол поворота сечения вала; $J_z(z)$ — полярный момент инерции вала, имеющего круглое сечение (для вала некруглого сечения имеется аналогичная геометрическая характеристика сечения J_k); G — модуль упругости второго рода; I_z — физический момент инерции сосредоточенной массы относительно центральной оси, совпадающей с осью z ; ρ — плотность материала вала.

Если внешняя нагрузка отсутствует, то уравнения (7.1)–(7.8) описывают свободные колебания, вызванные, например, смещением точек осевой линии струны в начальный момент времени. Получить решения уравнений (7.1)–(7.8) в аналитической форме записи (за исключением частных случаев) весьма сложно. Особенно, когда приложенные в произвольных сечениях силы изменяются во времени. Метод начальных параметров, который обычно используется при решении задач, где требуется стыковать участки, чтобы сосредоточенные массы и сосредоточенные силы не входили явно в уравнения, приводит к очень громоздким конечным результатам. Поэтому в дальнейшем при анализе случайных колебаний систем с распре-

деленными параметрами используются как точные методы, позволяющие получить решение в аналитической форме записи, так и приближенные методы, которым отдается предпочтение, так как они позволяют довести до числовых значений решения сложных задач.

Рассмотрим нестационарные колебания струны с движущейся с постоянной скоростью V массой m (см. рис. 7.2, б). Считаем, что вероятностные характеристики случайной аэродинамической силы $F_y(t)$, действующей на массу m , известны, т.е. известны математическое ожидание $m_F(t)$ и автокорреляционная функция $K_F(t, t')$. Требуется найти максимально возможные ускорения массы m , считая закон распределения ускорения нормальным.

Уравнение малых колебаний системы получаем из (7.1) при $m_1 = \text{const}$, $Q_{10} = \text{const}$, $q_y = 0$. На массу m действуют три силы: сила веса mg ; аэродинамическая сила $F_y(t)$ и сила инерции

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} \Big|_{z=z_k}, \text{ поэтому}$$

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} = Q_{10} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + F_y \delta(z - z_k) + (-m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) \delta(z - z_k). \quad (7.9)$$

Переходя к переменным Эйлера, получаем

$$\left(\delta = \delta(z - z_k), \quad z_k = vt \right) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} \delta_k = m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \delta_k.$$

Поэтому из (7.9) имеем

$$L(y) = (m_0 + m \delta_k) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + 2mv \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} \delta_k - \\ - (Q_{10} - mv^2 \delta_k) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - F_y \partial_k = 0. \quad (7.10)$$

§ 7.2. Решение уравнений малых колебаний

Получим приближенное решение уравнения (7.10), взяв

$$y = \sum f_j(t) \sin \frac{\pi j z}{l}. \quad (7.11)$$

Возможные перемещения берем в виде

$$\delta y = \sum_{j=1}^n \delta a_j \sin \frac{\pi j z}{l}. \quad (7.12)$$

Воспользовавшись принципом возможных перемещений, получаем систему уравнений

$$\int_0^l L(y) \sin \frac{\pi v z}{l} dz = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (7.13)$$

После преобразований с учетом свойств δ -функций получаем систему уравнений относительно неизвестных функций

$$\sum_{j=1}^n [a_{vj}(t) \ddot{f}_j + b_{vj}(t) \dot{f}_j + c_{vj}(t) f_j] = b_v F_y \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (7.14)$$

Например, ограничившись двучленным приближением, получим следующие выражения для коэффициентов a_{vj} , b_{vj} , c_{vj} и b_v :

$$a_{11} = m_0 \frac{l}{2} + m \sin \frac{2\pi v t}{l}, \quad a_{12} = m \sin \frac{2\pi v t}{l} \sin \frac{\pi v t}{l};$$

$$a_{21} = m \sin \frac{\pi v t}{l} \sin \frac{2\pi v t}{l}; \quad a_{22} = m_0 \frac{l}{2} + m \sin^2 \frac{2\pi v t}{l};$$

$$b_{11} = \alpha \frac{l}{2} + 2mv \left(\frac{\pi}{l} \right) \cos \frac{2\pi v t}{l} \sin \frac{\pi v t}{l};$$

$$b_{12} = 2mv \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \frac{2\pi v t}{l} \sin \frac{\pi v t}{l};$$

$$b_{21} = 2mv \left(\frac{\pi}{l} \right) \cos \frac{\pi v t}{l} \sin \frac{\pi v t}{l};$$

$$b_{22} = \alpha \frac{l}{2} + 2mv \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \frac{2\pi v t}{l} \sin \frac{2\pi v t}{l};$$

$$c_{11} = Q_{10} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 - mv^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi v t}{l};$$

$$c_{12} = -mv^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{2\pi v t}{l} \sin \frac{\pi v t}{l};$$

$$c_{21} = -mv^2 \left(\frac{v}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi v t}{l} \sin \frac{2\pi v t}{l};$$

$$c_{22} = Q_{10} \frac{l}{2} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - mv^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi v t}{l};$$

$$b_1 = F_y \sin \frac{\pi v t}{l}; \quad b_2 = F_y \sin \frac{2\pi v t}{l}.$$

В векторной форме записи система уравнений (7.14) имеет вид

$$A(t) \ddot{\mathbf{f}} + B(t) \dot{\mathbf{f}} + C(t) \mathbf{f} = \mathbf{b}_0 \quad (7.15)$$

или

$$\dot{\Phi} + D(t) \Phi = \mathbf{b}, \quad (7.16)$$

где

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T, \quad \Phi_1 = (\dot{f}_1, \dot{f}_2)^T, \quad \Phi_2 = (f_1, f_2)^T,$$

$$D(t) = \begin{vmatrix} A^{-1}B & A^{-1}C \\ -E & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = (A^{-1} \mathbf{b}_0, 0)^T.$$

Уравнение (7.16) является линейным уравнением с коэффициентами, зависящими от времени, и решить его можно только численными методами. В рассматриваемой задаче время

процесса ограничено ($0 \leq t \leq \frac{l}{v}$). Поэтому при любой случайной аэродинамической силе, стационарной или нестационарной, колебания массы m являются нестационарными.

Решение уравнения (7.15) при нулевых начальных данных имеет вид

$$\Phi = \int_0^t G(t, t_1) \mathbf{b}(t_1) dt \quad (G(t, t_1)) = K(t)K^{-1}(t_1), \quad (7.17)$$

где $K(t)$ — функциональная матрица решений однородного уравнения (7.16). Матрицы $K(t)$ и $K^{-1}(t)$ определяются численными методами.

Из уравнения (7.16) находим производную вектора Φ :

$$\dot{\Phi} = - \int_0^t D(t) G(t, t_1) \mathbf{b}(t_1) dt_1 + \mathbf{b}(t),$$

а затем вторые производные:

$$\ddot{f}_1 \text{ и } \ddot{f}_2 \quad (\Phi = (\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_1, \dot{f}_2)^T),$$

$$\ddot{f}_1 = - \int [q_{11}(t, t_1)b_{01}(t) + q_{12}(t, t_1)b_{02}(t)] F_y(t_1) dt_1 + b_{01} F_y(t),$$

$$\ddot{f}_2 = - \int [q_{21}(t, t_1)b_{01}(t) + q_{22}(t, t_1)b_{02}(t)] F_y(t_1) dt_1 + b_{02} F_y(t),$$

где q_{ij} — элементы матрицы $D(t)K(t)K^{-1}(t)$;

$$b_{01} = a_{11}^{(1)}(t_1) \sin \frac{\pi v t_1}{l} + a_{12}^{(1)}(t_1) \sin \frac{2\pi v t_1}{l};$$

$$b_{02} = a_{21}^{(1)}(t_1) \sin \frac{\pi v t_1}{l} + a_{22}^{(1)}(t_1) \sin \frac{2\pi v t_1}{l}$$

($a_{ij}^{(1)}(t_1)$ — элементы матрицы $A^{-1}(t_1)$).

Ускорение массы m равно

$$\ddot{y}(z, t) = \ddot{f}_1 \sin \frac{\pi z}{l} + \ddot{f}_2 \sin \frac{2\pi z}{l}, \quad (7.18)$$

или

$$\ddot{y}(z, t) = - \int_0^t q(t, t_1, z) f_y(t_1) dt_1 + b(t, z) F(t), \quad (7.19)$$

где

$$q(t, t_1, z) = \left(q_{11} \sin \frac{\pi z}{l} + q_{21} \sin \frac{2\pi z}{l} \right) b_{01} + \left(q_{21} \sin \frac{\pi z}{l} + q_{22} \sin \frac{2\pi z}{l} \right) b_{02};$$

$$b(t, z) = b_{01} \sin \frac{\pi z}{l} + b_{02} \sin \frac{2\pi z}{l}.$$

Находим математическое ожидание ускорения $m_y(t, z)$ и корреляционную функцию $K_{\ddot{y}}(t, t')$:

$$m_{\ddot{y}}(t, z) = \int_0^t q(t, t_1, z) m_y(t_1) dt_1 + b(t, z) m_y(t); \quad (7.20)$$

$$K_{\ddot{y}}(t, t', z) = \int_0^t \int_0^{t'} q(t, t_1, z) q(t', t_2, z) K_F(t_1, t_2) dt_1 dt_2 -$$

$$- b(t', z) \int_0^t q(t, t_1, z) K_F(t', t_1) dt_1 - b(t, z) \int_0^{t'} q(t', t_2, z) \times$$

$$\times K_F(t, t_2) dt_2 + b(t_1, z) b(t', z) K_F(t, t'). \quad (7.21)$$

Полагая $t' = t$, получаем дисперсию ускорения

$$D_{\ddot{y}}(t, z) = K_{\ddot{y}}(t, t', z)|_{t'=t}. \quad (7.22)$$

Задаваясь дискретными значениями t_j ($0 \leq t \leq t_k$), численно определяем $m_{\ddot{y}}(t_j, z)$ и $\sigma_{\ddot{y}}(t_j, z)$.

Воспользовавшись правилом трех сигм, получим максимальное значение ускорения для заданной скорости:

$$\max \ddot{y}(t_j, z) = m_{\ddot{y}}(t_j, z) + 3\sigma_{\ddot{y}}(t_j, z). \quad (7.23)$$

Качественный характер изменения максимального ускорения по координате Z (при фиксированных t_j) показан на рис. 7.8. В свою очередь, максимальные значения ускорения

$\max \ddot{y}(t_j, z)$ для каждого момента t_j имеют максимум и по координате Z (рис. 7.8). Поэтому при движении массы m на участке $0 \leq z \leq l$ максимально возможно ускорение $\ddot{y}$, равное (при заданной скорости v)

$$\ddot{y}_* = \max (\max \ddot{y}(t_j, z))$$

$$0 \leq t \leq t_k, 0 \leq z \leq l.$$

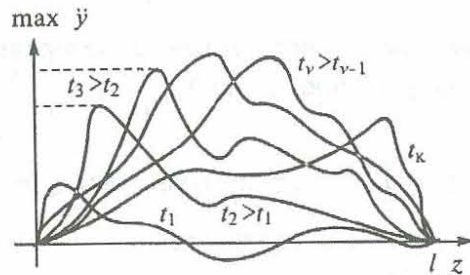


Рис. 7.8

Рассмотрим стационарные колебания шланга (см. рис. 7.5, а), вызванные стационарным кинематическим возбуждением с известными вероятностными характеристиками: $m_{y_k} = 0$, $S_{y_k}(\omega)$. Найдем спектральную плотность вертикальных перемещений точек осевой линии шланга ($S_y(\omega, z)$) и максимальное значение сосредоточенной случайной силы, возникающей в сечении K , считая, что она имеет нормальное распределение. В сечении K , где имеет место принудительное смещение, введем неизвестную сосредоточенную силу $P_y(t)$. Воспользуемся уравнением (7.6), полагая $m = 0$:

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + 2wm_2 \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} = Q_{10}^{(1)} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + P_y(t) \delta(z - z_k) \quad (7.24)$$

$$(Q_{10}^{(1)} = Q_{10} - (pF + m_2 w^2)).$$

Для приближенного решения уравнения (7.24) полагаем

$$y = \sum_{j=1}^n f_j(t) \sin \frac{\pi j z}{l}. \quad (7.25)$$

Подставив (7.25) в (7.24) с учетом принципа возможных перемещений, получим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{f}_j + b_{ij} \dot{f}_j + c_{ij} f_j) = b_j P_y(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.26)$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum (a_{ij}(i\omega)^2 b_{ij}(i\omega) + c_{ij}(i\omega)) \Phi_j(i\omega) = b_j P_{0y}(i\omega), \quad (7.27)$$

где b_{ij} и c_{ij} — постоянные коэффициенты, зависящие от скорости жидкости w и давления в жидкости P .

Из системы уравнений (7.27) определим $\Phi_j(i\omega)$:

$$\Phi_j(i\omega) = w_j(i\omega) P_{0y}(i\omega). \quad (7.28)$$

Приближенное выражение для (7.25) в частотной области имеет вид

$$Y(z, i\omega) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z}{l}. \quad (7.29)$$

Исключив из (7.29) $\Phi_j(i\omega)$, получим

$$Y(z, i\omega) = \sum_{j=1}^n w_j(i\omega) P_{y0}(i\omega) \sin \frac{\pi j z}{l}. \quad (7.30)$$

Введенную неизвестную силу (изображение силы P_y) найдем из условия

$$Y(z, i\omega)|_{z=z_k} = Y(i\omega), \quad (7.31)$$

где $Y_k(i\omega)$ — изображение смещения точки K .

Для определения $P_{0y}(i\omega)$ получаем уравнение

$$Y_k(i\omega) = \left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z_k}{l} \right) P_{0y}(i\omega), \quad (7.32)$$

поэтому

$$P_{0y}(i\omega) = \frac{Y_k(i\omega)}{\left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z_k}{l} \right)}. \quad (7.33)$$

В результате

$$Y(z, i\omega) = \frac{\left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z_k}{l} \right)}{\left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z_k}{l} \right)} Y_k(i\omega), \quad (7.34)$$

или

$$Y(z, i\omega) = w(z, i\omega) Y_k(i\omega). \quad (7.35)$$

Спектральная плотность вертикальных перемещений точек осевой линии шланга и дисперсии перемещений равны

$$S_y(\omega, z) = |w(z, i\omega)|^2 S_{y_k}(\omega); \quad (7.36)$$

$$D_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w(z, i\omega)|^2 S_{y_k}(\omega) d\omega. \quad (7.37)$$

Найдем дисперсию возникающей в сечении K сосредоточенной силы P_y . Из (7.33) определим спектральную плотность $S_{P_y}(\omega)$:

$$S_{P_y}(\omega) = |w_1|^2 S_{y_k}(\omega), \quad (7.38)$$

где

$$w_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z_k}{l} \right)}.$$

Дисперсия силы P_y равна

$$D_{P_y} = \int_{-\infty}^{\infty} |w_1|^2 S_{y_k}(\omega) d\omega. \quad (7.39)$$

Максимально возможное значение P_y (при $m_{P_y} = 0$) равно

$$\max P_y = 3 \sqrt{D_{P_y}}.$$

3. По каналу ствола с возрастающей скоростью движется снаряд (рис. 7.9). Сила трения между снарядом и каналом ствола равна $P = P_0 + \Delta P(t)$. Вследствие возможных мгновенных прилипания поверхности снаряда к поверхности канала или уменьшения контактного давления сила P имеет случайную составляющую $\Delta P(t)$. На рис. 7.10 изображена одна из реализаций случайной функции $\Delta P(t)$.

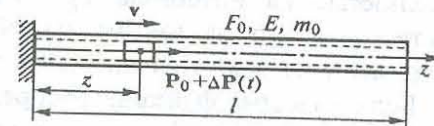


Рис. 7.9

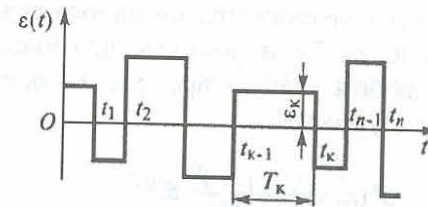


Рис. 7.10

Требуется найти дисперсию случайной составляющей напряжения $\Delta \sigma$ в стволе в момент выхода снаряда. Для упрощения выкладок будем считать, что скорость снаряда линейно зависит от времени, т.е. $v = at$, где a — постоянное ускорение.

При $t = 0$ тело находится в начале координат. Считая случайную функцию $\Delta P(t)$ стационарной, найдем корреляционную функцию $K_{\Delta P}(t)$. Произведение двух значений функции $\Delta P(t)$ и $\Delta P(t + \tau)$ зависит от того, лежат ли моменты времени t и $t + \tau$ в одном и том же интервале T_k или в разных интервалах. Если в одном интервале, то

$$\Delta P(t) \Delta P(t + \tau) = \Delta P_k^2, \quad (7.40)$$

если в разных интервалах, то

$$\Delta P(t) \Delta P(t + \tau) = \Delta P_k \Delta P_i. \quad (7.41)$$

Для получения корреляционной функции нужно просуммировать усредненные по множеству значения произведений (7.40) и (7.41), умноженные на соответствующие вероятности, для чего надо найти вероятность того, что отрезок длиной τ укладывается полностью на интервале T_k . Эта вероятность равна вероятности того, что на взятом случайным образом отрезке на оси времени не окажется ни одной точки разрыва функции $\Delta P(t)$. Если известна функция распределения нулей (разрывов функции $\Delta P(t)$) на интервале τ в зависимости от длины этого интервала, то можно найти вероятность $P(n, \tau)$ числа нулей функции $\Delta P(t)$, где n — число нулей. Вероятность того, что на интервале τ не окажется ни одного разрыва функции $\Delta P(t)$, равна $P(0, \tau)$. Если принять, что число разрывов функции $\Delta P(t)$ на любом участке времени τ подчиняется закону распределения Пуассона

$$P(n, \tau) = \frac{(\mu \tau)^n}{n!} e^{-\mu \tau}$$

(где μ — средняя частота разрывов, которая считается известной), то вероятность равна $P(0, \tau) = e^{-\mu \tau}$.

Вероятность того, что интервал τ больше интервала T_k (т.е. моменты времени t и $t + \tau$ находятся в разных интервалах T_k), равна $1 - P(0, \tau)$.

Следовательно, корреляционная функция имеет вид

$$K_{\Delta P}(\tau) = M[\Delta P_k^2]P(0, \tau) - M[\Delta P_k \Delta P_i][1 - P(0, \tau)].$$

Считая, что ΔP_k и ΔP_i независимы и одинаково распределены, получаем

$$K_{\Delta P}(\tau) = M[\Delta P_k^2]P(0, \tau) = D_{\Delta P} e^{-\mu \tau}.$$

Спектральная плотность ΔP

$$S_{\Delta P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Delta P}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \frac{D_{\Delta P} \mu}{(\mu^2 + \omega^2)}.$$

Уравнение продольных колебаний стержня постоянного сечения с учетом движущейся сосредоточенной силы (силой сопротивления пренебрегаем) имеет вид

$$m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EF_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Delta P(t) \delta \left(z - \frac{at^2}{2} \right). \quad (7.42)$$

Полагая в (7.42)

$$u = \sum_{j=1,3,\dots} f_j(t) \sin \frac{\pi j z}{2l};$$

$$\delta \left(z - \frac{at^2}{2} \right) = \sum_{j=1,2,\dots} c_j \sin \frac{\pi j z}{2l} \quad \left(c_j = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi j at^2}{4l} \right),$$

после преобразований получаем уравнения для определения функций $f_j(t)$:

$$f_j + p_j^2 f_j = \frac{2}{m_1 l} \Delta P(t) \sin \frac{\pi j at^2}{4l} \quad \left(p_j^2 = \left(\frac{\pi j}{2l} \right)^2 \frac{EF_0}{m_1} \right). \quad (7.43)$$

Решение уравнений (7.43) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$f_j = \frac{2}{p_j l m_1} \int_0^t \sin p_j(t-\tau) \sin \frac{\pi j a \tau^2}{4l} \Delta P(\tau) d\tau. \quad (7.44)$$

В результате получаем решение уравнения (7.42):

$$u = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2}{p_j l m_1} \sin \frac{\pi j z}{2l} \int_0^t \sin p_j(t-\tau) \sin \frac{\pi j a \tau^2}{4l} \Delta P(\tau) d\tau. \quad (7.45)$$

Напряжение в сечениях стержня, вызванное только случай- ной силой $\Delta P(t)$,

$$\Delta \sigma = E \frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{E \pi j}{p_j l^2 m_1} \cos \frac{\pi j z}{2l} \int_0^t \sin p_j(t-\tau) \sin \frac{\pi j a \tau^2}{4l} \Delta P(\tau) d\tau.$$

Дисперсия напряжения

$$D_{\Delta \sigma} = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{E^2 (\pi j)^2}{p_j p_k l^4 m_1^2} \cos \frac{\pi j z}{2l} \cos \frac{\pi k z}{2l} \int_0^t \int_0^t \sin p_j \times \\ \times (t-\tau) \sin \frac{\pi j a \tau^2}{4l} \sin p_k(t-\tau_1) \sin \frac{\pi k a \tau_1^2}{2l} K_{\Delta P} d\tau d\tau_1. \quad (7.46)$$

Для определения дисперсии напряжения в момент выхода снаряда из канала ствола следует взять в выражении (7.46) верхний предел интегрирования равным

$$t = t_k = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

4. Для осреднения эксцентриситетов тяги R двигателя ра- кета при сходе с направляющей раскручивается (рис. 7.11). Для раскручивания ракеты имеются двигатели проворота I , которые включаются в момент схода (этот момент можно принять за начальный). Двигатели проворота создают момент относитель- но продольной оси, который имеет постоянную M_0 и случай- ную $\Delta M(t)$ составляющие ($M = M_0 + \Delta M(t)$). Случайную со- ставляющую можно рассматривать как случайную стационар- ную функцию с известной спектральной плотностью $S(\omega)$. В

результате действия случайного крутящего момента $\Delta M(t)$ воз- никают крутильные колебания ракеты, которые вносят погреш- ности в показания приборов системы управления. Для оценки возможных погрешностей приборов вследствие случайных кру- тильных колебаний необходимо знать вероятностные характе- ристики крутильных колебаний и, в частности, дисперсию углового ускорения в тех сечениях ракеты, где находятся соот- ветствующие приборы.

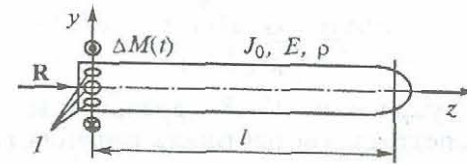


Рис. 7.11

Считая, что случайные крутильные колебания ракеты яв- ляются стационарными, требуется найти дисперсию углового ускорения ракеты. При решении ограничимся простейшим случаем, когда $\rho J_0 = \text{const}$ и $G J_0 = \text{const}$. Уравнение случайных крутильных колебаний ракеты с учетом вязкого трения имеет вид (частный случай уравнения (4.57))

$$J_0 \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = J_0 G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \Delta M(t) \delta(z). \quad (7.47)$$

В данном случае собственные функции свободных крутиль- ных колебаний стержня равны $\cos \frac{\pi n z}{l}$ (так как краевые условия имеют вид 1) $z = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$; 2) $z = l$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, то, полагая в (7.47)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \cos \frac{\pi j z}{l}; \quad \delta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cos \frac{\pi j z}{l}; \quad c_j = (-1)^j \frac{2}{l}, \quad (7.48)$$

подставив выражение для φ (7.48) в уравнение (7.47) и воспользовавшись принципом возможных перемещений после преобразований, получим систему уравнений относительно $f_j(t)$:

$$\ddot{f}_j + \frac{\alpha}{J_0 \rho} \dot{f}_j + p_j^2 f_j = (-1)^j \frac{2}{J_0 \rho l} \Delta M(t), \quad (7.49)$$

где

$$p_j^2 = \frac{G}{\rho} \left(\frac{\pi j}{l} \right)^2.$$

Полученные уравнения (7.48) аналогичны уравнениям (4.40), поэтому спектральная плотность решения (7.48)

$$S_\varphi(\omega) = |w|^2 S_{\Delta M}(\omega),$$

где

$$|w|^2 = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(-1)^j \cos \frac{\pi j z}{l}}{J_0 \rho l \left(-\omega^2 + \frac{\alpha}{J_0 \rho} i\omega + p_j^2 \right)} \right|^2.$$

Дисперсия углового ускорения

$$D_{\ddot{\varphi}} = \int_{-\infty}^{\infty} |w|^2 \omega^4 S_{\Delta M}(\omega) d\omega. \quad (7.50)$$

Полученное выражение (7.50) позволяет определить максимальное значение углового ускорения, воспользовавшись правилом «трех сигм» в любом сечении ракеты.

Глава 8. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

В предыдущей главе были рассмотрены наиболее простые задачи, относящиеся к системам с распределенными параметрами.

К более сложным системам с распределенными параметрами относятся стержневые элементы машин, приборов и конструкций, так как при решении задач статики и динамики стержневых элементов приходится, как правило, рассматривать системы дифференциальных уравнений в частных производных. На рис. 8.1–8.4 в качестве примеров приведены упругие стержневые элементы и элементы конструкций, которые в расчетной практике рассматриваются как стержни. На рис. 8.1, а, б показаны упругие стержневые элементы приборов: цилиндрическая (рис. 8.1, а) и спиральная (рис. 8.1, б) пружины. Если приборы, в которых они используются, находятся на ускоренно движущемся объекте, то на них из-за разброса тяги двигателя действует случайное ускорение $a_c(t)$. Поскольку реальные упругие элементы обладают массой, то возникающие случайные колебания могут привести к значительным погрешностям в работе приборов.

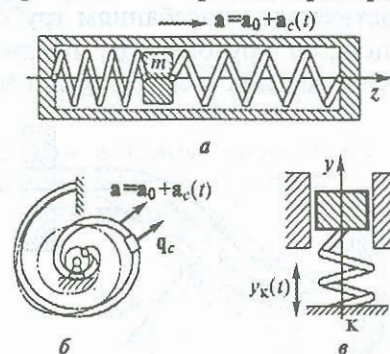


Рис. 8.1

На рис. 8.1, *в* показана система амортизации массы m , где используется коническая пружина. При случайном кинематическом возбуждении ($y_k(t)$) возникают случайные колебания. Масса m может быть одного порядка с массой пружины. Поэтому для определения вероятностных характеристик смещения и первых производных ($y, \dot{y}, \ddot{y}$) массы m необходимо пружину рассматривать как систему с распределенными параметрами.

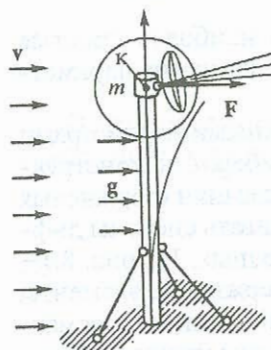


Рис. 8.2

На рис. 8.2 показана мачта с антенной, которая находится в потоке воздуха, скорость которого имеет случайную составляющую. Поэтому на мачту и антенну действуют случайные аэродинамические силы (сосредоточенная сила F — на антенну и распределенная q — на мачту), что вызывает случайные колебания системы. При проектировании представляют интерес случайные характеристики угла поворота луча антенны, влияющие на точность приема или передачи сигналов.

На рис. 8.3 показан криволинейный участок трубопровода, заполненного движущейся жидкостью. (Например, участок бортовой системы питания авиационного двигателя, когда закрепления сечений трубопровода связаны с разными основаниями.) Трубопровод имеет локальную шарнирную связь (сечение k), которая случайно смещается ($u_k(t)$), что приводит к случайным кинематическим колебаниям трубопровода.

На рис. 8.4 показан трубопровод, предназначенный для подъема конструкций со дна моря. Случайная качка корабля

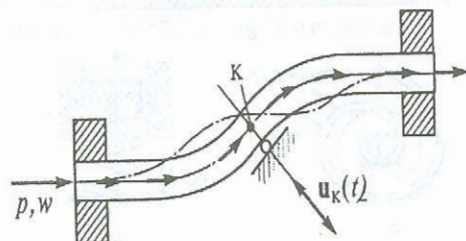


Рис. 8.3

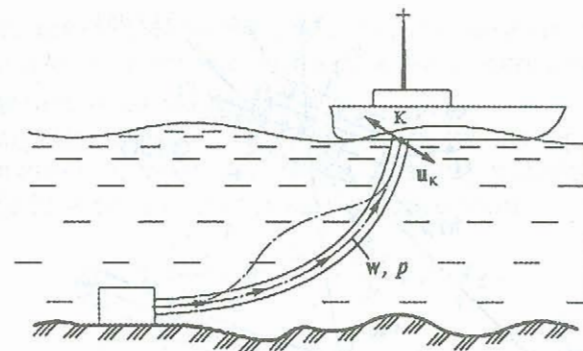


Рис. 8.4

приводит к случайному смещению точки k ($u_k(t)$), что вызывает случайные кинематически возбуждаемые колебания трубопровода.

§ 8.1. Нелинейные уравнения движения пространственно-криволинейных стержней

На рис. 8.5, *а* показан стержень в произвольный момент времени и элемент стержня (рис. 8.5, *б*) с приложенными к нему силами и моментами. На элемент стержня при движении кроме приведенных сил действует сила инерции

$$dJ_u = -m_1 \frac{dv}{dt} ds \quad \left(v = \frac{du}{dt} \right) \quad (8.1)$$

и момент инерции (если учитывать инерцию вращения элемента стержня)

$$d\mu_a = -\frac{d}{dt} (J\omega) ds, \quad (8.2)$$

где J — диагональная матрица, элементами которой являются главные физические моменты инерции элемента стержня, длина которого равна единице,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \kappa \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \mathbf{T} = 0. \quad (8.9)$$

Вектор $\mathbf{M}$ связан с вектором κ уравнением

$$\mathbf{M} = A(\kappa - \kappa_0^{(1)}), \quad (8.10)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad (8.11)$$

A_{11} — крутильная жесткость стержня; A_{22} , A_{33} — изгибные жесткости стержня.

Компонентами вектора $\kappa_0^{(1)}$ являются кручение κ_{10} и кривизны κ_{20} , κ_{30} осевой линии в естественном состоянии стержня в связанных осях, когда они одновременно и главные оси сечения. В естественных осях вектор κ есть вектор Дарбу, равный

$$\Omega = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (8.12)$$

где Ω_1 — кручение осевой линии стержня; Ω_2 — кривизна осевой линии стержня. Поэтому для стержня круглого сечения (для которого все оси являются главными)

$$\kappa_1 = \Omega_1; \quad \kappa_2 = \Omega_2; \quad \kappa_3 = \Omega_3 = \frac{1}{\rho}, \quad (8.13)$$

где ρ — радиус кривизны осевой линии стержня.

Для вектора перемещений ($\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$) (см. рис. 8.5) имеем следующее уравнение (в связанных осях):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} + \kappa \times \mathbf{u} = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{10}. \quad (8.14)$$

Рассматривая производные единичных векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i0}$ по дуговой координате, получим уравнение, связывающее компоненты векторов κ с κ_0 углами v_j :

$$\kappa = L_1 \frac{\partial v}{\partial s} + L \kappa_0^{(1)} \quad (v = (v_1, v_2, v_3)^T), \quad (8.15)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} \cos v_2 \cos v_3 & \cos v_2 \sin v_3 \cos v_1 + \cos v_2 \sin v_3 \sin v_1 - & \\ & + \sin v_2 \sin v_1 & - \sin v_2 \cos v_1 \\ - \sin v_3 & \cos v_1 \cos v_3 & \cos v_3 \sin v_1 \\ \sin v_2 \cos v_3 & \sin v_2 \sin v_3 \cos v_1 - & - \sin v_2 \sin v_3 \sin v_1 + \\ & - \cos v_2 \sin v_1 & + \cos v_2 \cos v_1 \end{bmatrix}; \quad (8.16)$$

$$L = \begin{bmatrix} \cos v_2 \cos v_3 & 0 & - \sin v_2 \\ - \sin v_3 & 1 & 0 \\ \sin v_2 \cos v_3 & 0 & \cos v_2 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Рассматривая производные единичных векторов связанного базиса по времени, получим

$$\dot{\omega} = L_1 \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (8.18)$$

Для элемента движущегося стержня получим векторное уравнение, связывающее векторы v и ω :

$$\frac{dv}{ds} = \omega \times \mathbf{e}_1. \quad (8.19)$$

Приведем уравнения (8.7)–(8.10), (8.15), (8.18), (8.19) к безразмерной форме записи, полагая:

$$s = l \eta; \quad \tau = p_0 t; \quad \omega = \tilde{\omega} p_0; \quad v = \tilde{v} l p_0;$$

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}} \frac{A_{33}(0)}{l}; \quad \mu = \tilde{\mu} \frac{A_{33}(0)}{l^2};$$

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} \frac{A_{33}(0)}{l^2}; \quad \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \frac{A_{33}(0)}{l^3}; \quad p_0 = \left[\frac{A_{33}(0)}{m_1(0) l^4} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\tilde{J}_{ii}(\eta) = \frac{J_i(\eta)}{F_0 l^2}; \quad \tilde{A}_{ii}(\eta) = \frac{A_{ii}(\eta)}{A_{33}(0)}; \quad \tilde{\kappa} = \kappa l,$$

где $m_1(0)$ — масса единицы длины стержня в начале координат; $A_{33}(0)$ — жесткость стержня в начале координат; $\tilde{\omega}, \tilde{v}$ и т.д. — безразмерные величины.

В произвольном сечении стержня массу единицы длины стержня можно выразить через $m_1(0)$ в виде

$$m_1(\eta) = m_1(0) n_1(\eta) = \rho F_0 n_1(\eta),$$

где $n_1(\eta)$ — безразмерная функция; F_0 — площадь сечения стержня в начале координат.

В безразмерной форме получаем следующую систему дифференциальных нелинейных уравнений движения стержня (опуская знак тильды в обозначениях локальных производных и безразмерных величин):

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \omega \times v \right) - \frac{\partial Q}{\partial \eta} - \kappa \times Q - P = 0; \quad (8.20)$$

$$J(\eta) \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \times J(\eta) \omega - \frac{\partial M}{\partial \eta} - \kappa \times M - e_1 \times Q - T = 0; \quad (8.21)$$

$$M = A(\kappa - \kappa_0^{(1)}); \quad (8.22)$$

$$L_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + L \kappa_0^{(1)} - \kappa = 0; \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \kappa \times v - v - \omega \times e_1 = 0; \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \kappa \times u - (1 - l_{11}) e_1 - l_{21} e_2 - l_{31} e_3 = 0; \quad (8.25)$$

$$L_1 \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \omega = 0, \quad (8.26)$$

где l_{ii} — элементы матрицы L .

Из уравнений (8.20) — (8.26) как частный случай можно получить нелинейные уравнения равновесия стержня:

$$\frac{dQ}{d\eta} + \kappa \times Q + P = 0;$$

$$\frac{dM}{d\eta} + \kappa \times M + e \times Q + T = 0;$$

$$M = A(\kappa - \kappa_0^{(1)}); \quad (8.27)$$

$$L_1 \frac{dv}{d\eta} + L \kappa_0^{(1)} - \kappa = 0;$$

$$\frac{du}{d\eta} + \kappa \times u - e_1 + e_{10} = 0.$$

Рассмотрим более подробно выражение (8.22) для момента M . В представленной форме записи $\kappa_0^{(1)}$ есть вектор, компонентами которого являются кривизны, характеризующие естественное состояние стержня. Если же вектор $\kappa_0^{(1)}$ характеризует статистическое состояние стержня, то

$$M = A(\kappa - \kappa_0^{(1)}) + M_0, \quad (8.28)$$

где M_0 — статический момент.

§ 8.2. Уравнения движения стержня в проекциях на связанные оси

8.2.1. В тензорной форме записи система уравнений (8.20) — (8.26) принимает вид

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v_k}{\partial \tau} + \varepsilon_{kij} \omega_i v_j \right) - \frac{\partial Q_k}{\partial \eta} - \varepsilon_{kij} \kappa_i Q_j - P_k = 0;$$

$$J_{ky}^0 \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial \tau} + \varepsilon_{kij} \omega_i J_{j\gamma}^0 \omega_\gamma - \frac{\partial M_k}{\partial \eta} - \varepsilon_{kij} \kappa_i M_j + \varepsilon_{kij} Q_i - T_k = 0;$$

$$l_{(1)kj} \frac{\partial v_j}{\partial \eta} - \kappa_k + l_{kj} \kappa_{0j} = 0;$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \eta} + \varepsilon_{kij} \kappa_i u_j - \delta_{1k} + l_{k1} = 0;$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial \eta} + \varepsilon_{kij} \kappa_i v_j - \varepsilon_{kil} \omega_l = 0;$$

$$l_{(1)kj} \frac{\partial v_j}{\partial \tau} - \omega_k = 0. \quad (8.29)$$

В развернутой форме записи в проекциях на связанные оси имеем

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_3 \omega_2 - v_2 \omega_3 \right) - \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} - Q_3 \kappa_2 + Q_2 \kappa_3 - P_1 = 0;$$

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v_2}{\partial \tau} + v_1 \omega_3 - v_3 \omega_1 \right) - \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} - Q_1 \kappa_3 + Q_3 \kappa_1 - P_2 = 0;$$

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v_3}{\partial \tau} + v_2 \omega_1 - v_1 \omega_2 \right) - \frac{\partial Q_3}{\partial \eta} - Q_2 \kappa_1 + Q_1 \kappa_2 - P_3 = 0. \quad (8.30)$$

$$J_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} + (J_{33} - J_{22}) \omega_2 \omega_3 - \frac{\partial M_1}{\partial \eta} - \kappa_3 M_2 - \kappa_2 M_3 - T_1 = 0;$$

$$J_{22} \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} + (J_{11} - J_{33}) \omega_1 \omega_3 - \frac{\partial M_2}{\partial \eta} - \kappa_1 M_3 - \kappa_3 M_1 + Q_3 - T_2 = 0;$$

$$J_{33} \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} + (J_{22} - J_{11}) \omega_1 \omega_2 - \frac{\partial M_3}{\partial \eta} - \kappa_2 M_1 - \kappa_1 M_2 - Q_2 - T_3 = 0. \quad (8.31)$$

$$M_1 = A_{11}(\kappa_1 - \kappa_{10}); M_2 = A_{22}(\kappa_2 - \kappa_{20}); M_3 = A_{31}(\kappa_3 - \kappa_{30}). \quad (8.32)$$

$$l_{(1)11} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + l_{(1)13} \frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \kappa_1 - l_{11} \kappa_{10} + l_{12} \kappa_{20} + l_{13} \kappa_{30} = 0;$$

$$l_{(1)21} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \kappa_2 + l_{21} \kappa_{10} + l_{22} \kappa_{20} - l_{23} \kappa_{30} = 0; \quad (8.33)$$

$$l_{(1)31} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + l_{(1)33} \frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \kappa_3 + l_{31} \kappa_{10} + l_{32} \kappa_{20} + l_{33} \kappa_{30} = 0.$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + v_3 \kappa_2 - v_2 \kappa_3 = 0;$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + v_1 \kappa_3 - v_3 \kappa_1 = \omega_3; \quad \frac{\partial v_3}{\partial \eta} + v_2 \kappa_1 - v_1 \kappa_2 = -\omega_2. \quad (8.34)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \kappa_2 u_3 - \kappa_3 u_2 - 1 + l_{11} = 0;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_3 u_1 - \kappa_1 u_3 + l_{21} = 0; \quad (8.35)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \eta} + \kappa_1 u_2 - \kappa_2 u_1 + l_{31} = 0.$$

$$l_{(1)11} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + l_{(1)13} \frac{\partial v_3}{\partial \tau} - \omega_1 = 0;$$

$$l_{(1)21} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \omega_2 = 0; \quad (8.36)$$

$$l_{(1)31} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + l_{(1)33} \frac{\partial v_3}{\partial \tau} - \omega_3 = 0.$$

8.2.2. Уравнение движения стержня в плоскости

Рассмотрим частный случай, когда стержень в естественном состоянии имеет осевую линию, лежащую в плоскости, а одна из главных осей сечения перпендикулярна этой плоскости. При движении стержня в плоскости ряд компонент векторов, входящих в уравнения (8.30)–(8.36), обращается в нуль:

$$u_3 = v_3 = \omega_1 = \omega_2 = 0; \quad v_1 = v_2 = 0;$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{10} = \kappa_{20} = 0;$$

$$Q_3 = M_1 = M_3 = 0; \quad q_3 = \mu_1 = \mu_3 = 0.$$

Из систем (4.39)–(4.44) получаем уравнения:

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v_1}{\partial \tau} - v_2 \omega_3 \right) - \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} + \kappa_3 Q_2 - P_1 = 0;$$

$$n_1(\eta) \left(\frac{\partial v_2}{\tau} - v_1 \omega_3 \right) - \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} + \kappa_3 Q_1 - P_2 = 0. \quad (8.37)$$

$$J_{33} \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} - \frac{\partial M_3}{\partial \eta} - Q_2 - T_3 = 0. \quad (8.38)$$

$$M_3 = A_{33}(\kappa_3 - \kappa_{30}).$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \kappa_3 = 0. \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - v_2 \kappa_3 = 0;$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + v_1 \kappa_3 = \omega_3 \quad (8.40)$$

$$\left(\omega_3 = \frac{\partial v_3}{\partial \tau} \right).$$

Для определения перемещений в связанных осях из системы (8.35) получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \kappa_3 u_2 - 1 + \cos v_3 &= 0; \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_3 u_1 + \sin v_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.41)$$

8.2.3. Стержни, имеющие сосредоточенные массы

На рис. 8.6 показан стержень, имеющий сосредоточенные массы, точечную массу m_1 и неточечную массу m_2 . При колебаниях стержня на сосредоточенные массы действуют силы инерции $J_u^{(i)}$ и момент инерции $M_u^{(2)}$, которые можно включить в уравнения движения аналогично сосредоточенным силам, воспользовавшись дельта-функциями. Сила инерции $J_u^{(i)}$ и момент $M_u^{(2)}$, приведенные к безразмерной форме записи, имеют вид

$$J_u^{(1)} = -m_1^0 \frac{\partial v}{\partial \tau} \delta(\eta - \eta_1), \quad J_u^{(2)} = -m_2^0 \frac{\partial v}{\partial \tau} \delta(\eta - \eta_2); \quad (8.42)$$

$$M_u^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial \tau} (J^{(2)} \omega) \delta(\eta - \eta_2). \quad (8.43)$$

В связанной системе координат (знак локальной производной опущен) имеем

$$J_u^{(1)} = -m_1^0 \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \omega \times v \right) \delta(\eta - \eta_1); \quad (8.44)$$

$$J_u^{(2)} = -m_2^0 \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \omega \times v \right) \delta(\eta - \eta_2); \quad (8.45)$$

$$M_u^{(2)} = - \left(J^{(2)} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \omega \times J^{(2)} \omega \right) \delta(\eta - \eta_2). \quad (8.46)$$

В приведенных выражениях (8.42)–(8.46) m_i^0 – безразмерные массы, равные

$$m_i^0 = \frac{m_i}{m_0 l},$$

где m_1 – масса единицы длины стержня; l – длина стержня; $J^{(2)}$ – матрица, элементами которой являются безразмерные моменты инерции массы m_2 . Если главные оси сечений стержня совпадают с главными осями сосредоточенной массы m_2 , то матрица $J^{(2)}$ – диагональная, аналогичная матрице (8.3). Если главные оси сечений стержня не совпадают с главными осями сосредоточенной массы, то (подвижные оси связаны с главными осями сечений стержня) матрица $J^{(2)}$ имеет вид

$$J^{(2)} = \begin{bmatrix} J_{11}^{(2)} & J_{12}^{(2)} & J_{13}^{(2)} \\ J_{21}^{(2)} & J_{22}^{(2)} & J_{23}^{(2)} \\ J_{31}^{(2)} & J_{32}^{(2)} & J_{33}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Безразмерные элементы матрицы $J^{(2)}$ связаны с размерными соотношениями

$$J_{ij}^{(2)} = \frac{(J_{ij}^{(2)})_1}{m_1 l^3},$$

где $J_{ij}^{(2)}$, $(J_{ij}^{(2)})_1$ — соответственно безразмерные и размерные величины.

Приведенные выражения для $J_u^{(2)}$ и $M_u^{(2)}$ справедливы при условии, что массой m_2 по координате η по сравнению с общей длиной стержня можно пренебречь. При данном допущении ряд элементов матрицы $J^{(2)}$ можно положить равными нулю, а именно:

$$J_{12}^{(2)} = J_{13}^{(2)} = J_{21}^{(2)} = J_{31}^{(2)} = 0.$$

Включив сосредоточенные силы инерции $J_u^{(2)}$ и $M_u^{(2)}$ в уравнения (8.20) и (8.21), получим уравнения движения стержня, учитывающие сосредоточенные массы:

$$\begin{aligned} [n_1(\eta) + m_1^0 \delta(\eta - \eta_1) + m_2^0 \delta(\eta - \eta_2)] \times \\ \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h} - \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} = 0; \end{aligned} \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} [J(\eta) + J^{(2)} \delta(\eta - \eta_2)] \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times [J(\eta) + J^{(2)} \delta(\eta - \eta_2)] \boldsymbol{\omega} - \\ - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \eta} - \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{M} - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} - \mathbf{T} = 0. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Другие уравнения системы (8.20)–(8.26) остаются без изменения.

§ 8.3. Уравнения малых колебаний стержней

8.3.1. Векторные уравнения малых колебаний стержня

Получим уравнения малых колебаний стержня относительно состояния равновесия, считая возникающие при колебаниях дополнительные внутренние усилия, перемещения и углы поворота малыми, что возможно при малых внешних динамических нагрузках.

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_0 + \Delta \mathbf{Q}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M}; \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_0 + \Delta \boldsymbol{\kappa}; \quad \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}; \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 + \Delta \mathbf{P}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \Delta \mathbf{T}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}; \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\mu = \mu_0 + \Delta \mu; \quad \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}; \quad \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\omega} = \Delta \boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{M}_0$, $\boldsymbol{\kappa}_0$, $\mathbf{q}_0$, μ_0 — статические составляющие; $\Delta \mathbf{Q}$, $\Delta \mathbf{M}$, $\Delta \boldsymbol{\kappa}$, $\Delta \mathbf{q}$, $\Delta \mu$, $\Delta \mathbf{v}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \boldsymbol{\omega}$ — векторы, компоненты которых считают малыми величинами, поэтому их произведения (векторными и скалярными) можно пренебречь. Рассматриваются малые колебания относительно состояния равновесия, поэтому

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M}, \quad (8.50)$$

где $\Delta \mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \Delta \boldsymbol{\kappa}$; $\Delta \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0^{(1)}$.

Так как

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u},$$

то при малых колебаниях можно положить $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \approx 0$, поэтому

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tau}.$$

При малых углах поворота ψ_i связанных осей относительно их положения в статике вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tau}. \quad (8.51)$$

Получим уравнения малых колебаний стержня в связанных осях, воспользовавшись уравнениями (8.20)–(8.26). Подставляя в эти уравнения выражения (8.49) и сохраняя только слагаемые, линейно зависящие от малых величин, получаем следующие векторные уравнения в связанной системе координат:

$$n_1(\eta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \eta} - \Delta \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{Q}_0 - \boldsymbol{\kappa}_0 \times \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{P};$$

$$J \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M}{\partial \eta} - \Delta \kappa \times M_0 - \kappa_0 \times \Delta M - e_1 \times \Delta Q = T;$$

$$\Delta M = A \Delta \kappa;$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \kappa_0 \times v - \Delta \kappa = 0; \quad (8.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \kappa_0 \times u - v_3 e_2 + v_2 e_3 = 0,$$

где $P = q + P^{(i)} \delta(\eta - \eta_i)$; $T = \mu + T^{(v)} \delta(\eta - \eta_v)$.

Рассмотрим векторные произведения $\Delta \kappa \times Q_c$, $\Delta \kappa \times M_0$, которые можно представить в виде

$$\Delta \kappa \times Q_0 = A_Q \Delta \kappa; \Delta \kappa \times M_0 = A_M \Delta \kappa, \quad (8.53)$$

где

$$A_Q = \begin{bmatrix} 0 & Q_{30} & -Q_{20} \\ -Q_{30} & 0 & Q_{10} \\ Q_{20} & -Q_{10} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & M_{30} & -M_{20} \\ -M_{30} & 0 & M_{10} \\ M_{20} & -M_{10} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.54)$$

Аналогичным образом получаем выражения и для остальных векторных произведений, входящих в систему (8.52). После преобразований (исключив $\Delta \kappa$) получаем следующую систему уравнений малых колебаний пространственно-криволинейного стержня:

$$n_1(\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} - A_Q A^{-1} \Delta M + A_\kappa \Delta Q = P;$$

$$J \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M}{\partial \eta} - A_M A^{-1} \Delta M - A_\kappa \Delta M - A_1 \Delta Q = T;$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + A_\kappa v - A^{-1} \Delta M = 0; \quad (8.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + A_\kappa u + A_1 v = 0$$

$$(\Delta M = A \Delta \kappa),$$

где

$$A_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_{30} & \kappa_{20} \\ \kappa_{30} & 0 & -\kappa_{10} \\ \kappa_{20} & \kappa_{10} & 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Систему уравнений (4.127) можно записать в виде одного векторного уравнения (исключив $\Delta \kappa$)

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} + A^{(2)} Z = \Phi, \quad (8.56)$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} \Delta Q \\ \Delta M \\ v \\ u \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} -P \\ -T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -n_1 E \\ 0 & 0 & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} A_\kappa & A_Q A^{-1} & 0 & 0 \\ A_1 & A_M A^{-1} + A_\kappa & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_\kappa \end{bmatrix}.$$

Если положить $\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$, то из (8.56) получим линейное уравнение равновесия стержня вида

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} + A^{(2)} Z = \Phi_0, \quad (8.57)$$

где Φ_0 зависит от статической нагрузки.

8.3.2. Уравнения малых колебаний в проекциях на связанные оси. Из уравнений (8.55) получаем уравнения малых вынужденных случайных колебаний в проекциях на связанные оси:

$$\begin{aligned}
n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \eta} + Q_{20} \Delta \kappa_3 - Q_{30} \Delta \kappa_2 + \kappa_{30} \Delta Q_2 - \kappa_{20} \Delta Q_1 &= P_1; \\
n_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \eta} + Q_{30} \Delta \kappa_1 - Q_{10} \Delta \kappa_3 + \kappa_{10} \Delta Q_3 - \kappa_{30} \Delta Q_1 &= P_2; \\
n_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \eta} + Q_{10} \Delta \kappa_2 - Q_{20} \Delta \kappa_1 + \kappa_{20} \Delta Q_1 - \kappa_{10} \Delta Q_2 &= P_3.
\end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned}
J_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \eta} - \kappa_{20} \Delta M_3 + \kappa_{30} \Delta M_2 - M_{30} \Delta \kappa_2 + M_{20} \Delta \kappa_3 &= T_1; \\
J_{22} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_2}{\partial \eta} - \kappa_{30} \Delta M_1 + \kappa_{10} \Delta M_3 - M_{10} \Delta \kappa_3 + M_{30} \Delta \kappa_1 + \Delta Q_3 &= T_2; \\
J_{33} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \eta} - \kappa_{10} \Delta M_2 + \kappa_{20} \Delta M_1 - M_{20} \Delta \kappa_1 + M_{10} \Delta \kappa_2 - \Delta Q_2 &= T_3.
\end{aligned} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \kappa_{20} v_3 - \kappa_{30} v_2 - \Delta \kappa_1 &= 0; \\
\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} v_1 - \kappa_{10} v_3 - \Delta \kappa_2 &= 0; \\
\frac{\partial v_3}{\partial \eta} + \kappa_{10} v_2 - \kappa_{20} v_1 - \Delta \kappa_3 &= 0.
\end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \kappa_{20} u_3 - \kappa_{30} u_2 &= 0; \\
\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} u_1 - \kappa_{10} u_3 - v_3 &= 0; \\
\frac{\partial u_3}{\partial \eta} - \kappa_{10} u_2 - \kappa_{20} u_1 + v_2 &= 0.
\end{aligned} \quad (8.61)$$

$$\Delta M_1 = A_{11} \Delta \kappa_1, \Delta M_2 = A_{22} \Delta \kappa_2, \Delta M_3 = A_{33} \Delta \kappa_3. \quad (8.62)$$

8.3.3. Уравнения малых колебаний относительно естественного состояния

Приведем уравнения малых колебаний стержней относительно естественного состояния (ненагруженного). В этом частном случае в (8.55) следует положить $A_Q = A_M$. В результате получаем векторные уравнения

$$\begin{aligned}
n_1(\eta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \eta} - A_\chi \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{P}; \\
J \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \eta} - A_\kappa \Delta \mathbf{M} - A_1 \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{T}; \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} + A_\kappa \mathbf{v} - \Delta \kappa &= 0;
\end{aligned} \quad (8.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + A_\kappa \mathbf{u} + A_1 \mathbf{v} = 0;$$

$$\Delta \mathbf{M} = A \Delta \kappa.$$

Получим уравнения малых случайных колебаний стержней, осевая линия которых есть плоская кривая. На рис. 8.1, б в качестве примера показана спиральная пружина, осевая линия которой как в естественном состоянии ($q = 0$), так и в нагруженном ($q \neq 0$) есть плоская кривая. Если пружину отклонить от состояния равновесия, она начнет совершать колебания. Если ее отклонить в плоскости чертежа, то малые колебания будут происходить в плоскости чертежа; если пружину отклонить относительно плоскости — возникнут малые пространственные колебания. Соответствующие уравнения можно получить из системы (8.58)–(8.62), положив

$$Q_{30} = 0, M_{10} = M_{20} = 0, \kappa_{10} = \kappa_{20} = 0.$$

В результате из системы уравнений (8.58)–(8.62) получаем уравнения случайных вынужденных колебаний в связанных осях:

$$n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \eta} + Q_{20} \Delta \kappa_3 + \kappa_{30} \Delta Q_2 = P_1;$$

$$n_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \eta} - Q_{10} \Delta \kappa_3 - \kappa_{30} \Delta Q_1 = P_2; \quad (8.64)$$

$$n_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \eta} + Q_{10} \Delta \kappa_2 - Q_{20} \Delta \kappa_1 = P_3.$$

$$J_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \eta} + \kappa_{30} \Delta M_2 - M_{30} \Delta \kappa_2 = T_1;$$

$$J_{22} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_2}{\partial \eta} - \kappa_{30} \Delta M_1 + M_{30} \Delta \kappa_1 + \Delta Q_3 = T_2; \quad (8.65)$$

$$J_{33} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \eta} - \Delta Q_2 = T_3.$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} v_2 - \Delta \kappa_1 = 0;$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} v_1 - \Delta \kappa_2 = 0; \quad (8.66)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \Delta \kappa_3 = 0.$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} u_2 = 0;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} u_1 - v_3 = 0; \quad (8.67)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \eta} + v_2 = 0$$

$$\Delta M_i = A_{ij} \Delta \kappa_j.$$

Если случайная нагрузка (например, q_c (см. рис. 8.1, б)) действует в плоскости чертежа, т.е.

$$q_c = q_{1c} e_1 + q_{2c} e_2 = q_{x_1} i_1 + q_{x_2} i_2,$$

система уравнений (8.64)–(8.67) распадается на две независимые системы:

в плоскости чертежа

$$n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \eta} + Q_{20} \Delta \kappa_3 + \kappa_{30} \Delta Q_2 = P_1,$$

$$n_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \eta} - Q_{10} \Delta \kappa_3 - \kappa_{30} \Delta Q_1 = P_2,$$

$$J_{33} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \eta} - \Delta Q_2 = T_3,$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \Delta \kappa_3 = 0, \quad (8.68)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} u_1 - v_3 = 0,$$

$$\Delta M_3 = A_{33} \Delta \kappa_3;$$

относительно плоскости чертежа

$$n_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \eta} + Q_{10} \Delta \kappa_2 - Q_{20} \Delta \kappa_1 = 0,$$

$$J_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \eta} + \kappa_{30} \Delta M_2 - M_{30} \Delta \kappa_2 = 0,$$

$$J_{22} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_2}{\partial \eta} - \kappa_{30} \Delta M_1 + M_{30} \Delta \kappa_1 + \Delta Q_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} v_2 - \Delta \kappa_1 &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} v_1 - \Delta \kappa_2 &= 0,\end{aligned}\quad (8.69)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \eta} + v_2 = 0,$$

$$\Delta M_1 = A_{11} \Delta \kappa_1, \quad \Delta M_2 = A_{22} \Delta \kappa_2.$$

В случае свободных случайных колебаний ненагруженного стержня (при $Q_{10} = Q_{20} = M_{30} = 0$) из (8.68) и (8.69) получаем следующие уравнения:

в плоскости чертежа

$$\begin{aligned}n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \eta} + \kappa_{30} \Delta Q_2 &= P_1, \\ n_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \eta} - \kappa_{30} \Delta Q_1 &= P_2, \\ J_{33} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \eta} - \Delta Q_2 &= 0,\end{aligned}\quad (8.70)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \Delta \kappa_3 = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} u_1 - v_3 = 0;$$

$$\Delta M_3 = A_{33} \Delta \kappa_3;$$

относительно плоскости чертежа

$$n_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \eta} = 0,$$

$$J_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} \Delta M_2 = 0,$$

$$J_{22} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_2}{\partial \eta} - \kappa_{30} \Delta M_1 + \Delta Q_3 = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} v_2 - \Delta \kappa_1 = 0,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} v_1 - \Delta \kappa_2 = 0,\quad (8.71)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \eta} + v_2 = 0,$$

$$\Delta M_1 = A_{11} \Delta \kappa_1, \quad \Delta M_2 = A_{22} \Delta \kappa_2.$$

§ 8.4. Определение собственных значений и собственных векторов

Для численного приближенного решения уравнений свободных и вынужденных случайных колебаний стержней необходимо знать собственные векторы, характеризующие малые свободные колебания стержней при конкретных краевых условиях.

Рассмотрим свободные колебания стержня (без учета сил сопротивления) относительно статического напряженно-деформированного состояния, воспользовавшись уравнением (8.56) (положив $P = T = 0$):

$$A^{(1)} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \mathbf{Z} = 0. \quad (8.72)$$

Решение уравнения (8.72) находим в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0(\eta) e^{i\lambda\tau}. \quad (8.73)$$

Подставив (8.73) в уравнение (8.72), получим

$$\frac{d\mathbf{Z}_0}{d\eta} + B(\eta, \lambda) \mathbf{Z}_0 = 0, \quad (8.74)$$

где

$$B(\eta, \lambda) = \begin{bmatrix} A_\kappa & A_Q A^{-1} & 0 & \lambda^2 n_1 E \\ A_1 & A_M A^{-1} + A_\kappa & \lambda^2 J & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_\kappa \end{bmatrix}.$$

В частном случае, когда рассматриваются колебания относительно естественного состояния стержня ($Q_0 = M_0 = 0$), матрица $B(\eta, \lambda)$ имеет вид

$$B(\eta, \lambda) = \begin{bmatrix} A_\kappa & 0 & 0 & \lambda^2 n_1 E \\ A_1 & A_\kappa & \lambda^2 J & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_\kappa \end{bmatrix}.$$

Уравнение (8.74) решается численно, например, методом начальных параметров с последующим уточнением фундаментальной матрицы решений. В результате получаем

$$Z_0 = K(\eta, \lambda) C, \quad (K(0, \lambda) = E), \quad (8.75)$$

где $K(\eta, \lambda)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения (8.74).

Решение (8.75) должно удовлетворять краевым условиям. Для пространственно-криволинейного стержня имеется двенадцать краевых условий (по шесть условий при $\eta = 0$ и $\eta = 1$). Например, для закрепления стержня, как показано на рис. 8.6, имеем следующие краевые условия: 1) $\eta = 0$; $u = \tilde{v}_0 = 0$; 2) $\eta = 1$; $\Delta Q_0 = M_0 = 0$. Чтобы выполнялись краевые условия при $\eta = 0$, следует положить $c_7 = c_8 = \dots = c_{12} = 0$, где c_i — компоненты вектора C . Из краевых условий при $\eta = 1$ получаем систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} k_{11}c_1 + k_{12}c_2 + \dots + k_{16}c_6 &= 0 \\ \dots & \\ k_{61}c_1 + k_{62}c_2 + \dots + k_{66}c_6 &= 0. \end{aligned} \quad (8.76)$$

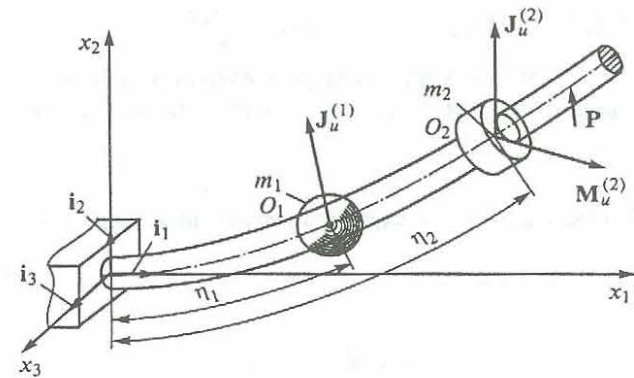


Рис. 8.6

Значения λ_j , при которых определитель системы (8.76) равен нулю, являются безразмерными частотами.

Определив λ_j , находим из системы (8.76) $c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, c_3^{(j)}, c_4^{(j)}$ и $c_5^{(j)}$ в зависимости от $c_6^{(j)}$ ($c_6^{(j)}$ — можно положить равным единице):

$$c_k^{(j)} = \alpha_k c_6^{(j)}. \quad (8.77)$$

Для каждого λ_j решаем уравнение (8.74):

$$\frac{dZ_0^{(j)}}{d\eta} + B(\eta, \lambda_j) Z_0^{(j)} = 0 \quad (8.78)$$

и находим

$$Z_0^{(j)} = K(\eta, \lambda_j) C^{(j)}, \quad (8.79)$$

где $C^{(j)} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, 1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Для решения уравнений случайных колебаний стержней приближенными методами векторы $Z_0^{(j)}$ удобно представить в виде

$$Z_0^{(j)} = (\Psi^{(j)}, \Phi^{(j)})^T, \quad (8.80)$$

где $\Psi^{(j)} = (\Delta Q^{(j)}, \Delta M^{(j)})^T$; $\Phi^{(j)} = (v^{(j)}, u^{(j)})^T$.

Векторы $\Psi^{(j)}$ и $\Phi^{(j)}$ характеризуют соответственно напряженное и деформированное состояния стержня при колебаниях с частотой λ_j .

§ 8.5. Нестационарные случайные колебания стержней

Входящие в правые части первых двух уравнений системы (8.55) векторы

$$P = q_c + P_c \delta (\eta - \eta_P)$$

и

$$T = \mu_c + T_c \delta (\eta - \eta_M)$$

являются случайными нестационарными векторами с известными вероятностными характеристиками компонент. Введем в первое уравнение системы (8.55) силу вязкого трения $\propto \frac{\partial u}{\partial \tau}$:

$$n_1(\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} - A_Q \Delta \kappa - A_K \Delta Q = P. \quad (8.81)$$

Систему уравнений (8.55) с учетом силы вязкого трения для численного решения удобнее представить в виде одного уравнения, аналогичного уравнению (8.56):

$$L = A^{(1)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} + A^{(3)} \frac{\partial Z}{\partial \tau} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} + A^{(2)} Z - \Phi = 0, \quad (8.82)$$

где

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для решения уравнения (8.82) воспользуемся обобщенным принципом возможных перемещений [34], ограничившись двучленным приближением

$$Z = Z_0^{(1)}(\eta) f_1(\tau) + Z_0^{(2)}(\eta) f_2(\tau). \quad (8.83)$$

В качестве обобщенных перемещений можно взять векторы, пропорциональные собственным векторам $Z^{(j)}$, т.е.

$$\delta Z_0 = \delta A_1 E_0 Z_0^{(1)} + \delta A_2 E_0 Z_0^{(2)}, \quad (8.84)$$

где δA_j — независимые произвольные малые величины;

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Под обобщенными перемещениями понимают не только вариации линейных δu и угловых δv перемещений, но и вариации внутренних сил $\delta \Delta Q$, моментов $\delta \Delta M$, т.е. вариации вектора состояния системы δZ .

Матрица E_0 вводится для того, чтобы все скалярные произведения $(Z \cdot E_0 Z_0^{(j)})$ имели размерности работы (если рассматривать размерные уравнения (8.56)). Так как

$$E_0 Z_0^{(j)} = (u^{(j)}, v^{(j)}, \Delta M^{(j)}, \Delta Q^{(j)})^T,$$

то скалярное произведение $(Z \cdot E_0 Z_0^{(j)})$ в более подробной форме записи имеет вид

$$(Z \cdot E_0 Z_0^{(j)}) =$$

$$= (\Delta Q^{(j)} \cdot u^{(j)}) + (\Delta M^{(j)} \cdot v^{(j)}) + (v^{(j)} \cdot \Delta M^{(j)}) + (u^{(j)} \cdot v^{(j)}).$$

Подставив (8.83) в уравнение (8.82), получим

$$L(Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)}, f_1, f_2) = \tilde{\delta} \quad (\tilde{\delta} \neq 0). \quad (8.85)$$

Потребуем, чтобы интеграл от скалярного произведения векторов $\tilde{\delta}$ и δZ_0 был равен нулю:

$$\int_0^1 (\tilde{\delta} \cdot \delta Z_0) d\eta = 0. \quad (8.86)$$

В силу независимости δA_j получаем из (8.86) два уравнения:

$$\int_0^1 (\tilde{\delta} \cdot E_0 Z_0^{(1)}) d\eta = 0 \text{ и } \int_0^1 (\tilde{\delta} \cdot E_0 Z_0^{(2)}) d\eta = 0. \quad (8.87)$$

После преобразований из (8.87) получаем уравнения для определения $f_j(\tau)$:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{f}_1 + a_{12}\ddot{f}_{21} + b_{11}\dot{f}_1 + b_{12}\dot{f}_2 + c_{11}f_1 + c_{12}f_2 &= b_1; \\ a_{21}\ddot{f}_1 + a_{22}\ddot{f}_{21} + b_{21}\dot{f}_1 + b_{22}\dot{f}_2 + c_{21}f_1 + c_{22}f_2 &= b_2, \end{aligned} \quad (8.88)$$

$$\text{где } a_{ij} = \int_0^1 (A^{(1)} Z_0^{(j)} \cdot E_0 Z_0^{(j)}) d\eta; \quad b_{ij} = \int_0^1 (A^{(3)} Z_0^{(j)} \cdot E_0 Z_0^{(j)}) d\eta;$$

$$c_{ij} = \int_0^1 (Z_0^{(j)} + A^{(2)} Z_0^{(j)}) \cdot E_0 Z_0^{(j)} d\eta;$$

$$b_1 = \int_0^1 (\Phi \cdot E_0 Z_0^{(1)}) d\eta; \quad b_2 = \int_0^1 (\Phi \cdot E_0 Z_0^{(2)}) d\eta.$$

В более подробной записи

$$b_1 = - \int_0^1 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)}) d\eta - \int_0^1 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_0^{(1)}) d\eta;$$

$$b_2 = - \int_0^1 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_0^{(2)}) d\eta - \int_0^1 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_0^{(2)}) d\eta.$$

С учетом выражений для $\mathbf{P}$ и $\mathbf{T}$ получим

$$\begin{aligned} b_1 &= - \int_0^1 (\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{u}_0^{(1)}) d\eta - \int_0^1 (\mu_c \cdot \mathbf{v}_0^{(1)}) d\eta - \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{u}_0^{(1)}(\eta_P) - \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{v}_0^{(1)}(\eta_M); \\ b_2 &= - \int_0^1 (\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{u}_0^{(2)}) d\eta - \int_0^1 (\mu_c \cdot \mathbf{v}_0^{(2)}) d\eta - \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{u}_0^{(2)}(\eta_P) - \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{v}_0^{(2)}(\eta_M). \end{aligned} \quad (8.89)$$

Рассмотрим случайные нагрузки вида

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_c &= \mathbf{q}_{0c}(\eta) f_q(\tau); \quad \mathbf{P}_c = \mathbf{P}_{0c}(\eta) f_P(\tau); \\ \mu_c &= \mu_{0c}(\eta) f_\mu(\tau); \quad \mathbf{T}_c = \mathbf{T}_{0c}(\eta) f_T(\tau). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Ограничимся случаем, когда $\mathbf{q}_{0c}$, $\mathbf{P}_{0c}$, μ_{0c} и $\mathbf{T}_{0c}$ известны, а f_q , f_P , f_μ и f_M — независимые случайные функции времени с известными вероятностными характеристиками.

Из (8.89) после преобразований для (8.90) получим

$$\begin{aligned} b_1 &= -d_{11}f_q - d_{12}f_\mu - d_{13}f_P - d_{14}f_M; \\ b_2 &= -d_{21}f_q - d_{22}f_\mu - d_{23}f_P - d_{24}f_M, \end{aligned} \quad (8.91)$$

где

$$d_{i1} = \int_0^1 (\mathbf{q}_{0c} \cdot \mathbf{u}_0^{(j)}) d\eta; \quad d_{i2} = \int_0^1 (\mu_{0c} \cdot \mathbf{v}_0^{(j)}) d\eta;$$

$$d_{i3} = (\mathbf{P}_{0c} \cdot \mathbf{u}_0^{(j)}(\eta_P)); \quad d_{i4} = (\mathbf{T}_{0c} \cdot \mathbf{v}_0^{(j)}(\eta_M)).$$

Переходя к векторной форме записи, из (8.88) получаем уравнение

$$A\ddot{\mathbf{f}} + B\dot{\mathbf{f}} + C\mathbf{f} = D\Phi, \quad (8.92)$$

где

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix}; \quad \Phi = (f_q, f_P, f_\mu, f_M)^T.$$

Решение уравнения (8.92) с последующим определением вероятностных характеристик компонент векторов $\mathbf{f}$ приведено в гл. 6. Решение уравнения (8.92) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\mathbf{f} = \int_0^t G(t, \tau) A^{-1} D \Phi d\tau, \quad (8.93)$$

или в скалярной форме записи

$$f_j = \int_0^t (k_{j1}(t, \tau) f_q + k_{j2}(t, \tau) f_p + k_{j3}(t, \tau) f_\mu + k_{j4}(t, \tau) f_M) d\tau$$

$$(j = 1, 2),$$

где k_{ij} — элементы матрицы $K = GA^{-1}D$.

Матрицу $G(t, \tau)$ можно получить, решая уравнение (8.92) методом вариации произвольных постоянных.

В результате получаем приближенное решение уравнения (8.82):

$$\begin{aligned} Z = & \int_0^t (Z_0^{(1)} k_{11} + Z_0^{(2)} k_{21}) f_q d\tau + \int_0^t (Z_0^{(1)} k_{12} + Z_0^{(2)} k_{22}) f_p d\tau + \\ & + \int_0^t (Z_0^{(1)} k_{13} + Z_0^{(2)} k_{23}) f_\mu d\tau + \int_0^t (Z_0^{(1)} k_{14} + Z_0^{(2)} k_{24}) f_M d\tau. \end{aligned} \quad (8.94)$$

Компоненты вектора Z

$$\begin{aligned} z_j = & \int_0^t (z_{0j}^{(1)} k_{11} + z_{0j}^{(2)} k_{21}) f_q d\tau + \int_0^t (z_{0j}^{(1)} k_{12} + z_{0j}^{(2)} k_{22}) f_p d\tau + \\ & + \int_0^t (z_{0j}^{(1)} k_{13} + z_{0j}^{(2)} k_{23}) f_\mu d\tau + \int_0^t (z_{0j}^{(1)} k_{14} + z_{0j}^{(2)} k_{24}) f_M d\tau. \end{aligned} \quad (8.95)$$

Математическое ожидание компонент z_j вектора состояния Z и их дисперсии для независимых возмущений

$$\begin{aligned} m_{z_j} = & \int_0^t (z_{0j}^{(1)} k_{11} + z_{0j}^{(2)} k_{21}) m_{f_q} d\tau + \dots + \int_0^t (z_{0j}^{(1)} k_{14} + z_{0j}^{(2)} k_{24}) m_{f_M} d\tau; \\ D_{z_j} = & \int_0^t \int_0^t [z_{0j}^{(1)} k_{11}(t, \tau) + z_{0j}^{(2)} k_{21}(t, \tau)] \cdot [z_{0j}^{(1)} k_{11}(t, \tau') + z_{0j}^{(2)} k_{21}(t, \tau')] \times \\ & \times K_{f_q}(\tau, \tau') d\tau d\tau' + \dots + \int_0^t \int_0^t [z_{0j}^{(1)} k_{14}(t, \tau) + z_{0j}^{(2)} k_{24}(t, \tau)] \times \end{aligned}$$

$$\times [z_{0j}^{(1)} k_{14}(t, \tau') + z_{0j}^{(2)} k_{24}(t, \tau')] K_{f_M}(\tau, \tau') d\tau d\tau'. \quad (8.96)$$

Полагая, что компоненты z_j имеют нормальные распределения, можно определить их максимальные значения для произвольного момента времени τ и координаты η :

$$\max z_j = m_{z_j}(\eta, \tau) + 3\sigma_{z_j}(\eta, \tau). \quad (8.97)$$

§ 8.6. Стационарные случайные колебания стержней

Рассмотрим уравнение (8.82) малых вынужденных колебаний с учетом сил вязкого сопротивления, ограничившись случаем, когда на стержень действуют сосредоточенные стационарные сила P_c и момент T_c ($q_c = \mu_c = 0$). Решение уравнения (8.82) ищем в виде двучленного приближения (8.83). Воспользовавшись обобщенным принципом возможных перемещений, после преобразований получим уравнение, аналогичное (8.92):

$$A\ddot{f} + B\dot{f} + Cf = D^{(1)}P_c + D^{(2)}T_c, \quad (8.98)$$

где

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} u_{01}^{(1)} & u_{02}^{(1)} & u_{03}^{(1)} \\ u_{01}^{(2)} & u_{02}^{(2)} & u_{03}^{(2)} \end{bmatrix}; \quad D^{(2)} = \begin{bmatrix} v_{01}^{(1)} & v_{02}^{(1)} & v_{03}^{(1)} \\ v_{01}^{(2)} & v_{02}^{(2)} & v_{03}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, найдем из (8.98) изображение вектора $f(\omega)$ в частотной области:

$$f(\omega) = W(i\omega)D^{(1)}P_c(\omega) + W(i\omega)D^{(2)}T_c(\omega),$$

где

$$W(i\omega) = \|i\omega^2 H + i\omega B + C\|^{-1}. \quad (8.99)$$

В скалярной форме записи имеем

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\omega) = & \sum_{k=0}^3 u_{0k}^{(1)} (w_{11} P_k) + \sum_{k=0}^3 u_{0k}^{(2)} (w_{12} P_k) + \\ & + \sum_{k=0}^3 v_{0k}^{(1)} (w_{11} T_k) + \sum_{k=0}^3 v_{0k}^{(2)} (w_{12} T_k); \end{aligned} \quad (8.100)$$

$$f^{(2)}(\omega) = \sum_{k=0}^3 u_{0k}^{(1)} (w_{21} P_k) + \sum_{k=0}^3 u_{0k}^{(2)} (w_{22} P_k) + \\ + \sum_{k=0}^3 v_{0k}^{(1)} (w_{21} T_k) + \sum_{k=0}^3 v_{0k}^{(2)} (w_{22} T_k). \quad (8.101)$$

Считаем, что спектральные плотности S_{P_k} , S_{T_k} компонент векторов $\mathbf{P}_c$ и $\mathbf{T}_c$ известны. Ограничимся случаем, когда компоненты векторов можно считать независимыми случайными функциями. Тогда взаимные спектральные плотности равны нулю. Для случая, когда векторы $\mathbf{P}_c$ и $\mathbf{T}_c$ неизменны по направлению, но случайны по модулю, имеем

$$P_j = |\mathbf{P}_c| (\mathbf{e}_P \mathbf{e}_j), \quad T_j = |\mathbf{T}_c| (\mathbf{e}_T \mathbf{e}_j), \quad (8.102)$$

где $\mathbf{e}_P$, $\mathbf{e}_T$ — единичные векторы, совпадающие по направлению с направлением векторов $\mathbf{P}_c$ и $\mathbf{T}_c$.

Если модули сил являются случайными стационарными функциями, то достаточно знать только их спектральные плотности $S_P(\omega)$, $S_T(\omega)$. Получим спектральные плотности $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ для общего случая, когда спектральные плотности компонент векторов P_j и T_j различны.

Алгоритм определения спектральных плотностей изложен в § 6.3. Воспользовавшись этим алгоритмом, из (8.100) и (8.101) получим (при условии, что $\mathbf{P}_c$ и $\mathbf{T}_c$ независимы) спектральные плотности $S_{f^{(1)}}$ и $S_{f^{(2)}}$:

$$S_{f^{(1)}}(\omega) = \sum_{k=1}^3 \beta_k^{(1)}(i\omega) S_{P_k}(\omega) + \sum_{k=1}^3 \gamma_k^{(1)}(i\omega) S_{T_k}(\omega); \\ S_{f^{(2)}}(\omega) = \sum_{k=1}^3 \beta_k^{(2)}(i\omega) S_{P_k}(\omega) + \sum_{k=1}^3 \gamma_k^{(2)}(i\omega) S_{T_k}(\omega), \quad (8.103)$$

где

$$\beta_k^{(1)}(i\omega) = (u_{0k}^{(1)})^2 w_{11} w_{11}^* + u_{0k}^{(1)} u_{0k}^{(2)} w_{11} w_{12}^* +$$

$$+ u_{0k}^{(2)} u_{0k}^{(1)} w_{12} w_{11}^* + (u_{0k}^{(2)})^2 w_{12} w_{12}^*; \\ \gamma_k^{(1)}(i\omega) = (v_{0k}^{(1)})^2 w_{11} w_{11}^* + v_{0k}^{(1)} v_{0k}^{(2)} w_{11} w_{12}^* + \\ + v_{0k}^{(2)} v_{0k}^{(1)} w_{12} w_{11}^* + (v_{0k}^{(2)})^2 w_{12} w_{12}^*; \\ \beta_k^{(2)}(i\omega) = (u_{0k}^{(1)})^2 w_{21} w_{21}^* + u_{0k}^{(1)} u_{0k}^{(2)} w_{21} w_{22}^* + \\ + u_{0k}^{(2)} u_{0k}^{(1)} w_{22} w_{21}^* + (u_{0k}^{(2)})^2 w_{22} w_{22}^*; \\ \gamma_k^{(2)}(i\omega) = (v_{0k}^{(1)})^2 w_{21} w_{21}^* + v_{0k}^{(1)} v_{0k}^{(2)} w_{21} w_{22}^* + \\ + v_{0k}^{(2)} v_{0k}^{(1)} w_{22} w_{21}^* + (v_{0k}^{(2)})^2 w_{22} w_{22}^*. \quad (8.104)$$

Взаимные спектральные плотности

$$S_{f^{(1)} f^{(2)}} = \sum_{k=1}^3 \beta_k^{(3)} S_{P_k} + \sum_{k=1}^3 \gamma_k^{(3)} S_{T_k}; \\ S_{f^{(2)} f^{(1)}} = \sum_{k=1}^3 \beta_k^{(4)} S_{P_k} + \sum_{k=1}^3 \gamma_k^{(4)} S_{T_k}, \quad (8.105)$$

где

$$\beta_k^{(3)}(i\omega) = (u_{0k}^{(1)})^2 w_{21}^* w_{11} + u_{0k}^{(1)} u_{0k}^{(2)} w_{21}^* w_{12} + \\ + u_{0k}^{(2)} u_{0k}^{(1)} w_{22}^* w_{11} + (u_{0k}^{(2)})^2 w_{22}^* w_{12}; \\ \gamma_k^{(3)}(i\omega) = (v_{0k}^{(1)})^2 w_{21}^* w_{11} + v_{0k}^{(1)} v_{0k}^{(2)} w_{21}^* w_{12} + \\ + v_{0k}^{(2)} v_{0k}^{(1)} w_{22}^* w_{11} + (v_{0k}^{(2)})^2 w_{22}^* w_{12}; \\ \beta_k^{(4)}(i\omega) = (u_{0k}^{(1)})^2 w_{11}^* w_{21} + u_{0k}^{(1)} u_{0k}^{(2)} w_{11}^* w_{22} + \\ + u_{0k}^{(2)} u_{0k}^{(1)} w_{12}^* w_{21} + (u_{0k}^{(2)})^2 w_{12}^* w_{22}; \\ \gamma_k^{(4)}(i\omega) = (v_{0k}^{(1)})^2 w_{11}^* w_{21} + v_{0k}^{(1)} v_{0k}^{(2)} w_{11}^* w_{22} + \\ + v_{0k}^{(2)} v_{0k}^{(1)} w_{12}^* w_{21} + (v_{0k}^{(2)})^2 w_{12}^* w_{22}. \quad (8.107)$$

Выражения для спектральных плотностей $S_{f(i)}(\omega)$ (8.103) и взаимно спектральных плотностей $S_{f(i)f(k)}(\omega)$ (8.105) можно получить также, используя соотношения Винера—Хинчина, связывающие корреляционные и взаимно корреляционные функции со спектральными плотностями, как это было сделано в шестой главе.

В левую часть выражения для коэффициента $\beta_k^{(j)}$ (8.104) входят произведения функций w_{ij} и w_{ik}^* , зависящих от $i\omega$. Произведения функций с одинаковыми индексами есть квадрат модуля соответствующей функции, т.е.

$$w_{11}w_{11}^* = |w_{11}|^2. \quad (8.108)$$

Квадрат модуля комплексной функции есть действительная функция. Произведение комплексных функций с разными индексами есть комплексные функции, например,

$$(w_{11}w_{12}^*) = (w_{11}^{(1)} + iw_{11}^{(2)})(w_{12}^{(1)} - iw_{12}^{(2)}) = w_{11}^{(1)}w_{12}^{(1)} + w_{11}^{(2)}w_{12}^{(2)} + i(w_{11}^{(2)}w_{11}^{(1)} - w_{11}^{(1)}w_{12}^{(2)}), \quad (8.109)$$

где $w_{11}^{(1)}, w_{12}^{(1)}$ — действительные части; $w_{11}^{(2)}, w_{12}^{(2)}$ — мнимые части.

Действительные части комплексных функций являются четными функциями ω , мнимые — нечетными, т.е.

$$w_{11}^{(1)}(\omega) = w_{11}^{(1)}(-\omega); \quad w_{11}^{(2)}(\omega) = -w_{11}^{(2)}(-\omega). \quad (8.110)$$

Произведение нечетных функций есть четная функция. Поэтому действительная часть выражения (8.109) является четной функцией, а мнимая — нечетной. Эти результаты будут использованы при определении дисперсии компонент вектора Z (8.83).

Компоненты вектора Z при двучленном приближении имеют вид

$$z_j(\eta, \tau) = z_{0j}^{(1)}(\eta)f^{(1)}(\tau) + z_{0j}^{(2)}(\eta)f^{(2)}(\tau). \quad (8.111)$$

Переходя к изображению по Фурье, получаем

$$z_j(\eta, \omega) = z_{0j}^{(1)}(\eta)f^{(1)}(\omega) + z_{0j}^{(2)}(\eta)f^{(2)}(\omega). \quad (8.112)$$

Спектральные плотности компонент z_j (и взаимные спектральные плотности z_j, z_k) можно получить, воспользовавшись алгоритмом определения S_{y_k} и $S_{y_k y_v}$, изложенным в § 6.5:

$$S_{z_j}(\eta, \omega) = (z_{0j}^{(1)})^2 S_{f^{(1)}} + z_{0j}^{(1)} z_{0j}^{(2)} \times \\ \times (S_{f^{(1)}f^{(2)}} + S_{f^{(2)}f^{(1)}}) + (z_{0j}^{(2)})^2 S_{f^{(2)}}, \quad (8.113)$$

где $S_{f^{(1)}}, S_{f^{(2)}}$ и $S_{f^{(1)}f^{(2)}}$ определяются соотношениями (8.103) и (8.105). Коэффициенты $\beta_k^{(j)}, \gamma_k^{(j)}$ ($k = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$), входящие в (8.105) и в (8.107), можно представить в виде

$$\beta_k^{(j)} = \beta_k^{(j)(1)} + i\beta_k^{(j)(2)}, \quad \gamma_k^{(j)} = \gamma_k^{(j)(1)} + i\gamma_k^{(j)(2)}, \quad (8.114)$$

где $\beta_k^{(j)(1)}, \gamma_k^{(j)(1)}$ — четные функции ω ; $\beta_k^{(j)(2)}, \gamma_k^{(j)(2)}$ — нечетные функции ω .

Поэтому получаем

$$S_{f^{(1)}}(i\omega) = \sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(1)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(1)(1)} S_{M_k}) + \\ + i \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(1)(2)} S_{P_k} + \gamma_k^{(1)(2)} S_{M_k}) \right], \\ S_{f^{(2)}}(i\omega) = \sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(2)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(2)(1)} S_{M_k}) + \\ + i \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(2)(2)} S_{P_k} + \gamma_k^{(2)(2)} S_{M_k}) \right]; \quad (8.115) \\ S_{f^{(1)}f^{(2)}}(i\omega) = \sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(3)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(3)(1)} S_{M_k}) +$$

$$\begin{aligned}
& + i \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(3)(2)} S_{P_k} + \gamma_k^{(3)(2)} S_{M_k}) \right], \\
S_{f^{(2)} f^{(1)}}(i\omega) &= \sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(4)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(4)(1)} S_{M_k}) + \\
& + i \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(4)(2)} S_{P_k} + \gamma_k^{(4)(2)} S_{M_k}) \right]. \quad (8.116)
\end{aligned}$$

Соотношения (8.115) можно представить в виде

$$S_{f^{(1)}} = S_{f^{(1)}}^{(1)} + i S_{f^{(1)}}^{(2)}, \quad S_{f^{(2)}} = S_{f^{(2)}}^{(1)} + i S_{f^{(2)}}^{(2)}; \quad (8.117)$$

$$S_{f^{(1)} f^{(2)}} = S_{f^{(1)} f^{(2)}}^{(1)} + i S_{f^{(1)} f^{(2)}}^{(2)}, \quad S_{f^{(2)} f^{(1)}} = S_{f^{(2)} f^{(1)}}^{(1)} + i S_{f^{(2)} f^{(1)}}^{(2)}. \quad (8.118)$$

При этом

$$\begin{aligned}
S_{f^{(1)}}^{(1)} &= S_{f^{(1)}}^{(1)}, \quad S_{f^{(1)}}^{(2)} = -S_{f^{(2)}}^{(2)}, \\
S_{f^{(1)} f^{(2)}}^{(1)} &= S_{f^{(2)} f^{(1)}}^{(1)}, \quad S_{f^{(1)} f^{(2)}}^{(2)} = -S_{f^{(2)} f^{(1)}}^{(2)}. \quad (8.119)
\end{aligned}$$

В соотношение (8.113) входит сумма взаимных спектральных плотностей, которая с учетом (8.118) и (8.119) равна

$$S_{f^{(1)} f^{(2)}} + S_{f^{(2)} f^{(1)}} = 2S_{f^{(1)} f^{(2)}}^{(1)}, \quad (8.120)$$

т.е. оно является четной функцией ω .

Взаимно спектральные плотности компонент вектора $\mathbf{Z}$

$$S_{z_j z_v} = z_{0j}^{(1)} z_{0v}^{(1)} S_{f^{(1)}} + z_{0j}^{(1)} z_{0v}^{(2)} (S_{f^{(1)} f^{(2)}} + S_{f^{(2)} f^{(1)}}) + z_{0j}^{(2)} z_{0v}^{(2)} S_{f^{(2)}}.$$

Дисперсии компонент z_j

$$D_{z_j} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{z_j}(\eta, \omega) d\omega,$$

или

$$\begin{aligned}
D_{z_j} &= \left(z_{0j}^{(1)}(\eta) \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{f^{(1)}} d\omega + 2z_{0j}^{(1)}(\eta) z_{0j}^{(2)}(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} S_{f^{(1)} f^{(2)}} d\omega + \\
&+ \left(z_{0j}^{(2)}(\eta) \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{f^{(2)}} d\omega. \quad (8.121)
\end{aligned}$$

Поскольку интегралы от нечетных функций равны нулю, то из (8.121) получаем

$$\begin{aligned}
D_{z_j}(\eta) &= \left(z_{0j}^{(1)}(\eta) \right)^2 \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(1)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(1)(1)} S_{M_k}) d\omega \right] + \\
&+ z_{0j}^{(1)}(\eta) z_{0j}^{(2)}(\eta) \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(1)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(1)(1)} S_{M_k}) d\omega \right] + \\
&+ \left(z_{0j}^{(2)}(\eta) \right)^2 \left[\sum_{k=1}^3 (\beta_k^{(2)(1)} S_{P_k} + \gamma_k^{(2)(1)} S_{M_k}) d\omega \right]. \quad (8.122)
\end{aligned}$$

Среднеквадратические значения компонент z_j

$$\sigma_{z_j}(\eta) = \sqrt{D_{z_j}(\eta)}. \quad (8.123)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Одночленное приближение при $\mathbf{P}_c \neq 0$, $\mathbf{T}_c = 0$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0^{(1)} f^{(1)}.$$

Уравнение для определения $f^{(1)}(\tau)$

$$h_{11} \ddot{f}^{(1)} + b_{11} \dot{f}^{(1)} + c_{11} f^{(1)} = \sum_{j=1}^3 u_{0j}^{(1)}(\eta_1) P_1(\tau).$$

Частотная функция

$$w(i\omega) = w_{11}(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 a_{11} + i\omega b_{11} + c_{11}} = w_{11}^{(1)}(\omega) + i w_{11}^{(2)}(\omega).$$

Изображение функции $f^{(1)}$ по Фурье

$$f^{(1)}(\omega) = \sum_{k=1}^3 u_{0k}^{(1)}(\eta_1) w_{11}(\omega) P_k(\omega).$$

Из (8.105) получаем (при $S_{M_k} = 0$, $\beta_k^{(1)} = u_{0k}^{(1)^2}$)

$$S_f^{(1)}(\omega) = \sum_{k=1}^3 u_{0k}^{(1)}(\eta_1) |w_{11}|^2 S_{P_k}(\omega).$$

Дисперсии $z_j(\eta, \omega)$ равны

$$D_{z_j}(\eta) = \left(z_{0j}^{(1)}(\eta) \right)^2 \left[\sum_{k=1-\infty}^3 \int \left(u_{0k}^{(1)}(\eta_1) \right)^2 |w_{11}|^2 S_{P_k}(\omega) d\omega \right]. \quad (8.124)$$

2. Для случая $P_c = 0$, $T_c \neq 0$ имеем

$$D_{z_j}(\eta) = \left(z_{0j}^{(1)}(\eta) \right)^2 \left[\sum_{k=1-\infty}^3 \int \left(u_{0k}^{(1)}(\eta_2) \right)^2 |w_{11}|^2 S_{M_k}(\omega) d\omega \right]. \quad (8.125)$$

В ряде случаев входящие в D_{z_j} интегралы можно проинтегрировать (приложение 2). Когда этого сделать нельзя, интегралы получают численно при конечных пределах, которые задаются из требования выполнения заданной точности конечного результата. Выражения для дисперсий и среднеквадратичных значений (8.124), (8.125) компонент z_j позволяют определить их значения в любом сечении стержня, в том числе и в сечениях, где они достигают максимальных значений.

Воспользовавшись правилом трех сигм, получим максимально возможные значения z_j при $m_{z_j} = 0$, равные

$$z_j^*(h) = 3\sigma(h). \quad (8.126)$$

Нормальные напряжения в произвольном сечении с учетом статических напряжений равны

$$\sigma(h) = \frac{(z_{10} + z_1)}{F} + \frac{(z_{50} + z_5)}{I_y} + \frac{(z_{60} + z_6)}{I_x}, \quad (8.127)$$

где $z_{10} = Q_{10}$, $z_{50} = M_{20}$, $z_{60} = M_{30}$; I_x , I_y — моменты инерции сечения; x , y — главные центральные оси сечения.

После преобразований получаем

$$\sigma(h) = \sigma_0(h) + 3 \left(\frac{\sigma_{\Delta Q_1}(h)}{F} + \frac{\sigma_{\Delta M_2}(h)x}{I_y} + \frac{\sigma_{\Delta M_3}(h)y}{I_x} \right), \quad (8.128)$$

$$\text{где } \sigma_0 = \frac{Q_{10}}{F} + \frac{M_{20}x}{I_y} + \frac{M_{30}y}{I_x}.$$

Максимальные напряжения в опасном сечении стержня

$$\sigma_{\max}(h) = \max_h \max_F \left[\sigma_0 + 3 \left(\frac{\sigma_{\Delta Q_1}}{F} + \frac{\sigma_{\Delta M_2}x}{I_y} + \frac{\sigma_{\Delta M_3}y}{I_x} \right) \right],$$

или

$$\sigma_{\max}(h) = \max_h \left[\sigma_0^{(1)} + 3 \left(\frac{\sigma_{\Delta Q_1}}{F} + \frac{\sigma_{\Delta M_2}x^*}{I_y} + \frac{\sigma_{\Delta M_3}y^*}{I_x} \right) \right] \quad (8.129)$$

$$\left(\sigma_0^{(1)} = \frac{Q_{10}}{F} + \frac{M_{20}x^*}{I_y} + \frac{M_{30}y^*}{I_x} \right),$$

где x^* , y^* — координаты «опасной» точки в сечении.

Нормальные напряжения $\sigma_{\max}(h)$ зависят от безразмерной координаты h , поэтому имеется сечение $h = h^*$, где $\sigma_{\max}(h)$ достигает максимального значения, т.е.

$$\sigma_{\max}(h^*) = \sigma_0^{(1)}(h^*) + 3 \left(\frac{\sigma_{\Delta Q_1}(h^*)}{F} + \frac{\sigma_{\Delta M_2}(h^*)x^*}{I_y} + \frac{\sigma_{\Delta M_3}(h^*)y^*}{I_x} \right). \quad (8.130)$$

Минимальное напряжение в этом сечении (в точке с координатами (x^*, y^*)) равно

$$\sigma_{\min}(h^*) = \sigma_0^{(1)}(h^*) - 3 \left(\frac{\sigma_{\Delta Q_1}(h^*)}{F} + \frac{\sigma_{\Delta M_2}(h^*)x^*}{I_y} + \frac{\sigma_{\Delta M_3}(h^*)y^*}{I_x} \right). \quad (8.131)$$

Максимальные (8.129) и минимальные (8.131) нормальные напряжения дают возможность оценить усталостную прочность стержня.

Глава 9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

В последнее время методы статистической механики получили широкое распространение во многих отраслях промышленности при оценке надежности проектируемых конструкций. Конечно, было бы неправильно утверждать, что проблема повышения надежности в строительстве и технике возникла в последние десятилетия двадцатого столетия.

Ярким примером необходимости применения статистических методов при оценке качества продукции (надежности) является приказ Петра I (приложение 5). В нем лаконично сформулированы основные пункты, выполнение которых приведет к повышению качества продукции. В приказе Петр I предусмотрел и наказания за нерадивое отношение к работе, в том числе самое жестокое наказание — «лишение воскресной чарки сроком на один год».

В предыдущих главах основное внимание было уделено методам решения задач динамики механических систем, нагруженных случайными силами, с определением вероятностных характеристик решений для систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами. Этой информации часто бывает достаточно при решении многих прикладных задач. Но для оценки надежности конструкции — одной из основных задач при проектировании — требуются новые методы и численные алгоритмы, которые в предыдущих главах не рассматривались.

Прежде чем перейти к изложению методов оценки «прочности» конструкций в вероятностной постановке, напомним традиционные расчеты в детерминированной постановке. К таким методам относятся: метод расчета по предельным состояниям (появление пластических деформаций, устойчивость) и метод расчета по допускаемым нагрузкам.

В методе расчета по предельным состояниям максимальная действующая нагрузка (точнее напряженно-деформированное состояние, вызванное этой нагрузкой) сравнивается с нагрузкой, соответствующей предельному состоянию, которое опре-

деляет несущую способность конструкции. Несущая способность конструкции — наступление предельного напряженно-деформированного состояния, которое соответствует потере работоспособности конструкции или ее разрушению. К таким предельным состояниям относятся: появление пластических деформаций, потеря статической устойчивости, разрушение.

Рассмотрим несколько примеров расчета по предельным состояниям. На рис. 9.1, а показан прямолинейный стержень, растянутый силой P , причем возникающие напряжения не должны превышать предела упругости. В этом случае предельным состоянием и соответствующей ему максимальной силой P будет такая сила, при которой напряжения в стержне достигают предела текучести σ_T . Поэтому для нормальной работы этого элемента должно выполняться условие

$$\sigma_T - \sigma > 0 \quad \left(\sigma = \frac{P}{F} \right). \quad (9.1)$$

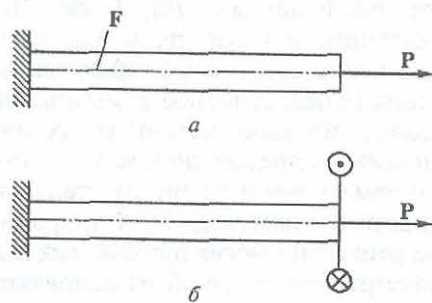


Рис. 9.1

На рис. 9.1, б показан прямолинейный стержень, нагруженный растягивающей силой P и крутящим моментом M . В стержне возникает двухосное напряженное состояние. Поэтому, чтобы в стержне не возникло пластических деформаций, должно выполняться условие

$$\sigma_T - \max \sigma_3(P, M) > 0, \quad (9.2)$$

где в зависимости от принятой при расчетах теории «прочности» $\sigma_3 = \max \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ или $\max \sigma_3 = \max \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ ($\max \tau = \frac{M}{W_K}$;

W_K — для круглого стержня равна $\pi D^3/16$.)

На рис. 9.2 показана ракета на стартовой позиции. Система упругих связей (система амортизации) дает возможность при прохождении ударной волны отклоняться на угол ν (чтобы уменьшить динамические перегрузки), но угол поворота осевой линии ракеты ограничен предельно возможным углом ν_n , который зависит от конструкции амортизаторов и допустимым линейным смещением.

На рис. 9.3 схематично показана буровая установка. При работе бура возникают вибрации, в результате которых стержень при больших отклонениях от оси симметрии может удариться о поверхность скважины, что крайне нежелательно. Поэтому перемещения точек осевой линии стержня $u(z, t)$ при колебаниях для нормальной работы системы без контактов с поверхностью скважины должны удовлетворять условию

$$\Delta - \max |u(z, t)| > 0. \quad (9.3)$$

На рис. 9.4 показан прямолинейный стержень, который нагружен сжимающей силой P . Предельным состоянием в данном случае является потеря статической устойчивости, поэтому сжимающая сила должна быть меньше критической P_K :

$$P_K - P > 0. \quad (9.4)$$

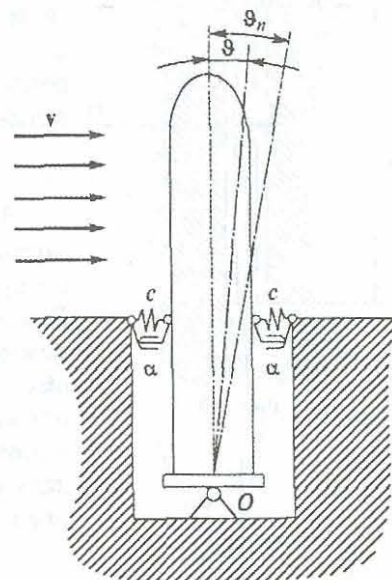


Рис. 9.2

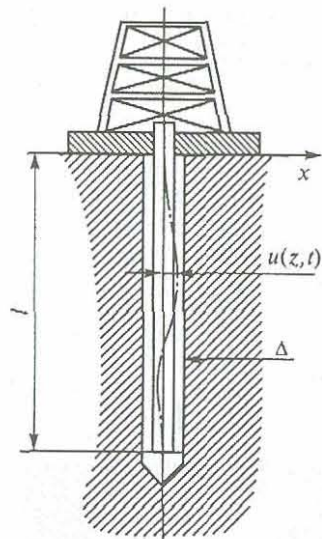


Рис. 9.3

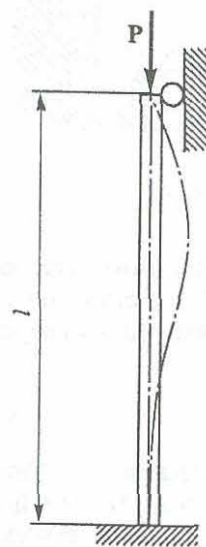


Рис. 9.4

На рис. 9.5 схематично показан турбореактивный двигатель, для нормальной работы которого необходимо, чтобы появляющиеся при работе (при $\omega \neq 0$) удлинения лопаток Δl были меньше зазора Δ между внутренней поверхностью кожуха и лопатками при $\omega = 0$:

$$\Delta - \Delta l(\omega) > 0. \quad (9.5)$$

На рис. 9.6 показано изменение нормального напряжения σ во времени при работе элемента конструкции. Для нормальной работы элемента при симметричном цикле нагружения необходимо (как минимум), чтобы напряжение было меньше предельного напряжения, соответствующего пределу выносливости для данного материала:

$$\sigma_{-1} - \sigma > 0, \quad (9.6)$$

где σ_{-1} — предел выносливости при симметричном цикле нагружения.

Методы расчета по предельным состояниям позволяют наиболее полно использовать несущую способность конструкции.

В общем случае имеем

$$S - F > 0, \quad (9.7)$$

где S — функция, характеризующая предельные возможности конструкции; F — функция, характеризующая реальное состояние конструкции.

Например, S зависит от механических характеристик материала конструкции:

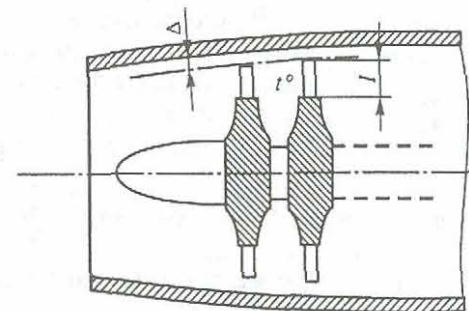


Рис. 9.5

$$S = S(\sigma_T, \sigma_B, \mu, E, G),$$

где σ_B — предел прочности; μ — коэффициент Пуассона; E, G — модули упругости соответственно первого и второго рода. Функция F зависит от напряжений, возникающих в элементах конструкции при нагружении:

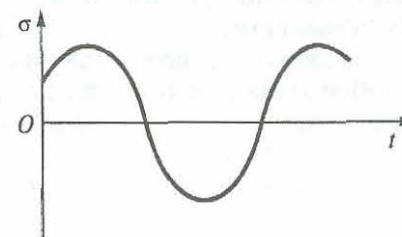


Рис. 9.6

$$F = F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \delta_{xy}, \delta_{xz}, \delta_{yz}).$$

Предельные состояния могут быть связаны не только с прочностными свойствами конструкции. Например, на рис. 9.7 показана ракета, траектория движения которой не должна выходить за допустимую «трубку» траекторий (для каждого момента t — это некоторая расчетная замкнутая предельная область D_0). Поэтому система управления ракетой должна обеспечить выполнение условия

$$D_0(t) - D(t) > 0, \quad (9.8)$$

где $D(t)$ — реальная область, внутри которой находится ракета при движении.

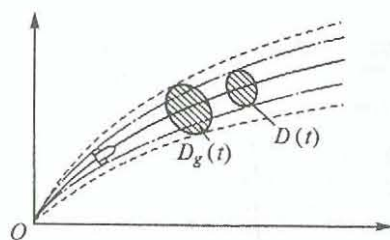


Рис. 9.7

В методе расчета по допускаемым напряжениям вводится понятие коэффициента безопасности, и допускаемое напряжение σ_∂ полагается равным

$$\sigma_\partial = [\sigma] = \frac{\sigma_n}{n}, \quad (9.9)$$

где σ_n — предельное напряжение (предел текучести для пластичных материалов, предел прочности для хрупких материалов, критическое напряжение, соответствующее потере статической устойчивости); n — коэффициент безопасности.

Поэтому условия «прочности», например, для (9.1), (9.2), (9.4) и (9.5) при расчетах по допускаемым состояниям имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T}{n_1} - \sigma &\geq 0; \\ \frac{\sigma_T}{n_1} - \max \sigma_3(P, M) &\geq 0; \\ \frac{P_k}{n_2} - P &\geq 0; \\ \frac{\Delta}{n_3} - \Delta I(\omega) &\geq 0 \quad (n > 1). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Выполнение условий (9.10) при детерминированных значениях входящих в них величин, как принято считать, гарантирует «прочность» этих конструкций.

В более общей форме записи соотношения (9.10) можно представить в виде

$$S_\partial - S \geq 0 \quad \left(S_\partial = \frac{R_H}{n} \right), \quad (9.11)$$

где R_H — несущая способность конструкции или ее элементов; S_∂ — допускаемое состояние, например, допускаемая нагрузка,

допускаемые напряжения и т.д.; S — реальное состояние; n — коэффициент безопасности.

Входящие в соотношения (9.11) значения R_H , S и n рассматриваются как детерминированные величины. В детерминированной постановке конечной целью расчетов является проверка выполнения неравенств (9.10). Выполнение неравенств (9.10) можно рассматривать как гарантию того, что за время эксплуатации конструкции ее отказ полностью исключен. (В общем случае отказ — это нарушение работы конструкции, а не только достижение предельного состояния.)

Коэффициенты n_j выбираются на основе накопленного опыта. В каждой области техники имеются свои требования к проектируемым изделиям, традиционные методы расчета, которые позволяют рекомендовать числовые значения коэффициентов безопасности. Часто их называют «нормативными коэффициентами запаса прочности», или «нормативными коэффициентами безопасности» [15, 16]. Например, в авиационной технике коэффициент безопасности рекомендуется брать равным $n = 1,5$, в ракетной и космической технике $n = 1,2$.

Выбранные числовые значения коэффициентов n зависят от ответственности проектируемой техники, уровня технологии изготовления, свойств материалов, точности задания нагрузок. Коэффициенты безопасности уточнялись с учетом обобщения многолетнего опыта проектирования в каждой отрасли техники, поэтому в каждой из отраслей существуют свои «нормы прочности», которые используются в практике проектирования. Нормы прочности определяют состав и объем основных работ, проводимых на всех стадиях при создании конструкций, необходимых для обеспечения требуемой прочности. Основную роль в создании конструкции играет проектирование, где с учетом всех «физических» особенностей конструкции и реальных условий ее эксплуатации учитываются все требования по прочности, которые должны быть реализованы в опытном образце.

При использовании методов расчета, основанных на нормах прочности, при определении несущей способности конструкции роль коэффициентов безопасности сводится в основном к компенсации: 1) несоответствия между детерминистской формой представления результатов расчета на прочность и возможными разбросами конструктивных параметров и нагрузок;

2) отклонения расчетной схемы (математической модели) от реальной конструкции и реальных условий нагружения, что приводит к большому разбросу коэффициента безопасности даже при проектировании однотипных конструкций. Например, в Англии при проектировании управляемых снарядов принят коэффициент безопасности $n = 1,33$, а в США при проектировании близких по тактико-техническим характеристикам управляемых снарядов $n = 1,25$ [3]. Аргументированно объяснить, почему коэффициенты n разные, невозможно, поэтому использование коэффициентов безопасности связано с некоторой долей неопределенности при расчетах.

Введение коэффициентов безопасности позволяет во многих случаях получать удовлетворительные конструкции, однако при проектировании новой техники, когда нет ни опыта, ни данных по эксплуатации, выбрать разумный коэффициент безопасности очень сложно. Произвольно назначенный коэффициент безопасности может привести к неправильным решениям, следствием которых может стать или завышенный вес конструкций, или аварийная ситуация. Основная трудность при определении допускаемых напряжений (или деформаций), а также определении несущей способности конструкции состоит в согласовании расчетных данных с фактическими. Задача выбора конкретного значения коэффициента безопасности, например для определения допускаемого напряжения, осложняется тем, что механические характеристики материала (от которых зависят предельные состояния конструкции), реальные силы и геометрические размеры элементов конструкции, от которых зависят текущие состояния конструкции, имеют случайные разбросы. Традиционные методы расчета как при расчете по предельным состояниям, так и по допускаемым напряжениям, возможные случайные разбросы в явном виде не учитываются, т.е. не учитывается вероятностный характер предельных состояний конструкции или вероятностный характер реального состояния конструкции. Поэтому оценивать работоспособность конструкции логичнее не по детерминированным неравенствам (9.1)–(9.3), а по вероятности выполнения этих неравенств, т.е.

$$P[(S - F) > 0], \quad (9.12)$$

где P — вероятность безотказной работы.

Вероятность отказа

$$R = 1 - P(R[(S - F) < 0]). \quad (9.13)$$

Для оценки «прочности» с учетом вероятностного характера конструктивных параметров и нагрузок требуются другие методы, основанные на теории вероятностей и статистической механики. Поэтому вводится понятие надежности системы H , которая оценивается вероятностью выполнения неравенства (9.7):

$$H = P[(S - F) > 0]. \quad (9.14)$$

Под *надежностью* понимается способность машин, приборов и конструкций безотказно работать в течение определенного отрезка времени. Безотказной работой технических объектов считается выполнение ими всех своих функций в заданных условиях эксплуатации. (Более подробное определение надежности читается так: «свойство объектов сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования».)

Переходя к вероятностным методам оценки «прочности», когда необходимо учитывать случайный характер нагрузок и параметров конструкции, вместо детерминированных неравенств (9.1)–(9.8) определяют вероятности их выполнения. Для общего случая (9.7) оценка безотказной работы связана с определением вероятности:

$$P[(S - F) > 0]. \quad (9.15)$$

Возникает вопрос, насколько вероятностные оценки «прочности» лучше традиционных оценок с использованием коэффициента безопасности, который столь же неконкретен, как и вероятность. Дело в том, что вероятностные оценки «прочности» учитывают объективно существующие случайные разбросы нагрузок, механических характеристик материалов и т.д., поэтому они более полно отражают реальные условия. В зависимости от разброса механических характеристик и разброса нагрузок при коэффициенте $n = 1,3$ вероятность безотказной

работы может быть меньше, чем при $n = 1,2$, что кажется странным, так как принято считать, что чем больше коэффициент безопасности, тем выше «прочность» конструкции.

Сами по себе вероятности безотказной работы системы мало полезны (например, если $P = 0,9$, то трудно сказать, хорошо это или плохо), но если проводятся расчеты для двух вариантов материала с учетом вероятностных свойств их механических характеристик и оказывается, что вероятность безотказной работы соответственно равна 0,9 и 0,95, то можно утверждать, что конструкция с вероятностью безотказной работы 0,95 будет лучше. Учет случайных разбросов приводит к качественно другим оценкам «прочности», что позволяет проектировать более рациональные конструкции, обладающие большей надежностью, долговечностью и ресурсом.

Обеспечение надежности проектируемых механических систем является одной из основных проблем в машиностроении, приборостроении, авиации, ракетно-космической технике и многих других отраслях промышленности. Это связано с непрерывным ростом требований по надежности и долговечности к новой технике, которая должна нормально функционировать в сложных условиях эксплуатации. Условно все задачи оценки надежности механических систем можно разбить на три класса.

К *первому классу* относится оценка надежности конструкции или элементов конструкции при одноразовом или при малом числе нагружений. Задачи оценки надежности при одноразовом нагружении возникают как при статическом, так и при динамическом нагружении, например при ударном или импульсном нагружении [7, 22]. В этих задачах накопления повреждений не происходит или, если число нагружений невелико, накоплением повреждений можно пренебречь.

Во *второй класс* входят задачи о накоплении остаточных макроскопических деформаций на ограниченном интервале времени $(0, T)$ при стационарных или квазистационарных случайных нагрузках [8], когда однократные перегрузки, приводящие к отказу системы, можно считать маловероятными. При расчетах для этих задач требуется определить распределения вероятности для остаточных деформаций при $t = T$. Под квазистационарными нагрузками (процессами) понимаются про-

цессы, вероятностные характеристики которых медленно изменяются во времени по сравнению с изменением самих случайных функций.

К *третьему классу* относятся задачи о накоплении усталостных повреждений при стационарных или квазистационарных случайных нагрузках, когда превышение предела пропорциональности напряжениями, возникающими в конструкции, можно считать маловероятным событием, т.е. конструкция выходит из строя в результате постепенного развития усталостных трещин [8, 19].

§ 9.1. Простейшие задачи теории надежности

Прежде чем перейти к методам определения числовых значений вероятности выполнения неравенств (8.1)–(8.6), рассмотрим простейшие задачи определения надежности системы, когда надежность ее элементов известна.

Рассмотрим пример определения надежности (H) системы, состоящей из отдельных элементов, надежность которых равна H_k (рис. 9.8). На рис. 9.8, а, б в виде блок-схем показаны две механические системы с известными вероятностями P_k ($P_k = H_k$) безотказной работы каждого из звеньев, входящих в систему. На рис. 9.8, а система состоит из последовательно соединенных элементов; на рис. 9.8, б — из параллельно соединенных элементов.

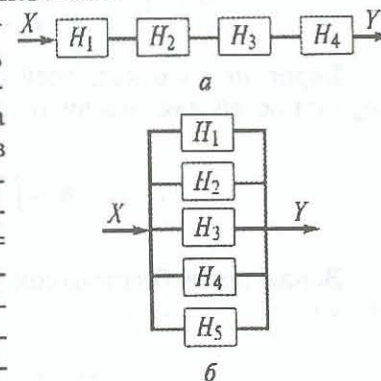


Рис. 9.8

Рассмотрим случай последовательного соединения элементов (рис. 9.8, а), когда элементы взаимодействуют так, что их отказы ($R_k = 1 - P_k$) независимы. Требуется определить надежность всей системы в целом. Эта система сохраняет работоспособность только тогда, когда все ее последовательно соединенные элементы работают безотказно. Как известно, вероятность наступления совместного события, состоящего из n независимых событий, равна произведению вероятностей на-

ступления каждого события. Поэтому вероятность безотказной работы системы в целом равна

$$P = H = \prod_{j=1}^p H_j. \quad (9.16)$$

Например, если $p = 4$, $H_1 = 0,9$, $H_2 = 0,8$, $H_3 = 0,7$, $H_4 = 0,6$, то $H = 0,3024$, т.е. надежность системы, состоящей из последовательно соединенных элементов, меньше надежности ее элементов.

Рассмотрим систему, состоящую из параллельно соединенных элементов (рис. 9.8, б), дублирующих друг друга. В этом случае отказ системы произойдет только при отказе всех элементов.

Вероятность отказа каждого элемента

$$R_i = 1 - H_i.$$

Вероятность отказа всей системы (теорема о произведении вероятностей для независимых событий)

$$R = \prod_{i=1}^5 (1 - H_i). \quad (9.17)$$

Вероятность безотказной работы системы (надежность системы)

$$H = 1 - \prod_{i=1}^5 (1 - H_i). \quad (9.18)$$

Например, если $H_i = 0,5$, то общая надежность системы $H = 0,97$. Вероятность безотказной работы системы с параллельно соединенными элементами выше, чем надежность ее элементов, т.е. можно существенно повысить H системы, если вместо одного малонадежного элемента включить в общую систему блок из нескольких параллельно соединенных элементов. Например, в системе последовательно соединенных трех элементов имеется один элемент с малой надежностью (H_2) (рис. 9.9). Если $H_1 = 0,9$, $H_2^{(1)} = 0,3$, $H_3 = 0,8$, то общая надеж-

ность системы $H = H_1 H_2^{(1)} H_3 = 0,216$. Если включить в систему вместо $H_2^{(1)}$ блок из трех таких же параллельно соединенных элементов (показанных на рис. 9.9 пунктирными линиями), то надежность этого звена $H_2^{(1)} = 1 - (1 - H_2^{(1)})^3 = 0,657$ и общая вероятность безотказной работы $H = 0,9 \cdot 0,657 \cdot 0,8 = 0,47$.

Таким образом, надежность системы увеличилась более чем в два раза!

На рис. 9.10 показан авиалайнер, имеющий четыре двигателя. Можно считать, что система двигателей есть система параллельно соединенных звеньев (рис. 9.8, б). Примем, что надежность H_j всех двигателей одинакова и равна $h = 0,9$. Авиалайнер может лететь при отказе трех двигателей. При независимой работе двигателей вероятность отказа

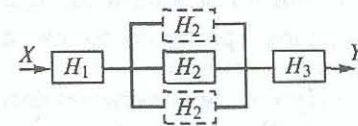


Рис. 9.9



Рис. 9.10

$$R = (1 - H_j)^4 = (0,1)^4 = 0,0001,$$

поэтому $H = 1 - R = 0,9999$.

Если авиалайнер может лететь только при двух работающих двигателях, то надежность $H = 1 - (0,1)^3 = 0,999$.

§ 9.2. Возможные причины отказов

К основным причинам отказов механических систем относятся: неполное соответствие между используемой в расчетах нагрузкой и реальной нагрузкой; интенсивные нагрузки, приводящие к превышению несущей способности конструкции; пластические деформации упругих элементов; износ деталей; превышение допустимых деформаций; потеря устойчивости и т.д. Отказ может произойти как от случайных дефектов, которые были в элементах конструкции и получили развитие при эксплуатации (развитие трещин), так и в результате накопления повреждений и изменения механических характеристик мате-

риала (например, из-за облучения). Тяга ракеты R (см. рис. В.2) из-за случайного изменения температуры заряда будет иметь разброс ($R = R_0 + \Delta R$, где R_0 — расчетное значение тяги, ΔR — случайный разброс). Из-за технологических погрешностей при сборке осевая линия ракеты и линия действия тяги могут не совпадать, что приведет к появлению случайной силы $\bar{N}_c$ и случайного момента $\bar{M}_c$ и в конечном счете — к недопустимо большому разбросу точки падения ракеты, что можно рассматривать как отказ.

При полете летательного аппарата в неспокойной (турбулентной) атмосфере на него действуют случайные аэродинамические силы, которые могут существенно изменить траекторию полета с выходом ее из допустимой «трубки» (см. рис. 9.7), что тоже является отказом. К аналогичному отказу может привести и случайный боковой ветер. На рис. В.2 показан автомобиль, движущийся по дороге со случайными неровностями, из-за которых в силах взаимодействия колес автомобиля с дорогой появляются случайные составляющие. В зависимости от «величины» этих случайных составляющих возможны отказы типа «пробоя подвески» или усталостного разрушения подвески.

Причиной отказов может быть и несоответствие между расчетной схемой (математической моделью) и реальной конструкцией, например неучет в математической модели нелинейностей, зазоров, трения, разброса механических характеристик материала.

§ 9.3. Определение числовых значений вероятности безотказной работы

Напомним, что надежность H определяется как вероятность безотказной работы (9.14):

$$H = P[(S - F) > 0], \quad (9.19)$$

где S — функция, определяющая предельные возможности конструкции (функция несущей способности конструкции); F — функция, определяющая текущее состояние системы.

В этом параграфе рассматриваются задачи определения надежности при одноразовом нагружении или при малом числе последовательных нагружений, когда накоплением поврежде-

ний в конструкции можно пренебречь. Чтобы найти вероятность P , надо знать совместный закон распределения $f(z)$ случайной величины $Z = S - F$ при известных законах распределения S и F . Если $f(z)$ известно, то

$$P(Z > 0) = \int_0^{\infty} f(z) dz = \iint_{\Omega(S - F > 0)} f(S, F) dS dF. \quad (9.20)$$

Для получения численных значений H надо знать (определить) закон распределения случайной величины Z , функционально зависящей от двух непрерывных случайных величин X и Y :

$$Z = \varphi(X, Y) \quad (9.21)$$

при известном их совместном законе распределения плотности вероятности $f(x, y)$ (см. гл. 1).

В общем случае закон распределения случайной величины Z

$$F(z) = P(Z < z) = P[(X, Y) \in D] = \iint_{D(Z < z)} f(x, y) dx dy. \quad (9.22)$$

Математическая задача определения $F(z)$ свелась, таким образом, к решению двукратного интеграла

$$F(z) = \iint_{D(Z < z)} f(x, y) dx dy.$$

Для случая, когда $Z = X + Y$, интеграл берется по области D (рис. 9.11), где $x + y < z$, поэтому, фиксируя Z и полагая $y = z - x$, получаем конкретные пределы интегрирования, т.е.

$$F(z) = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right] dx. \quad (9.23)$$

Плотность распределения $f(z)$ получим, дифференцируя (9.23) по z , которая входит как параметр в верхний предел интеграла

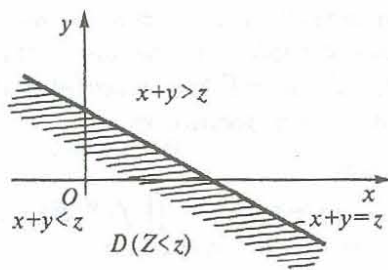


Рис. 9.11

$$f(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx. \quad (9.24)$$

Так как случайные величины X и Y равноправны, то можно было исключать не y , а x и получить еще одно выражение для закона распределения плотности вероятности $f(z)$:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy. \quad (9.25)$$

Если X и Y независимы, то плотность распределения Z равна

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx, \quad (9.26)$$

или

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy.$$

Проинтегрировав правую часть (9.26) по x , получим функцию, зависящую от z .

При определении вероятности безотказной работы требуется найти функцию распределения $F(z)$ случайной величины z , равной разности двух случайных величин s и f :

$$z = s - f_0$$

при известном совместном законе распределения $f(s, f_0)$, т.е.

$$F(z) = \iint_{D(Z < z)} f(s, f_0) ds df_0.$$

На рис. 9.12 показана заштрихованная область, где $s - f_0 < z$. Поэтому интегрирование по области D , как и в предыдущем случае, можно заменить интегрированием по f_0 при фиксированном z ($f_0 = s - z$), а затем по s :

$$\iint_D f(s, f_0) ds df_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{s-z}^{\infty} f(s, f_0) df_0 \right] ds. \quad (9.27)$$

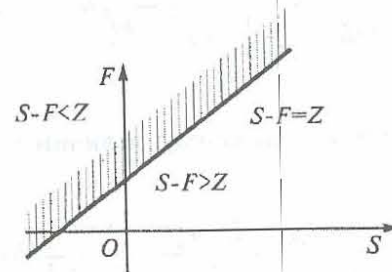


Рис. 9.12

Дифференцируя (9.27) по z , получим

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_{s-z}^{\infty} f(s, f_0) df_0 \right] ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, s-z) ds.$$

Если случайные величины s и f_0 независимы, то имеем

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) f_2(s-z) ds, \quad (9.28)$$

или, изменив порядок интегрирования,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{-\infty}^{z+f_0} f(s, f_0) ds \right] df_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(z+f_0, f_0) df_0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z + f_0) f_2(f_0) df_0. \quad (9.29)$$

Рассмотрим случай, когда s и f_0 имеют нормальные распределения:

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{(s-m_s)^2}{2\sigma_s^2}}; \quad (9.30)$$

$$f(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{f_0}} e^{-\frac{(f_0-m_{f_0})^2}{2\sigma_{f_0}^2}}. \quad (9.31)$$

Закон распределения случайной величины z (9.28) в этом случае равен

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_{f_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-m_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{(s-z-m_{f_0})^2}{2\sigma_{f_0}^2}} ds, \quad (9.32)$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_{f_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-As^2 \pm 2B(z)s - C(z)} ds,$$

где

$$A = \frac{\sigma_s^2 + \sigma_{f_0}^2}{2\sigma_s^2\sigma_{f_0}^2}; \quad B = \frac{m_s}{2\sigma_s^2} + \frac{z + m_{f_0}}{2\sigma_{f_0}^2}; \quad C = \frac{m_s^2}{2\sigma_s^2} + \frac{(z + m_{f_0})^2}{2\sigma_{f_0}^2}.$$

Воспользовавшись табличными значениями для определенных интегралов, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_{f_0}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC-B^2}{A}},$$

или, после преобразований,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}, \quad (9.33)$$

где $m_z = m_s - m_{f_0}$; $\sigma_z = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_{f_0}^2}$.

Определив $f(z)$, находим вероятность безотказной работы (надежность)

$$H = P(Z > 0) = \int_0^{\infty} f(z) dz. \quad (9.34)$$

Введя новое обозначение

$$\beta = \frac{z - (m_s - m_{f_0})}{\sigma_z},$$

получим

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta_0}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta \quad (\beta_0 = \beta|_{z=0}). \quad (9.35)$$

График подынтегральной функции показан на рис. 9.13. Функция $f(\beta)$ симметрична относительно вертикальной оси, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\beta_0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta_0} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta_0}.$$

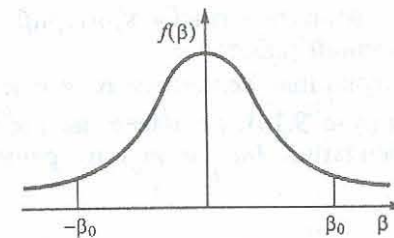


Рис. 9.13

Окончательно числовое значение надежности

$$H = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{m_s - m_f}{\sigma_z}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta. \quad (9.36)$$

Интеграл, входящий в правую часть (9.36), является табличным интегралом («интеграл вероятности»).

Пример 9.1. Вернемся к задаче оценки «прочности» стержня, растянутого силой P (см. рис. 9.1, а), по детерминированному (9.10) и вероятностному (9.14) критериям. При детерминированных σ_T и $\sigma = \frac{P}{F}$ «прочность» оценивается коэффициентом безопасности n :

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma}. \quad (9.37)$$

При наличии случайных разбросов σ_T и σ аналогом коэффициента n является коэффициент $\tilde{n}$, равный отношению математических ожиданий m_{σ_T} и m_{σ} :

$$\tilde{n} = \frac{m_{\sigma_T}}{m_{\sigma}}. \quad (9.38)$$

Но коэффициент $\tilde{n}$ не учитывает среднеквадратичные разбросы σ_T и σ . Как было сказано ранее, чтобы учесть все вероятностные характеристики σ_T и σ при оценке «прочности», надо использовать «вероятностный» критерий «прочности» — вероятность безотказной работы.

Считаем, что случайные величины σ_T и σ имеют нормальные распределения (рис. 9.14), т.е. известны числовые значения математических ожиданий (m_{σ_T} и m_{σ}) и среднеквадратичных отклонений σ_{σ_T} и σ_{σ} .

Для нормально распределенных случайных величин s и f надежность (вероятность безотказной работы)

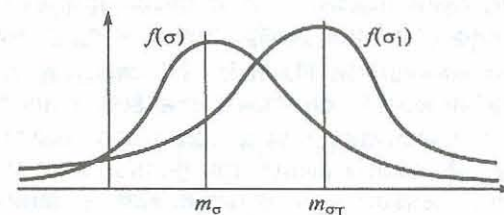


Рис. 9.14

$$H = P[(S - F) > 0] = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{m_{\sigma_T} - m_{\sigma}}{\sigma_z}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta,$$

где

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{\sigma_T}^2 + \sigma_{\sigma}^2}.$$

Результаты расчетов при различных значениях вероятностных характеристик σ_T и σ представлены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Результаты расчета

Математическое ожидание предела текучести, m_{σ_T}	Математическое ожидание напряжения, m_{σ}	Среднеквадратичное отклонение, σ_{σ_T}	Среднеквадратичное отклонение напряжения, σ_{σ}	Коэффициент безопасности n , $\tilde{n} = \frac{m_{\sigma_T}}{m_{\sigma}}$	Вероятность безотказной работы, $P = H$
$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10$	$5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	2,5	0,9999
$5 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10$	$5 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	2	0,9999
$5 \cdot 10^4$	$3,33 \cdot 10$	$5 \cdot 10^3$	$3,33 \cdot 10^3$	1,5	0,9974
$5 \cdot 10^4$	$3,8 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$3,8 \cdot 10^3$	1,3	0,9719
$5 \cdot 10^4$	$4,17 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$4,17 \cdot 10^3$	1,2	0,8997
$5 \cdot 10^4$	$4,35 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$4,37 \cdot 10^3$	1,15	0,8365
$5 \cdot 10^4$	$4,55 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$4,55 \cdot 10^3$	1,1	0,7486

При определении надежности H было принято, что среднеквадратические значения разбросов σ_T и σ_σ равны 10 % от математических ожиданий. Из табл. 9.1 следует, что для всех значений коэффициента безопасности вероятность отказа R ($R = 1 - H$) не равна нулю. Как и следовало ожидать, вероятность безотказной работы выше при больших коэффициентах безопасности n и меньше при малых n . Как изменятся вероятности безотказной работы, соответствующие коэффициентам безопасности $n = 1,15$ и $n = 1,1$, если взять более качественный материал и уменьшить возможный разброс нагрузки?

Например, среднеквадратические разбросы σ_T и σ_σ (σ зависит от внешней нагрузки) равны 5 % от их средних значений. В этом случае вероятности безотказной работы равны: 1) при $n = 1,15$ $H = 0,9726$; 2) при $n = 1,1$ $H = 0,9082$, что соответственно на 14 и на 17 % больше их значений, чем при 10%-ном разбросе среднеквадратичных значений σ_{σ_T} и σ_σ при тех же коэффициентах безопасности (см. табл. 9.1). Числовые значения вероятности безотказной работы дают возможность исследовать чувствительность конструкции к возможным разбросам σ_T и случайной силы P .

Как уже говорилось, абсолютные значения вероятностей безотказной работы мало полезны, но возможность установить, как влияет на работоспособность конструкции изменение вероятностных характеристик допустимых напряжений и внешней нагрузки, является объективной оценкой качества конструкции. Сравнивая вероятности безотказной работы, например при $n = 1,1$ видим, что уменьшение среднеквадратичных значений σ_T и σ_σ на 5 % привело к повышению надежности на 20 %.

В качестве примера найдем вероятность безотказной работы диска с лопатками одной из ступеней компрессора турбореактивного двигателя (рис. 9.15). При работе двигателя лопатки удлиняются из-за возникающих при вращении диска осевых распределенных центробежных сил и температу-

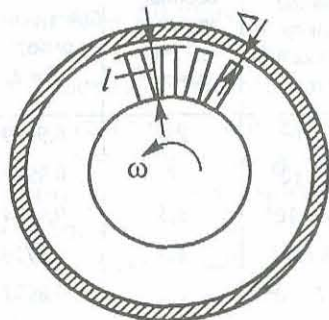


Рис. 9.15

ры t° . Угловая скорость вращения диска ω и температура t° имеют разбросы; зазор Δ также имеет разброс, поэтому для оценки надежности диска с лопатками надо определить вероятность выполнения этого неравенства $(\Delta - \delta L) > 0$:

$$H = P[(\Delta - \delta L) > 0].$$

Примем, что закон распределения зазора Δ является равновероятностным (рис. 9.16, а):

$$f(\Delta) = \begin{cases} a & \Delta_1 < \Delta < \Delta_2 \\ 0 & \Delta < \Delta_1 \text{ или } \Delta > \Delta_2 \end{cases} \quad \left(a = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} \right), \quad (9.39)$$

а закон распределения Δl подчиняется нормальному распределению (рис. 9.16, б):

$$f(\Delta l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\Delta l}} e^{-\frac{(\Delta l - m_{\Delta l})^2}{2\sigma_{\Delta l}^2}}. \quad (9.40)$$

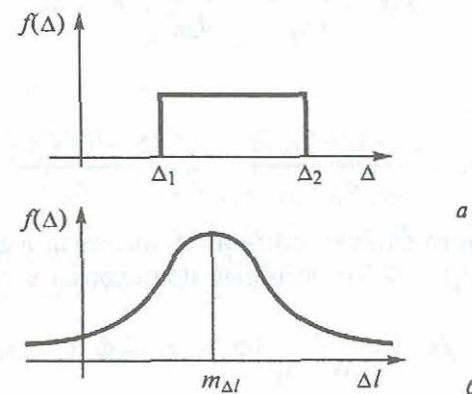


Рис. 9.16

Введя случайную величину $z = \Delta - \Delta l$, находим функцию распределения $F(z)$:

$$F(z) = \iint_{\Omega(Z < z)} f(\Delta, \Delta l) d\Delta d\Delta l =$$

$$= \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} d\Delta \left\{ \int_{\Delta-z}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta l}} e^{-\frac{(\Delta l - m_{\Delta l})^2}{2\sigma_{\Delta l}^2}} \right\} d\Delta l.$$

Дифференцируя по z , получаем

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta l}\Delta_1} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-\frac{[(\Delta - z) - m_{\Delta l}]^2}{2\sigma_{\Delta l}^2}} d\Delta. \quad (9.41)$$

Введя новое переменное

$$t = \frac{\Delta - (z + m_{\Delta l})}{\sigma_{\Delta l}},$$

получим

$$f(z) = \frac{1}{(\Delta_2 - \Delta_1)\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где

$$t_1 = \frac{\Delta_1 - (z + m_{\Delta l})}{\sigma_{\Delta l}}; \quad t_2 = \frac{\Delta_2 - (z + m_{\Delta l})}{\sigma_{\Delta l}}.$$

Для каждого фиксированного z_j интеграл выражается через функции $\Phi(t_1)$ и $\Phi(t_2)$, которые приводятся в справочниках:

$$f(z_j) = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} [\Phi(t_2, z_j) - \Phi(t_1, z_j)]. \quad (9.42)$$

Изменяя дискретно z , получаем числовые значения закона распределения $f(z)$ случайной величины z в дискретных точках (рис. 9.17).

Воспользовавшись сплайн-функциями, можно получить, ограничившись некоторым конечным значением z_n (которое определяется из требований по точности), непрерывную функцию $f(z)$, а затем определить на интервале $(0, z_n)$ вероятность безотказной работы

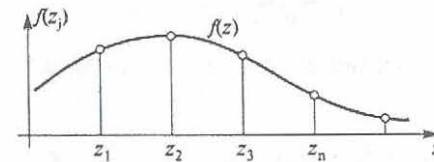


Рис. 9.17

$$P(z > 0) = \int_0^{\infty} f(z) dz \approx \int_0^{z_n} f(z) dz.$$

Например, при следующих числовых значениях:

$$\Delta_1 = 0,4 \text{ см}, \Delta_2 = 0,8 \text{ см}, m_{\Delta l} = 0,6 \text{ см}, \sigma_{\Delta l} = 0,06 \text{ см}$$

$$\left(t_1 = \frac{(0,1 - z) 10^2}{12}, \quad t_2 = \frac{(0,5 - z) 10^2}{12} \right)$$

после вычислений получаем

$$P(z > 0) = 0,972.$$

Оценим надежность работы прямолинейного стержня, нагруженного сжимающей силой P (рис. 9.18). Предельное состояние стержня в данном случае связано с потерей устойчивости. Поэтому для нормальной работы стержня должно выполняться условие

$$P_k - P = 0, \quad (9.43)$$

где P_k — критическая сжимающая сила,

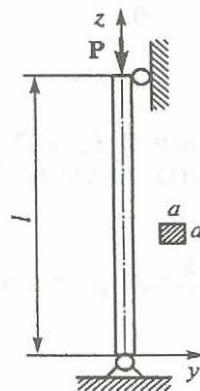


Рис. 9.18

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Так как P_k и P имеют случайные разбросы, то требуется определить вероятность безотказной работы:

$$P[(P_k - P) > 0].$$

Примем следующие законы распределения для P_k и P :

$$f_1(P_k) = \delta(P_k - P_{k0}); \quad f_2(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{(P - m_P)^2}{2\sigma_P^2}},$$

где δ — дельта-функция.

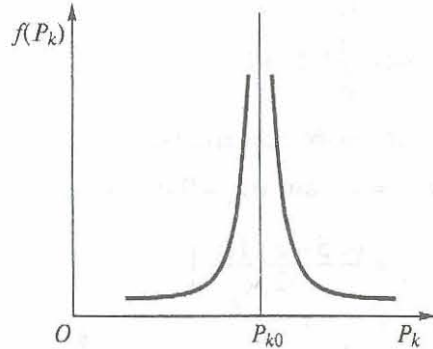


Рис. 9.19

Закон распределения $f(P_k)$ показан на рис. 9.19, т.е. P_k есть детерминированная величина, равная P_{k0} .

Введем случайную величину z :

$$z = P_k - P > 0. \quad (9.44)$$

Для определения закона распределения $f(z)$ найдем функцию распределения $F(z)$, зависящую от совместного закона распределения P_k и P .

Поэтому совместный закон распределения при независимых P_k и P можно представить в виде

$$f(P_k, P) = \delta(P_k - P_{k0}) f(P). \quad (9.45)$$

Закон распределения

$$F(z) = \iint_{D(Z < z)} \delta(P_k - P_{k0}) f(P) dP_k dP. \quad (9.46)$$

Фиксируя z , получаем

$$P = P_k - z,$$

поэтому

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{P_k - z}^{\infty} f(P) dP \right\} \delta(P_k - P_{k0}) dP_k. \quad (9.47)$$

Дифференцируя $F(z)$ по z , получим

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f(P_k - z) \delta(P_k - P_{k0}) dP_k,$$

или

$$f(z) = f(P_{k0} - z).$$

Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{(P_{k0} - z - m_P)^2}{2\sigma_P^2}},$$

или

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_P} e^{-\frac{[z - (P_{k0} - m_P)]^2}{2\sigma_P^2}}. \quad (9.48)$$

Полагая

$$t = \frac{z - (P_k - m_P)}{\sigma_P},$$

получаем вероятность безотказной работы

$$P(z > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{P_{k0} - m_P}{\sigma_P}} \int_{-\frac{P_{k0} - m_P}{\sigma_P}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (9.49)$$

§ 9.4. Определение надежности при линейной зависимости напряженного состояния от случайных нагрузок

Рассмотрим более общий случай, когда величина, характеризующая нагруженное состояние конструкции, линейно зависит от сосредоточенных и распределенных сил (рис. 9.20):

$$F = k_1 P + k_2 q, \quad (9.50)$$

где P — сосредоточенная сила; q — распределенная сила.

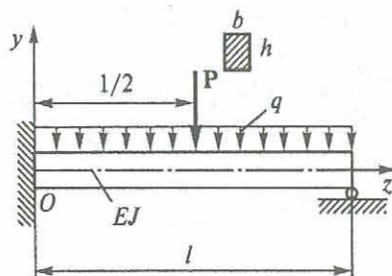


Рис. 9.20

Например, максимальное напряжение в заделке для стержня, показанного на рис. 9.20, линейно зависит от P и q :

$$\sigma_{\max} = \frac{M(0)}{W} = \frac{\beta_1 P + \beta_2 q}{W} = k_1 P + k_2 q. \quad (9.51)$$

Вероятность безотказной работы в этом случае равна

$$P(\sigma_T - \sigma_{\max} > 0) = P[(\sigma_T - (k_1 P + k_2 q)) > 0]. \quad (9.52)$$

Нагрузки P и q могут быть как зависимыми, так и независимыми — это определяется конкретными условиями.

Рассмотрим вначале случай, когда P и q независимы и имеют нормальные законы распределения. Предварительно возьмем общий случай, когда случайная величина

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (9.53)$$

и требуется найти ее закон распределения $f(y)$ при известных (нормальных) законах распределения X_i . Операция определения закона распределения суммы независимых случайных величин X_i , имеющих нормальное распределение, называется *композицией нормальных законов* [14]. При композиции нормальных законов получается снова нормальный закон. Поэтому закон распределения $f(y)$ имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (9.54)$$

где

$$m_y = \sum_{i=1}^n a_i m_{X_i}; \quad \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}.$$

Для рассматриваемой задачи $y = k_1 P + k_2 q$,

$$\text{поэтому имеем } f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

где

$$m_y = k_1 m_P + k_2 m_q; \quad \sigma_y = \sqrt{k_1^2 \sigma_P^2 + k_2^2 \sigma_q^2}.$$

Считая, что случайные величины S и Y независимы и S имеет нормальное распределение, получаем ($z = S - Y$) закон распределения $f(z)$ (9.26):

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}},$$

где

$$m_z = k_1 m_P + k_2 m_q - m_S; \quad \sigma_z = \sqrt{k_1^2 \sigma_P^2 + k_2^2 \sigma_q^2 + \sigma_S^2}.$$

Вероятность безотказной работы системы равна

$$H = P[(S - k_1 P + k_2 q) > 0] = \int_0^{\infty} f(z) dz.$$

Переходя к новому переменному $t = \frac{z - m_z}{\sigma_z}$, получаем

$$P(z > 0) = H = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m_z}{\sigma_z}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Изложенный в данном параграфе алгоритм определения вероятности безотказной работы при одноразовом или при малом числе нагружений позволяет решать задачи расчета конструкций с заданной надежностью и задачи оптимизации конструкций.

§ 9.5. Определение вероятности безотказной работы при нелинейной зависимости случайной величины F от внешних нагрузок

Рассмотренные в предыдущих пунктах задачи на определение вероятности безотказной работы относились к случаю, когда функция F линейно зависела от нагрузок, а напряженное состояние элементов конструкций было одноосным. Рассмотрим более сложные случаи, когда функция F , характеризующая реальное состояние системы, нелинейно зависит от внешних нагрузок (например, когда напряженное состояние элемента конструкции является двухосным). На рис. 9.21, *а* показан прямолинейный стержень прямоугольного сечения, который нагружен силами P_1 , P_2 и крутящим моментом M . Считается,

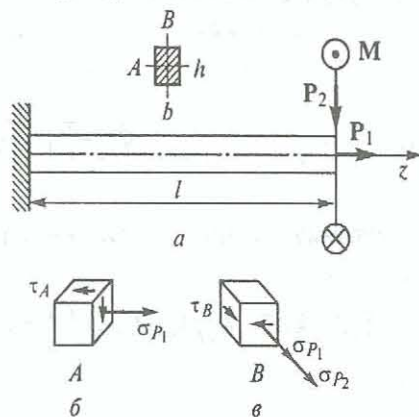


Рис. 9.21

что законы распределения P_1 , P_2 и M известны. В точках A и B сечения стержня (рис. 9.21, *б*, *в*) имеет место двухосное напряженное состояние. Опасным сечением является сечение при $z = 0$.

В точке A (рис. 9.21, *б*) имеем

$$\sigma_P = \frac{P_1}{bh}; \tau_A = \frac{M}{\alpha hb^2}; \sigma_{P_2} = 0,$$

где α — коэффициент Сен-Венана (табл. 9.2).

В точке B (рис. 9.21, *в*)

$$\sigma_{P_1} = \frac{P_1}{bh}; \sigma_{P_2} = \frac{P_2 l}{bh^2}; \tau_B = \eta \tau_A.$$

Таблица 9.2

Значения коэффициента Сен-Венана

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,207	0,313	0,333
η	1	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,743	0,742

Определим вероятность того, что эквивалентное напряжение в точках A и B меньше предела текучести, т.е.

$$P[(\sigma_T - \sigma_3) > 0]. \quad (9.55)$$

Вероятность P есть вероятность безотказной работы элемента. Эквивалентное напряжение по гипотезе энергии формоизменения [41] равно

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

В точках A и B эквивалентное напряжение соответственно равно

$$\sigma_3^{(A)} = \sqrt{a_1 P_1^2 + a_2 M^2}; \quad (9.56)$$

$$\sigma_3^{(B)} = \sqrt{(a_1 P_1 + a_3 P_2)^2 + a_4 M^2}, \quad (9.57)$$

$$\text{где } a_1 = (bh)^{-2}; a_2 = 3/(\alpha hb^2)^2; a_3 = \left(\frac{6l}{bh^2}\right)^2; a_4 = \frac{3\eta}{(\alpha hb^2)^2}.$$

Если $h > b$, то в точке A касательное напряжение τ_A больше, чем в точке B , и в зависимости от параметров стержня (l, b, h) и числовых значений P_1, P_2 и M максимальное эквивалентное напряжение в сечении может быть как в точке A , так и в точке B . Поэтому вероятность безотказной работы стержня будет равна наименьшей из вероятностей:

$$P[(\sigma_T - \sigma_3^{(A)}) > 0];$$

$$P[(\sigma_T - \sigma_3^{(B)}) > 0].$$

Основная трудность при определении вероятностей безотказной работы заключается в определении законов распределения $\sigma_3^{(A)}$ и $\sigma_3^{(B)}$ при нелинейной зависимости эквивалентных напряжений от внешней нагрузки.

Рассмотрим алгоритм приближенного решения этой задачи. Полагаем

$$P_1 = P_{10} + \Delta P_1, \quad P_2 = P_{20} + \Delta P_2, \quad M = M_0 + \Delta M,$$

где P_{10}, P_{20}, M_0 — математические ожидания случайных величин; $\Delta P_1, \Delta P_2$ и ΔM — случайные разбросы, которые подчиняются определенным законам распределения, например нормальным законам распределения (рис. 9.22) или законам распределения Релея (рис. 9.23).

Считаем, что $\Delta P_1, \Delta P_2$ и ΔM являются малыми (по сравнению с математическими ожиданиями) случайными величинами. Например, если случайные разбросы подчиняются нормальным законам распределения, то, воспользовавшись правилом «трех сигм», находим их максимальные значения (при нулевых математических ожиданиях):

$$\max \Delta P_1 = |3\sigma_{\Delta P_1}|; \quad \max \Delta P_2 = |3\sigma_{\Delta P_2}|; \quad \max \Delta M = |3\sigma_{\Delta M}|.$$

Поэтому, если $|\max \Delta P_j| \ll P_{0j} (j = 1, 2)$ и $|\max \Delta M| \ll M_0$, то случайные величины $\Delta P_j (j = 1, 2)$ и ΔM можно считать ма-

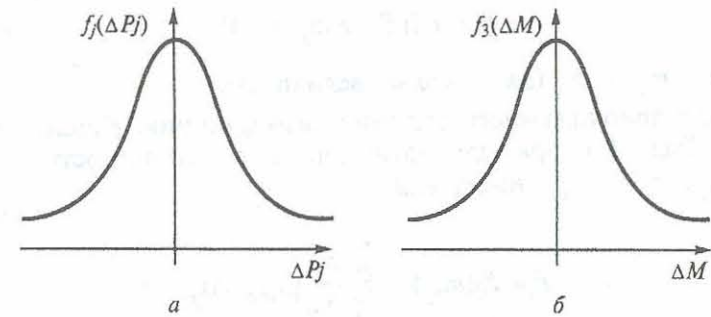


Рис. 9.22

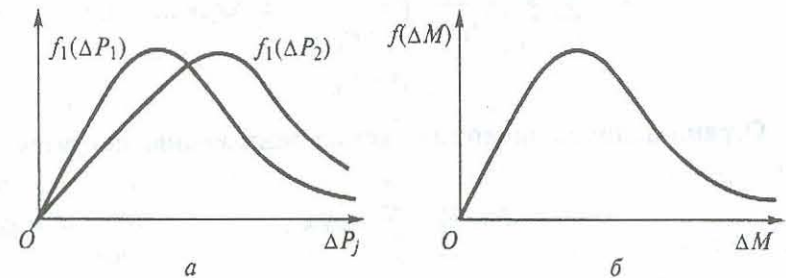


Рис. 9.23

лыми. Если случайные величины подчиняются законам распределения Релея, то максимальные значения находятся из условий

$$P = \int_0^{\max \Delta P_j} f(\Delta P_j) d\Delta P_j = 0,98. \quad (9.58)$$

Аналогично можно определить максимальные значения случайных разбросов и для других законов распределения, что необходимо для обоснования предположения о малости $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta M$ и для линеаризации нелинейных функций (9.56) и (9.57).

Рассмотрим общий случай, когда функция F зависит от конечного числа случайных величин x_j :

$$H = P[(S - F(x_j)) > 0], \quad (9.59)$$

где $x_j = m_{0j} + \Delta x_j$ (Δx_j — малые величины).

Для приближенного решения надо функцию F разложить в ряд. Ряд Тейлора для функции F в окрестности точки $F(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})$ имеет вид

$$F = F_0(m_{x_j}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \Big|_{x_j=m_{x_j}} \Delta x_j + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{x_j=m_{x_j}, x_i=m_{x_i}} \right) \Delta x_j \Delta x_i + \dots$$

Ограничившись линейной частью разложения, получаем

$$F = F_0 + \sum_{j=1}^n c_j \Delta x_j, \quad (9.60)$$

где

$$c_j = \frac{\partial F}{\partial x_j} \Big|_{x_j=m_{x_j}}.$$

Определим вероятностные характеристики случайной функции:

1) математическое ожидание F равно

$$m_F = F_0. \quad (9.61)$$

2) дисперсия случайной величины F (9.60) равна

$$D_F = M[F^2] = M\left[\left(\sum c_j \Delta x_j\right)^2\right] = \\ = \sum_{j=1}^n c_j^2 D_{x_j} + \sum_{j \neq i} c_j c_i k_{x_j x_i}. \quad (9.62)$$

Для независимых случайных величин Δx_j соответственно имеем

$$m_F = F_0; \\ D_F = \sum_{i=1}^n c_i^2 D_{x_i}. \quad (9.63)$$

В результате получаем

$$H = P[(S - F) > 0] = P[(S - (F_0 + \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i)) > 0]. \quad (9.64)$$

Для дальнейшего решения необходимо получить закон распределения случайной величины

$$Y = F_0 + \sum_{i=1}^n c_i \Delta X_i, \quad (9.65)$$

где ΔX_i — независимые случайные величины, законы распределения которых считаются известными.

Ограничимся случаем, когда законы распределения ΔX являются нормальными. Получим закон распределения $f(y)$, воспользовавшись характеристическими функциями. Характеристическая функция g_y случайной величины y равна (t — параметр)

$$g_y(t) = M[e^{itY}] = M[e^{it(F_0 + \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i)}] = \\ = e^{itF_0} M\left[\prod_{i=1}^n e^{itc_i \Delta x_i}\right] = e^{itF_0} \prod_{i=1}^n g_{\Delta x_i}(c_i t). \quad (9.66)$$

Характеристическая функция случайной величины $x_j = c_j \Delta x_j$, имеющей нормальное распределение, равна [13, 29]

$$g_{x_j}(t) = g_{\Delta x_j}(t) = e^{itm_{x_j} - \frac{t^2 \sigma_{x_j}^2}{2}} = e^{it(c_j m_{\Delta x_j}) - \frac{t^2 c_j^2 \sigma_{\Delta x_j}^2}{2}}.$$

Поэтому для характеристической функции $g_y(t)$ получаем

$$g_y(t) = e^{itF_0} \prod_{j=1}^n e^{it(c_j m_{\Delta x_j}) - \frac{t^2 c_j^2 \sigma_{\Delta x_j}^2}{2}} = e^{i(tF_0 + \sum_{j=1}^n c_j m_{\Delta x_j}) - t^2 (\sum_{j=1}^n c_j^2 \sigma_{\Delta x_j}^2)},$$

или

$$g_y(t) = e^{itm_y - \frac{t^2 \sigma_y^2}{2}}. \quad (9.67)$$

Можно показать, что характеристическая функция $g_y(t)$, соответствующая нормальному закону распределения [29]

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

равна

$$g_y(t) = e^{itm_y - \frac{t^2 \sigma_y^2}{2}}.$$

Функции $f(y)$ и $g_y(t)$ связаны преобразованием Фурье, поэтому характеристической функции (9.67) соответствует нормальный закон распределения

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (9.68)$$

где

$$m_y = F_0 + \sum_{i=1}^n c_j m_{\Delta x_i}; \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_{\Delta x_i}^2.$$

Для рассматриваемой задачи, например для точки B , после линеаризации эквивалентного напряжения получаем

$$Y = \sigma_3^{(B)} = \sigma_{30}^{(B)} + c_1 \Delta P_1 + c_2 \Delta P_2 + c_3 \Delta M, \quad (9.69)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(B)} &= \sqrt{(a_1 P_{10} + a_3 P_{20})^2 + a_4 M_0^2}; \\ c_1 &= \frac{\partial \sigma_3^{(B)}}{\partial P_1} = \frac{a_1(a_1 P_{10} + a_3 P_{20})}{\sqrt{(a_1 P_{10} + a_3 P_{20})^2 + a_4 M_0^2}}; \\ c_2 &= \frac{\partial \sigma_3^{(B)}}{\partial P_2} = \frac{a_3(a_1 P_{10} + a_3 P_{20})}{\sqrt{(a_1 P_{10} + a_3 P_{20})^2 + a_4 M_0^2}}; \\ c_3 &= \frac{\partial \sigma_3^{(B)}}{\partial M} = \frac{a_4 M_0}{\sqrt{(a_1 P_{10} + a_3 P_{20})^2 + a_4 M_0^2}}. \end{aligned}$$

При нормально распределенных ΔP_1 , ΔP_2 и ΔM закон распределения $f(\sigma_3^{(B)})$ (см. рис. 9.22) является нормальным:

$$f(\sigma_3^{(B)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\sigma_3^{(B)}}} e^{-\frac{(\sigma_3^{(B)} - m_{\sigma_3^{(B)}})^2}{2\sigma_{\sigma_3^{(B)}}^2}}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} m_{\sigma_3^{(B)}} &= \sigma_{30}^{(B)}; \\ \sigma_{\sigma_3^{(B)}}^2 &= c_1^2 \sigma_{\Delta P_1}^2 + c_2^2 \sigma_{\Delta P_2}^2 + c_3^2 \sigma_{\Delta M}^2. \end{aligned}$$

Поэтому закон распределения $f(z)$ случайной величины z , равной $z = S - F = \sigma_T - \sigma_3^{(B)}$, при нормальном законе распределения

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} e^{-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}},$$

где

$$m_z = m_{\sigma_T} - \sigma_{30}^{(B)};$$

$$\sigma_z^2 = c_1^2 \sigma_{\Delta P_1}^2 + c_2^2 \sigma_{\Delta P_2}^2 + c_3^2 \sigma_{\Delta M}^2 + \sigma_{\sigma_T}^2.$$

Вероятность безотказной работы

$$P[(\sigma_T - \sigma_{\text{эКВ}}) > 0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{m_z}{\sigma_z}} \int_{-\frac{m_z}{\sigma_z}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (9.70)$$

Рассмотрим случай, когда ΔP_1 , ΔP_2 имеют нормальные распределения (см. рис. 9.22, а), а ΔM имеет распределение Релея (см. рис. 9.23, б).

Требуется определить надежность (9.64) для случая, когда случайные величины, входящие в функцию $F(x_j)$

$$F(x_j) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + b, \quad (9.71)$$

имеют разные законы распределения. Например, x_j ($j = 1, 2 \dots n-1$) имеют нормальные законы распределения, а x_n имеет распределение Релея.

Представим (9.71) в виде

$$F(x_j) = y + c_n x_n = y + x_n^{(1)}, \quad (9.72)$$

где

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + b.$$

Воспользовавшись характеристическими функциями, получаем закон распределения $y + b$, который является нормальным законом распределения (9.68).

Затем находим композицию законов распределения $f(y)$ и $f_n(x_n^{(1)})$.

Введем случайную величину y_1 , равную

$$y_1 = y + x_n^{(1)}. \quad (9.73)$$

В соответствии с общим алгоритмом определения закона распределения суммы независимых случайных величин (9.23) — (9.26) имеем

$$f(y_1) = \int_0^{\infty} f_n(x_n^{(1)}) \left[\frac{d}{dy_1} \int_{-\infty}^{y_1 - x_n^{(1)}} f(y) dy \right] dx_n^{(1)}, \quad (9.74)$$

или

$$f(y_1) = \int_0^{\infty} f_n(x_n^{(1)}) f(y_1 - x_n^{(1)}) dx_n^{(1)}. \quad (9.75)$$

Пределы изменения y_1 от $-\infty$ до ∞ .

В результате получаем

$$H = P[(S - y_1) > 0].$$

Полагая $z = S - y_1$, находим закон распределения $f(z)$:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) f(s - z) ds. \quad (9.76)$$

Определив $f(z)$, находим надежность безотказной работы системы при действии независимых случайных возмущений, имеющих разные законы распределения:

$$H = \int_0^{\infty} f(z) dz. \quad (9.77)$$

Если интеграл в правой части (9.77) не табличный, то его можно приближенно определить численно. Для этого предварительно найти значения $f(z)$ в ряде дискретных точек (см. рис. 9.17), а затем, воспользовавшись сплайн-функциями, получить непрерывную функцию $f(z)$ на ограниченном интервале изменения z и численно определить H .

Глава 10. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПО МОДУЛЮ

При изложении теории случайных колебаний (см. гл. 6–8) считалось, что все необходимые сведения о случайных возмущениях (законы распределения или вероятностные характеристики случайных функций) известны, что позволило по известным вероятностным характеристикам входа получить вероятностные характеристики выхода.

Кроме того, необходимым условием применения методов теории случайных процессов является многократность осуществления случайного события в практически однородных условиях. Только при массовых событиях имеет смысл применение вероятностных методов исследования. Однако очень часто при исследовании конкретных задач динамики механических систем необходимая информация о случайных возмущениях или отсутствует, или же получение ее представляет собой задачу, несоизмеримо более сложную и трудоемкую, чем последующее решение уравнений движения.

Отсутствие необходимой информации о случайных силах усложняет решение прикладных задач, а вводимые допущения и предположения приводят к весьма приближенным и мало достоверным числовым результатам.

При решении задач о случайных колебаниях автомобиля при движении по дороге со случайными неровностями (см. гл. 6) считалось, что необходимые вероятностные характеристики неровностей дороги известны. Для получения этих вероятностных характеристик требуется очень большая экспериментальная работа, поэтому эти характеристики имеются только для ограниченного числа дорог. При проектировании конструкции (например, автомобиля) должны учитываться усло-

вия, в которых он будет эксплуатироваться. Только с учетом этих условий можно ставить задачу об оптимизации конструкции и о повышении его надежности. Когда внешние условия известны (например, известны вероятностные характеристики внешних сил, которые будут действовать на конструкцию), то, воспользовавшись методами теории случайных процессов, можно определить внутренние усилия (напряжения), возникающие в конструкции, по которым можно судить о ее возможной надежности. Но если вероятностные характеристики внешних возмущений неизвестны, то воспользоваться теорией случайных процессов нельзя [31, 32].

Надежность работы конструкции существенно зависит от того, насколько точно принятые в расчетах внешние возмущения или условия работы конструкции отражают реально действующие возмущения или условия работы. Для получения вероятностных характеристик случайных функций надо иметь большое число реализаций процесса, что может быть сопряжено с большими трудностями при проведении экспериментальных исследований или с большими материальными затратами. Поэтому возникает задача о методах оценки воздействия случайных возмущений на механическую систему при минимально возможной информации о случайных функциях, которую легко получить.

Наиболее простым при экспериментальном исследовании является определение допуска случайной величины или области возможных значений случайной функции. На рис. 10.1 показана область возможных значений случайной функции $f(t)$, когда экстремальные значения функции $f(t)$ равны по модулю и неизменны во времени. В дальнейшем случайную функцию, заданную областью возможных значений, будем называть *случайной функцией, ограниченной по модулю*. В общем случае граница области возможных значений функции $f(t)$ может меняться во времени

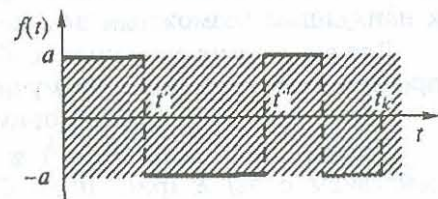


Рис. 10.1

(рис. 10.2). Так как информация о поведении функции $f(t)$ внутри области возможных значений отсутствует, мы вправе предположить, что оно может быть любым, т.е. класс функций, характеризующий возможное поведение случайной функции $f(t)$, включает в себя и класс кусочно-непрерывных функций

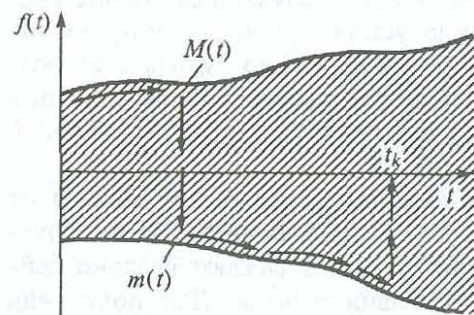


Рис. 10.2

с разрывами первого рода. Возможное разрывное поведение функции $f(t)$ во времени показано на рис. 10.1 и 10.2 штриховой линией. Физически разрывное поведение возмущения во времени означает, что оно является безынерционным. Реальные случайные возмущения обладают инерционностью, например случайная ветровая нагрузка не может

мгновенно изменить свое направление, что равносильно мгновенному изменению скорости ветра. Поэтому допущение о возможном разрывном поведении случайного возмущения является идеализацией реального поведения $f(t)$. В дальнейшем будет показано, что такая идеализация поведения $f(t)$ приводит к наихудшим возможным воздействиям на систему.

Для выяснения основных особенностей динамических задач при действии разрывных возмущений, ограниченных по модулю, рассмотрим следующий пример.

Пример 10.1. Тело массой m движется горизонтально под действием силы R (рис. 10.3). Сила R имеет разброс $\Delta R(t)$, причем $|\Delta R_{\max}| = a = \text{const}$ (т.е. $\Delta R(t)$ является случайной функцией, ограниченной по модулю, рис. 10.4). Силу R можно представить в виде

$$R(t) = R_0(t) \pm \Delta R(t), \quad (10.1)$$

где $R_0(t)$ — расчетное значение силы R .

Уравнение движения массы m (пренебрегая всеми другими силами, кроме R) запишем в виде

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} R. \quad (10.2)$$



Рис. 10.3

Требуется определить максимально возможные разбросы x и $\dot{x}$, которые может иметь тело в фиксированный момент времени t_k при действии случайной силы ΔR , заданной областью возможных значений. Смещение x можно представить в виде

$$x(t) = x_0(t) + \Delta x(t), \quad (10.3)$$

где x_0 — смещение, соответствующее расчетному значению R_0 ; $\Delta x(t)$ — возможный разброс смещения, вызванный случайной силой $\Delta R(t)$.

Уравнение возмущенного движения тела имеет вид

$$\Delta \ddot{x}(t) = \frac{1}{m} \Delta R. \quad (10.4)$$

Полагая

$$\Delta \dot{x} = x_1; \quad \Delta x = x_2, \quad (10.5)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(t); \\ \dot{x}_2 &= x_1, \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\text{где } f(t) = \frac{\Delta R}{m}.$$

Каждому возможному поведению $\Delta R(t)$ соответствуют определенные значения x_k и $\dot{x}_k$ в момент времени t_k . Так как время процесса и сила ΔR ограничены, то ограниченными будут Δx_1 и $\Delta \dot{x}_k$, поэтому, если воспользоваться фазовой плоскостью, то каждому возможному поведению $\Delta R(t)$ будут соответ-

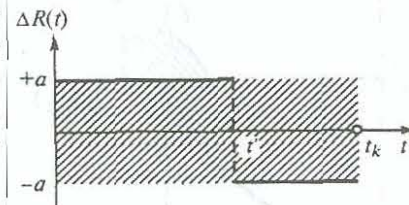


Рис. 10.4

ствовать точки плоскости $(\Delta x_k, \Delta \dot{x}_k)$, которые будут локализованы в ограниченной области фазовой плоскости.

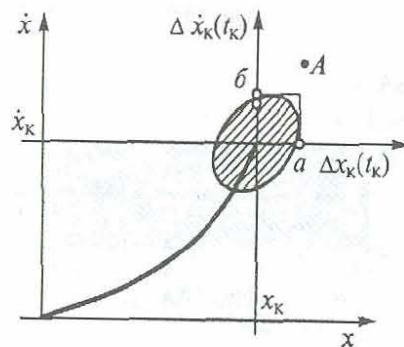


Рис. 10.5

На рис. 10.5 область возможных значений Δx_k и $\Delta \dot{x}_k$ заштрихована. Смещение x_k и скорость $\dot{x}_k$ соответствуют расчетному режиму движения тела в момент времени t_k . Из ограниченности области возможных значений следует, что имеется предельная кривая, охватывающая область возможных значений (методы определения области возможных значений решений уравнений движения системы будут изложены ниже).

Предельная кривая делит фазовую плоскость на две области: область значений Δx_k и $\Delta \dot{x}_k$, реализация которых возможна (заштрихованная область), и область значений Δx_k и $\Delta \dot{x}_k$, которые никогда (при данной области возможных значений ΔR) не реализуются, например значения Δx_k и $\Delta \dot{x}_k$, соответствующие точке A на рис. 10.5.

Знание области возможных значений Δx_k и $\Delta \dot{x}_k$ позволяет ответить на ряд практически важных вопросов, в частности: какие возможные максимальные значения Δx_k (точка a) и $\Delta \dot{x}_k$ (точка b) при самых неблагоприятных законах изменения $\Delta R(t)$; как размеры области зависят от параметров системы и как выбрать параметры системы, при которых область достигает минимальных размеров.

Найдем область возможных значений решения системы (10.6), которую (при нулевых начальных данных) можно представить в виде

$$x_1 = \int_0^{t_k} f(\tau) d\tau; \quad x_2 = \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} f d\tau = \int_0^{t_k} (t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (10.7)$$

Соотношения (10.7) не учитывают разрывное поведение $f(\tau)$, поэтому получим выражение для x_1 и x_2 с учетом возможного разрывного $f(t)$ на интервале времени $(0, t_k)$. Пусть, например, в момент времени t' ($t' < t_k$) функция $f(t)$ меняет знак (штриховая линия на рис. 10.4). Для определенности можно считать, что до t' она была равна $+a$, а после t' равна $-a$, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} a & 0 \leq t \leq t'; \\ -a & t' < t \leq t_k. \end{cases} \quad (10.8)$$

При таком изменении функции $f(t)$ получаем

$$x_1 = \int_0^{t'} a d\tau - \int_{t'}^{t_k} a d\tau, \quad x_2 = a \int_0^{t'} (t_k - \tau) d\tau - a \int_{t'}^{t_k} (t_k - \tau) d\tau, \quad (10.9)$$

или после интегрирования

$$x_1 = (2t' - t_k) a;$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} [(t_k - t')^2 - t_k^2] + \frac{a}{2} [-(t_k - t')^2]. \quad (10.10)$$

Возможно и несколько иное поведение функции f , а именно: от нуля до t' функция $f = -a$, а от t' до t_k $f = +a$. При таком законе изменения f знаки перед интегралами в правой части выражений (10.9) изменятся на обратные, т.е. возможны значения x_1 и x_2 с противоположными знаками. Область возможных значений x_1 и x_2 при $t = t'$ ограничивается кривыми (10.10), заданными в параметрическом виде. Если положить $t_k = 1$, то выражения для x_1 и x_2 будут иметь вид

$$x_1 = (2t' - 1) a; \quad x_2 = a \left(2t' - \frac{1}{2} - t'^2 \right) \text{ при } 0 \leq t' \leq 1. \quad (10.11)$$

Выражения (10.11) дают одну ветвь предельной кривой. Вторая ветвь будет симметричной (относительно начала координат), так как возможны значения x_1 и x_2 , равные по величине, но противоположные по знаку. На рис. 10.6 область возможных значений заштрихована, она занимает лишь часть площади,

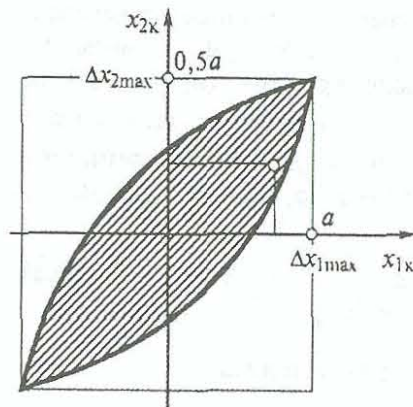


Рис. 10.6

$$f = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq \tau \leq t'; \\ -a & \text{при } t' < \tau < t''; \\ a & \text{при } t'' < \tau < t_k. \end{cases} \quad (10.12)$$

Выражения для x_1 и x_2 после интегрирования будут иметь вид (при $t_k = 1$):

$$\begin{aligned} x_1 &= (2t' - 2t'' + 1)a; \\ x_2 &= \frac{a}{2} [1 + 2(1 - t'')^2 - 2(1 - t')^2]. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Взяв два произвольных момента времени $t' = 0,4$; $t'' = 0,6$, из (10.13) получим x_1 и x_2 : $x_1 = 0,6a$; $x_2 = 0,3a$.

На рис. 10.6 показана эта точка, которая попала внутрь заштрихованной области, т.е. «хуже» не получилось. Взятый при построении области закон изменения функций (с одним разрывом) оказался наиболее неприятным. В дальнейшем будет показано, что, действительно, для данной системы уравнений наихудшим законом изменения функции является закон изменения с одним разрывом. В этом частном примере возможен такой закон изменения функции f ($f = \text{const}$) на всем интервале времени, при котором достигается совместный максимум функций x_1 и x_2 при $t = t_k$ (причем возможны совместные максимумы только одного знака). Что произойдет с областью,

построенной на максимальных значениях x_1 и x_2 , если функция f на интервале $(0, t_k)$ имела один разрыв. Какие значения примут функции x_1 и x_2 , если функция f будет иметь два или больше разрывов? Может быть, в этом случае получим точку на плоскости (x_1, x_2) , лежащую за пределами заштрихованной области. Рассмотрим случай, когда функция f имеет два разрыва в моменты t' и t'' ($t'' > t'$):

если функция будет меняться в более широких пределах, скажем, внутри полосы, ограниченной прямыми $\pm 2a$ (а не $\pm a$, как в примере)?

Из выражения (10.13) легко установить, что функции x_1 и x_2 были бы в два раза больше, т.е. область стала бы больше, но ее форма и положение внутри прямоугольной области не изменились бы. Подобное увеличение или уменьшение допуска на возмущение функции приводит к подобному изменению области возможных значений решений системы дифференциальных уравнений. В рассмотренном примере область возможных значений x_1 и x_2 получилась симметричной относительно начала координат, что, однако, не всегда имеет место. Положение области возможных значений решений системы (для рассматриваемого примера это функции x_1 и x_2) зависит от границ возможных возмущений (функции f в данном примере). Построим область возможных значений x_1 и x_2 для функции f , заданной внутри полосы на рис. 10.7.

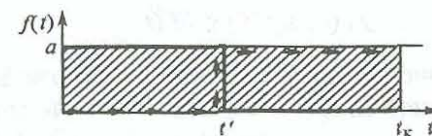


Рис. 10.7

Рассмотрим сначала случай изменения функции f , показанной на рис. 10.7 сплошной линией. В этом случае функция f задана в виде

$$f = \begin{cases} a & \text{при } 0 \leq \tau \leq t'; \\ 0 & \text{при } t' \leq \tau \leq t_k. \end{cases} \quad (10.14)$$

После вычислений получим при $t_k = 1$

$$x_1 = t'a; \quad x_2 = \frac{a}{2} [2t' - t'^2]. \quad (10.15)$$

При изменении функции f

$$f = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \tau \leq t'; \\ a & \text{при } t' \leq \tau \leq t_k \end{cases}$$

x_1 и x_2 имеют вид

$$x_1 = 1 - t'; \quad x_2 = \frac{1}{2} (1 - t')^2. \quad (10.16)$$

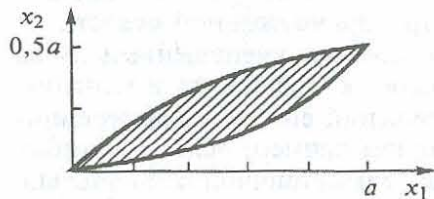


Рис. 10.8

Системы (10.15) и (10.16) определяют уравнение предельной кривой (две ветви). Соответствующая область показана на рис. 10.8. В рассмотренных примерах границы области, внутри которой изменялась функция f , были постоянными во времени. Аналогичным образом

может быть определена область и для случая, когда границы области зависят от времени t , как, например, показано на рис. 10.2, т.е.

$$m(t) \leq f(t) \leq M(t). \quad (10.17)$$

В общем случае на систему могут действовать и несколько случайных возмущений $f_k(t)$, ограниченных по модулю и удовлетворяющих условиям

$$m_i(t) \leq f_i(t) \leq M_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (10.18)$$

где $m_i(t)$, $M_i(t)$ — известные функции времени, являющиеся нижней и верхней границами области возможных значений, внутри которой функция f_i может принимать любые значения.

Предельные значения функции f_i (m_i и M_i) могут быть и не зависящими от времени t . Множество функций, удовлетворяющих условиям (10.18), включает в себя и детерминированные функции, изменяющиеся во времени по известным законам, оставаясь внутри области возможных значений. Среди удовлетворяющих условию (10.18) могут быть и функции, сохраняющие постоянные случайные значения в течение всего процесса, например случайные начальные данные. Для случайных функций, сохраняющих постоянное числовое значение в течение процесса, введем обозначение f_i^0 . Функции f_i^0 могут принимать любое значение внутри интервала:

$$m_i^0 \leq f_i^0 \leq M_i^0. \quad (10.19)$$

Ограничения типа (10.18) или (10.19) на возмущения имеют вполне определенный физический смысл, характеризуя предельно возможные отклонения возмущений, которые могут быть в данной системе. В технических задачах, где возмущения f_i характеризуют разбросы сил или параметров системы, допуски на отклонения этих величин от их номинальных значений могут быть установлены достаточно точно.

Случайные функции f_i и случайные величины f_i^0 , удовлетворяющие условиям соответственно (10.18) и (10.19), являются независимыми. Например, если на систему действуют две случайные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, удовлетворяющие условиям (10.18), то в любой момент времени их возможные значения находятся внутри прямоугольной области (рис. 10.9). В этом случае компоненты вектора возмущений являются независимыми.

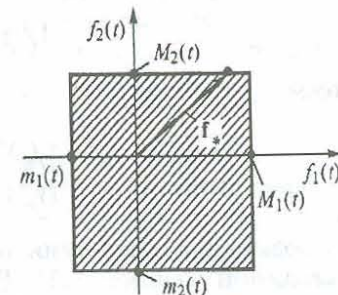


Рис. 10.9

Наряду с независимыми случайными возмущениями возможны и зависимые случайные возмущения, ограниченные по модулю. Рассмотрим в качестве примера массу m (рис. 10.10), на которую действует сила f , случайная по направлению (угол α случайный) и ограниченная по модулю $|f| \leq a$. Масса находится на безынерционном упругом стержне. Ограничимся

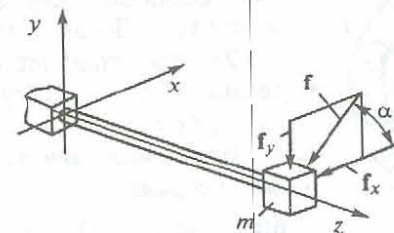


Рис. 10.10

выводом условия, которому должны удовлетворять проекции силы $\mathbf{f}$ на оси X, Y . В уравнение движения массы m в проекциях на оси X и Y войдут проекции силы f, f_x и f_y , равные

$$f_x = f \cos \alpha; \quad f_y = f \sin \alpha. \quad (10.20)$$

Из (10.20) можно получить соотношение

$$f_x^2 + f_y^2 = f^2,$$

но так как f ограничена по модулю

$$|f(t)| \leq a = f_m,$$

имеем

$$\left(\frac{f_x}{f_m}\right)^2 + \left(\frac{f_y}{f_m}\right)^2 \leq 1, \quad (10.21)$$

т.е. возможные значения возмущений ограничены областью, показанной на рис. 10.11. В более общем случае сила f может иметь и проекцию на ось Z , поэтому соотношение (10.21) принимает вид

$$\left(\frac{f_x}{f_m}\right)^2 + \left(\frac{f_y}{f_m}\right)^2 + \left(\frac{f_z}{f_m}\right)^2 \leq 1. \quad (10.22)$$

Условие (10.22) можно записать в более общем виде:

$$(C \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) \leq 1, \quad (10.23)$$

где C — определенно положительная, самосопряженная квадратная матрица. Левая часть условия (10.23) представляет собой определенно положительную квадратичную форму.

Возможны два типа случайных возмущений $f_i(t)$, удовлетворяющих (10.23): а) $f_i(t)$ не зависит от времени, т.е. это возмущения типа

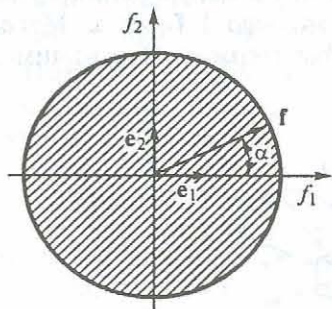


Рис. 10.11

f_i^0 ; б) случайные возмущения $f_i(t)$ можно представить в виде $f_i = h_i(t)f_i^0$, где $h_i(t)$ — известные функции, зависящие от времени. В случае б) случайные возмущения f_i , удовлетворяющие (10.23), изменяются во времени.

Основная задача, связанная с исследованием нестационарных колебаний механической системы при действии возмущений, удовлетворяющих ограничениям (10.18) или (10.19) и (10.23), может быть сформулирована следующим образом. Требуется определить область возможных значений вектора $\mathbf{y}$, характеризующего возмущенное состояние системы в фиксированный момент времени t_k , если компоненты вектора возмущений являются случайными функциями, удовлетворяющими условиям (10.18) или (10.19) и (10.23).

Частными случаями сформулированной задачи являются: задача определения проекции n -й области возможных значений вектора состояния системы при нестационарных колебаниях на двумерные плоскости (области, аналогичные приведенной на рис. 10.6) и задача определения максимально возможных значений каждой из компонент y_i вектора состояния ($\mathbf{y}$ в фиксированный момент времени).

§ 10.1. Определение максимальных значений компонент вектора состояния систем

Рассмотрим векторное уравнение движения системы вида

$$\dot{\mathbf{y}} + A(t)\mathbf{y} = B(t)\mathbf{f}(t). \quad (10.24)$$

Решение уравнения (10.24) при ненулевых начальных данных имеет вид

$$\mathbf{y} = K(t_k)\mathbf{y}_0 + \int_0^{t_k} G(t_k, t) B(t) \mathbf{f}(t) dt. \quad (10.25)$$

Компонентами вектора начальных данных $\mathbf{y}_0$ являются случайные числа, удовлетворяющие условиям (считая, что y_{0j} заданы областями возможных значений)

$$(y_{0j})_{\min} \leq y_{0j} \leq (y_{0j})_{\max}, \quad (10.26)$$

где $(y_{0j})_{\min}$ и $(y_{0j})_{\max}$ — известные значения.

Вначале рассмотрим случай, когда компоненты вектора $\mathbf{f}$ независимы, т.е. удовлетворяют условиям (10.18)

$$m_i(t) \leq f_i(t) \leq M_i(t).$$

В скалярной форме записи m -я компонента вектора

$$y_m(t_k) = \sum_{j=1}^n k_{mj} y_{0j} + \sum_{v=1}^p \int_0^{t_k} d_{mv} f_v dt, \quad (10.27)$$

где p — число компонент вектора $\mathbf{f}$, которое может быть и не равным n ; d_{mv} — элементы матрицы $D = G(\tau) B(\tau)$.

Максимальное значение y

$$\max(y_m) = \sum_{j=1}^n \max(k_{mj} y_{0j}) + \sum_{v=1}^p \max \int_0^k d_{mv} f_v dt. \quad (10.28)$$

Максимальные значения слагаемых, зависящих от компонент вектора начальных данных, достигаются при следующих значениях:

$$y_{0j} = \begin{cases} y_{0j \max} & \text{при } k_{mj} > 0; \\ y_{0j \min} & \text{при } k_{mj} < 0. \end{cases} \quad (10.29)$$

Максимальные значения интегралов, зависящих от f_v , соответствуют следующим законам изменения возмущений $f_v(\tau)$: $f_v(\tau) = M_v(\tau)$ на интервалах времени τ , где $d_{mv}(\tau) > 0$, и $f_v(\tau) = m_v(\tau)$ на интервалах времени τ , где $d_{mv}(\tau) < 0$, т.е.

$$f_v = \begin{cases} M_v & \text{при } d_{mv} > 0; \\ m_v & \text{при } d_{mv} < 0. \end{cases} \quad (10.30)$$

Например, если τ_j — значения времени, где функции d_{mv} меняют знак, то максимальные значения интегралов, входящих в правую часть (10.27) (для определенности полагаем, что на первом интервале от 0 до $\tau^{(v)}$ $d_{mv} > 0$),

$$\max \int_0^{t_k} d_{mv} f_v dt = \int_0^{\tau_1^{(v)}} d_{mv} M_v dt + \int_{\tau_1^{(v)}}^{\tau_2^{(v)}} d_{mv} m_v dt + \dots \quad (10.31)$$

В частном случае, когда $|y_{0j \min}| = |y_{0j \max}| = a_j$; $|m_j| = |M_j| = b_j$, максимальное значение компоненты y_m

$$\max(y_m) = \sum_{j=1}^n |k_{mj}| a_j + \sum_{j=1}^k b_j \int_0^{t_k} |d_{mj}| dt. \quad (10.32)$$

В результате определяем максимально возможные значения каждой из компонент y_m (10.28) вектора состояния системы в фиксированный момент времени, например в момент времени, соответствующий потере контакта между ракетой и направляющей (см. рис. В1).

Изложенный метод позволяет определить не только максимально возможные значения компонент вектора состояния системы, но и соответствующие наихудшие законы изменения во времени случайных возмущений, ограниченных по модулю. Наихудшие законы изменения возмущений f_i во времени, способствующие максимальным значениям каждой из компонент y_m вектора состояния, различны, т.е. при одной реализации процесса эти законы осуществиться не могут. Знание максимально возможных величин компонент вектора состояния системы весьма полезно, так как эти значения гарантированные.

§ 10.2. Области возможных значений вектора состояния системы при действии независимых возмущений

В зависимости от изменения во времени компонент вектора $\mathbf{f}$ будет изменяться модуль и направление вектора состояния $\mathbf{y}$. В силу ограниченности компонент векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{y}_0$ и условий (10.18) и (10.19) будет ограниченным и вектор $\mathbf{y}$ при конечном интервале времени t_k (рис. 10.12). Поэтому все точки n -мерного фазового пространства можно разбить на два множества: множество точек, которые могут быть достигнуты вектором $\mathbf{y}$ при всевозможных изменениях вектора $\mathbf{f}$, и множество точек, которых вектор $\mathbf{y}$ достичь не может.

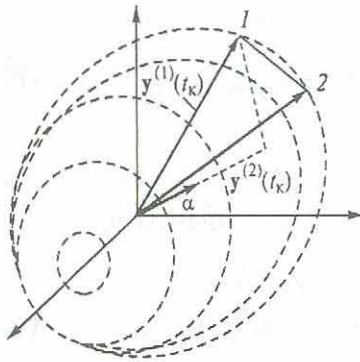


Рис. 10.12

Предположим, что известны максимальные значения проекции вектора y на направления, определяемые единичным вектором α . Проводя из концов этих проекций при разных α перпендикулярно к ним гиперплоскости, получим некоторую замкнутую область, заключенную внутри плоскостей. Так как единичный вектор α зависит от $n-1$ параметров (проекций на координатные оси), мы получа-

ем $n-1$ параметрическое семейство гиперплоскостей. Описанный выше геометрический метод получения области существенным образом связан с предположением о «выпуклости» области, т.е. если какие-либо две точки принадлежат границе области, то все точки отрезка прямой, соединяющего эти две точки, принадлежат области. Например, если вектор $f^{(1)}$ определяет точку 1 (точка 1 соответствует вектору состояния $y^{(1)}$, получающегося в результате действия вектора $f^{(1)}$, а вектор $f^{(2)}$ — точку 2 (вектор $y^{(2)}$), то вектор

$$f = \lambda f^{(1)} + (1 - \lambda) f^{(2)} \quad (10.33)$$

при изменении λ от 0 до 1 определяет все точки отрезка прямой, соединяющего точки 1 и 2. Вектор состояния системы при взятом f может быть представлен в виде

$$y = \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda) y^{(2)}, \quad (10.34)$$

и при непрерывном изменении λ от 0 до 1 вектор y «пробежит» все точки прямой, соединяющей концы векторов $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$. Это свидетельствует о том, что все векторы y (при $0 \leq \lambda \leq 1$) лежат внутри области возможных значений, т.е. область является выпуклой.

Определив максимальные значения проекции вектора y для каждого направления вектора α , можно перейти к определению предельной поверхности. Проекция вектора y на направление,

определяемое единичным вектором α , с компонентами $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ запишется следующим образом (рис. 10.12):

$$y_{\text{пр } \alpha} = (y \cdot \alpha), \quad (10.35)$$

или

$$y_{\text{пр } \alpha} = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i. \quad (10.36)$$

После подстановки в условие (10.36) выражений для y_m (10.27) получим

$$y_{\text{пр } \alpha} = \sum_{j=1}^n r_j y_{0j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_k} q_j(t_k, \tau) f_j d\tau, \quad (10.37)$$

где

$$r_j = \sum_{i=1}^n k_{ij} \alpha_i; \quad (10.38)$$

$$q_j(t_k, \tau) = \sum_{i=1}^n d_{ij} \alpha_i. \quad (10.39)$$

Среди компонент вектора f могут быть и возмущения, не изменяющиеся во времени (f_i^0), поэтому представим выражение (10.37) явно зависящим от f_i и f_v^0 :

$$y_{\text{пр } \alpha} = \sum_{j=1}^n r_j y_{0j} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_k} q_j(t_k, \tau) f_j d\tau + \sum_{v=1}^k Q_v^0 f_v^0, \quad (10.40)$$

где

$$Q_v^0 = \int_0^{t_k} q_v(t_k, \tau) d\tau \quad (\rho + k = n).$$

Задача определения области возможных значений вектора возмущенного состояния системы y свелась к определению максимально возможного значения выражения (10.40) при ограничениях, которым должны удовлетворять функции y_j, f_j и f_v^0 , максимизирующие выражение (10.40), причем функции f_j принадлежат замкнутому множеству. Это условие означает, что для них допустимы и предельные значения, т.е. f_j может быть равным на некотором интервале времени (t_1, t_2) своим предельным значениям, например,

$$\begin{aligned} f_j &= m_j(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2); \\ f_j &= M_j(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \end{aligned} \quad (10.41)$$

Покажем, что экстремальные значения векторов $y(t_k)$ (см. рис. 10.12), образующих предельную поверхность, достигаются на классе разрывных функций f_j , удовлетворяющих условиям (10.18). Определим максимальное значение каждой из сумм, входящих в правую часть выражения (10.40) отдельно. Найдем максимальное значение первой суммы

$$\sum_{j=1}^n r_j(t_k) y_{j0} \quad (10.42)$$

при выполнении условий $y_{im} \leq y_{j0} \leq y_{jM}$, где y_{jm}, y_{jM} — соответственно минимальное и максимальное возможные значения y_{j0} . Максимальное значение сумма (10.42) принимает, если y_{j0} равны y_{jM} при $r_j(t_k) > 0$ или y_{j0} равны y_{jm} при $r_j < 0$.

Максимальное значение второй суммы в (10.40) получим, взяв $f_j(\tau)$ по верхней границе полосы в интервалах изменения τ , где $q_j(t_k, \tau) > 0$, и по нижней границе, где $q_j(t_k, \tau) < 0$, т.е. экстремальное значение суммы

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{t_k} q_j(t_k, \tau) f_j d\tau$$

достигается на функциях вида (разрывных функциях)

$$f_j = \begin{cases} M_j(\tau), & \text{если } q_j > 0; \\ m_j(\tau), & \text{если } q_j < 0, \end{cases} \quad (10.43)$$

что и требовалось доказать (так как законы изменения f_j , дающие экстремум скалярному произведению (y, α) , определяют и экстремальные значения вектора $y(t_k)$).

Для определения точек разрыва функции f_j найдем τ_{jk} , где $q_j(t_k, \tau)$ меняет знак. Для определения τ_{jk} имеем уравнение

$$q_j(t_k, \tau) = 0.$$

Зная τ_{jk} , определяем законы изменения $f_j(\tau)$, дающие максимум соответствующему слагаемому в выражении (10.40). Максимальное значение третьей суммы получим, приняв f_v^0 равным максимальному значению при $Q_v^0 > 0$ и минимальному значению при $Q_v^0 < 0$. Таким образом, для каждого направления α определяются такие значения y_{j0}, f_v^0 и функции f_j , при которых проекция вектора $y(t_k)$ на это направление принимает максимальное значение. Зная y_{j0}, f_v^0 и f_j , по формуле (10.40) определим проекцию y на направление α . Компоненты вектора $y(t_k)$ равны

$$y_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} y_{j0} + \sum_{j=1}^n \int_0^{t_k} d_{ij} f_j d\tau + \sum_{v=1}^k V_{iv} f_v^0, \quad (10.44)$$

где

$$V_{iv} = \int_0^{t_k} d_{iv} d\tau.$$

Интеграл $\int_0^{t_k} d_{iv} f_j d\tau$ с учетом закона изменения функции f_j может быть вычислен через первообразные функции

$$F_{ij}^M(\tau_j) = \int_0^{t_k} Q_{ij} M_j d\tau_j; \quad (10.45)$$

$$F_{ij}^m(\tau_j) = \int_0^{t_k} Q_{ij} m_j d\tau_j.$$

Предположим, что функции f_j имеют точки разрыва τ_{jk} . Тогда

$$\int_0^{t_k} Q_{ij} f_j d\tau = F_{ij}^M(\tau_{j1}) + [F_{ij}^m(\tau_{j2}) - F_{ij}^m(\tau_{j1})] + \dots, \quad (10.46)$$

если $q_j(t_k, \tau) > 0$ при $0 \leq \tau < \tau_{j1}$,

$$\text{и} \quad \int_0^{t_k} Q_{ij} f_j d\tau = F_{ij}^m(\tau_{j1}) + [F_{ij}^M(\tau_{j2}) - F_{ij}^M(\tau_{j1})] + \dots, \quad (10.47)$$

если $q_j(t_k, \tau) < 0$ при $0 \leq \tau \leq \tau_{j1}$.

Рассмотрим частный случай, когда границы области возможных значений случайных возмущений f_j постоянны во времени:

$$|f_j| \leq a_j. \quad (10.48)$$

Для этого класса возмущений максимальное значение второго слагаемого в выражении (10.41) будет равно

$$\sum_{j=1}^p a_j \int_0^{t_k} |q_j(t_k, \tau)| d\tau. \quad (10.49)$$

Несмотря на исходные линейные уравнения, задача, связанная с определением области возможных отклонений решений системы в фиксированный момент времени, является нелинейной, так как наихудшие воздействия возмущений (моменты времени переброса возмущений с одной граничной кри-

вой области возможных значений на другую) происходят не в заданные извне моменты времени, а в моменты, зависящие от свойств самой системы. Область возможных отклонений сохраняет свою конфигурацию (в смысле подобия) при пропорциональном изменении всех возмущений. При подобном изменении возмущений имеем

$$f_1 = \beta f; \quad f_1^0 = \beta f^0, \quad (10.50)$$

где β — скалярный множитель.

Соответственно изменяются и условия (10.18) и (10.19), которые примут вид

$$\beta m_i \leq f_{i1} \leq \beta M_i; \quad \beta m_i^0 \leq f_{i0}^0 \leq \beta M_i^0.$$

Вследствие линейной зависимости решения уравнения (10.25) от вектора возмущений f^0 в β раз изменяются и компоненты вектора $y(t_k)$, определяющие предельную поверхность, т.е. пропорциональное изменение векторов f и f^0 приводит к подобному изменению области возможных отклонений.

Пример 10.2. Динамически устойчивое движение ракеты может сопровождаться малыми колебаниями ее на траектории, которые вызываются разбросом тяги двигателя, линейным и угловым эксцентриситетами тяги и рядом других факторов. Уравнение малых угловых колебаний ракеты (рис. 10.13) по углу тангажа при этом имеет вид

$$J_\sigma \ddot{\phi} + a\phi = M_B, \quad (10.51)$$

где J_σ — момент инерции ракеты относительно оси, проходящей через центр тяжести (перпендикулярно плоскости чертежа); M_B — случайный возмущающий момент (вызываемый, в частности, газодинамическими эксцентриситетами тяги), значение которого обычно известно в виде некоторого разброса (рис. 10.14), имеющего границы $\pm b$; $a\phi$ —

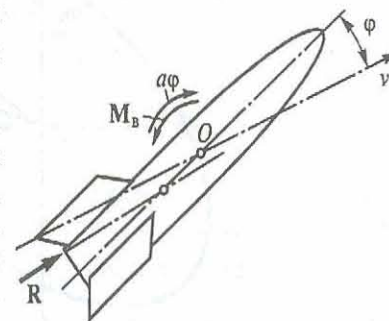


Рис. 10.13

восстанавливающий момент. Требуется определить область возможных значений угла $\dot{\varphi}$ и угловой скорости φ (область на фазовой плоскости $(\dot{\varphi}, \varphi)$) в момент времени $t_k = 5$ с. При решении задачи считаем, что при $t = 0$ $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, $J_0 = 10^4$ кг $\cdot$ м², $a = 1,6 \cdot 10^4$ Н $\cdot$ м, $|b| = 200$ Н $\cdot$ м.

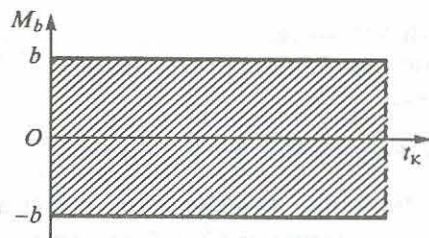


Рис. 10.14

Решение уравнения (10.51) в момент времени t_k можно представить в виде вектора Φ_k на фазовой плоскости $\dot{\varphi} O \varphi$ (рис. 10.15). Каждому закону изменения возмущающего момента M_b соответствует вектор решения Φ_k ($\Phi_k = (\dot{\varphi}_k, \varphi_k)^T$).

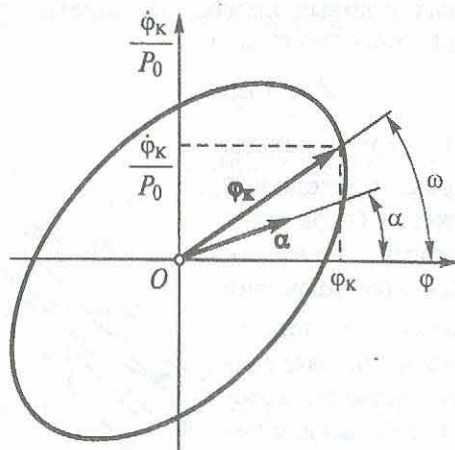


Рис. 10.15

Имеется такой закон изменения момента M_k , при котором модуль вектора Φ_k , направленного под углом ω к оси φ , достигает своего наибольшего значения (см. рис. 10.15). Если изменять значение угла α в пределах $0 \dots 2\pi$ и для каждого промежуточного значения α определить $|\Phi|_{\max}$, то конец вектора Φ_k опишет по фазовой плоскости некоторую замкнутую кривую — границу области возможных значений.

Найдем максимально возможные значения φ_k и $\dot{\varphi}_k$:

$$\varphi_k = \frac{1}{J_0 p_0} \int_0^{t_k} \sin p_0 (t_k - \tau) M_b d\tau; \quad \dot{\varphi}_k = \frac{1}{J_0} \int_0^{t_k} \cos p_0 (t_k - \tau) M_b d\tau. \quad (10.52)$$

Так как $|M_b| \leq b$, то

$$\varphi_{k \max} = \frac{b}{J_0 p_0} \int_0^{t_k} |\sin p_0 (t_k - \tau)| d\tau \quad \left(p_0 = \sqrt{\frac{a}{J_0}} \right);$$

$$\dot{\varphi}_{k \max} = \frac{b}{J_0} \int_0^{t_k} |\cos p_0 (t_k - \tau)| d\tau. \quad (10.53)$$

Для определения границ области возможных решений спроецируем вектор Φ_k на прямую, определяемую единичным вектором α :

$$\varphi_\alpha = (\Phi_k \cdot \alpha) = (\varphi_k \cos \alpha + \frac{\dot{\varphi}_k}{p_0} \sin \alpha). \quad (10.54)$$

Определив максимальное значение проекции вектора решения φ_α для фиксированного значения угла α и закон изменения M_b , соответствующий $\varphi_{\alpha \max}$, находим значения компонент вектора Φ_k , т.е. значения φ_k и $\dot{\varphi}_k$, которые являются координатами одной из точек границы области возможных значений реше-

ний. Так как решение уравнения (10.51) φ_k имеет вид (10.52), то для проекции вектора φ_k (10.54) получаем

$$\varphi_k = \frac{1}{J_0 p_0} \int_0^{t_k} \sin p_0 (t_k - \theta + \alpha) M_b d\theta. \quad (10.55)$$

Например, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$ выражение (10.55) принимает вид

$$\varphi_a = \frac{1}{J_0 p_0} \int_0^{t_k} \sin \left[p_0 (t_k - \tau) + \frac{\pi}{6} \right] M_b d\tau.$$

Полагая $\sin \left[p_0 (t_k - \tau) + \frac{\pi}{6} \right] = 0$, находим τ_i — моменты изменения знака M_b .

Учитывая, что $p_0 \approx 0,4\pi$, при $t_k = 5$ с получаем $\tau_1 = 0,42$ с; $\tau_2 = 2,9$ с.

Следовательно, закон изменения момента M_b , при котором φ_k достигает максимального значения в момент t_k , имеет вид

$$M_b = \begin{cases} +b & \text{при } 0 \leq \tau \leq 0,42; \\ -b & \text{при } 0,42 \leq \tau \leq 2,9; \\ +b & \text{при } 2,9 \leq \tau \leq 5,0. \end{cases}$$

Вычислим значение φ_k для полученного закона изменения момента M_b :

$$\varphi_k = \frac{b}{J_0 p_0} \left[\int_0^{0,42} \sin p_0 (t_k - \tau) d\tau - \int_{0,42}^{2,9} \sin p_0 (t_k - \tau) d\tau + \int_{2,9}^5 \sin p_0 (t_k - \tau) d\tau \right] = 3,494 \frac{b}{J_0 p_0^2}.$$

Аналогично находим $\dot{\varphi}_k$ для $\alpha = \frac{\pi}{6}$:

$$\dot{\varphi}_k = 1,94 \frac{b}{J_0 p_0^2}.$$

Произведя подобные вычисления для различных значений угла α , получим следующие данные:

$\alpha \dots$	0	30°	60°	90°
$\varphi_k \dots$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	0
$\dot{\varphi}_k / p_0 \dots$	0	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$

Область возможных значений решений в безразмерных координатах, построенная в соответствии с приведенными данными, показана на рис. 10.16.

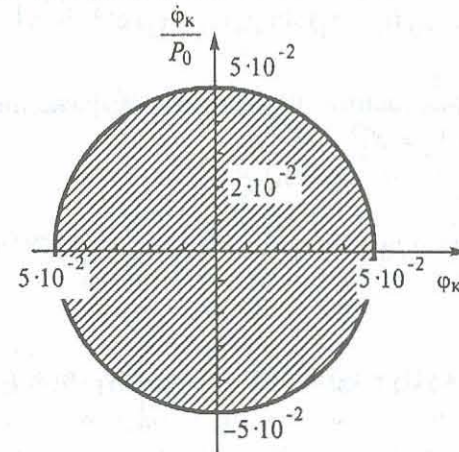


Рис. 10.16

Рассмотрим задачу 10.2, воспользовавшись теорией случайных процессов. Для этого имеющуюся информацию о случайном моменте (поле возможных значений) дополним вероятностными характеристиками M_b , связав их с принятым ограничением на M_b ($|M_b| < b$). Предположим, что M_b является стационарной случайной функцией с неизменным во времени нормальным законом распределения (рис. 10.17) и корреляционной функцией в виде

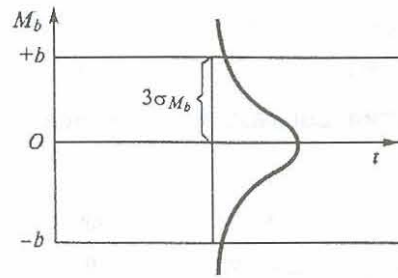


Рис. 10.17

Естественно принять, что максимально возможные значения M_b связаны с дисперсией σ_M соотношением (правило трех сигм) $b = 3\sigma_M$, следовательно, $D_M = b^2/9$.

Ограничившись только углом φ , запишем выражение для корреляционной функции решения уравнения (10.51) (см. гл. 5):

$$K_\varphi = \frac{D_M}{J_0^2 p_0^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \sin p_0(t_1 - \tau_1) \sin p_0(t_2 - \tau_2) e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|} d\tau_1 d\tau_2. \quad (10.56)$$

Для интегрирования представим выражение (10.56) без знака модуля ($K_\varphi = K_\varphi^{(')} + K_\varphi^{('')}$):

$$K_\varphi^{(')} = \frac{D_M}{J_0^2 p_0^2} \int_0^{t_1} \sin p_0(t_1 - \tau_1) \left[\int_0^{\tau_1} \sin p_0(t_2 - \tau_2) e^{-\alpha(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_2 + \int_{\tau_1}^{t_2} \sin p_0(t_2 - \tau_2) e^{-\alpha(\tau_2 - \tau_1)} d\tau_2 \right] d\tau_1 \quad \text{при } t_2 > t_1; \quad (10.57)$$

$$K_\varphi^{(')} = \frac{D_M}{J_0^2 p_0^2} \int_0^{t_2} \sin p_0(t_2 - \tau_2) \left[\int_0^{\tau_2} \sin p_0(t_1 - \tau_1) e^{-\alpha(\tau_2 - \tau_1)} d\tau_1 + \int_{\tau_2}^{t_1} \sin p_0(t_1 - \tau_1) e^{-\alpha(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_1 \right] d\tau_2 \quad \text{при } t_1 > t_2. \quad (10.58)$$

После интегрирования и преобразований получаем выражение для дисперсии решения:

$$D_\varphi = \frac{D_M}{\alpha^2 + p_0^2} \left\{ \alpha t_k - \frac{\alpha}{2p_0} \sin 2p_0 t_k + \frac{1}{\alpha^2 + p_0^2} \left[p_0^2 - 2p_0 e^{-\alpha t_k} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\alpha \sin p_0 t_k + p_0 \sin p_0 t_k) + (p_0 \cos^2 p_0 t_k - \alpha^2 \sin^2 p_0 t_k) \right] \right\} \frac{1}{J_0^2 p_0^2}. \quad (10.59)$$

После вычислений получаем среднее квадратическое значение угла φ :

$$\sigma_\varphi = 0,59 \frac{b}{J_0 p_0^2}. \quad (10.60)$$

Считая, что для угла φ справедливо нормальное распределение, имеем

$$\varphi_{\max} = 3\sigma_\varphi = 1,77 \frac{b}{J_0 p_0^2} = 2,2 \cdot 10^{-5}, \quad (10.61)$$

что приблизительно в два раза меньше значения для $\varphi_{\max}$ в таблице при $\alpha = 0$. Изложенный метод с использованием разрывных случайных функций, ограниченных по модулю, дает более высокие значения максимальных отклонений систем от невозмущенного режима, так как наихудший закон изменения возмущения M_b , если его оценивать с вероятностных позиций, является мало вероятным. Полученное значение $\varphi_{\max}$ (10.61) по корреляционной теории имеет смысл как характеристика процесса только в том случае, если имеется массовая реализация, т.е., например, оценивается в среднем возмущенное движение большого числа ракет. Естественно, что средние характеристики процесса (например, максимальные значения угла $\varphi = 3\sigma_\varphi$) меньше значений $\varphi_{\max}$ (10.53) для отдельных ракет. Если же имеется одна или две реализации процесса, то средние характеристики не имеют смысла, так как при таком малом числе реализаций выявить статистические свойства данного процесса нельзя. Значение $\varphi_{\max}$, найденное с использованием разрывных случайных функций, ограниченных по модулю, является гарантированным.

§ 10.3. Проекция области возможных значений вектора состояния системы на двумерные плоскости

Для системы уравнений n -го порядка область возможных значений является тоже n -мерной. При практических расчетах часто бывает достаточно знать область возможных значений двух компонент вектора состояния системы, т.е. знать

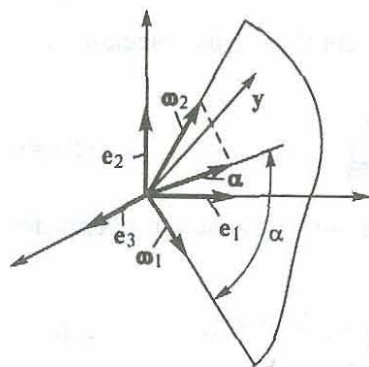


Рис. 10.18

проекцию n -мерной области на двумерную плоскость.

Рассмотрим скалярное произведение вектора решений y и вектора α , лежащего в плоскости, определяемой двумя единичными векторами ω_1 и ω_2 (рис. 10.18).

Возьмем наиболее общий случай, когда плоскость, определяемая векторами ω_1, ω_2 , не совпадает с координатными плоскостями. Вектор α можно представить в виде

$$\alpha = \cos \alpha \omega_1 + \sin \alpha \omega_2. \quad (10.62)$$

Проекция вектора y на направление вектора α

$$\begin{aligned} y_{\text{пр } \alpha} &= (y \cdot \alpha) = (y \cdot \omega_1) \cos \alpha + (y \cdot \omega_2) \sin \alpha = \\ &= \cos \alpha \left[\sum_{i=1}^n (y_i \omega_{1i}) \right] + \sin \alpha \left[\sum_{i=1}^n (y_i \omega_{2i}) \right], \end{aligned} \quad (10.63)$$

или

$$\begin{aligned} y_{\text{пр } \alpha} &= \sum_{j=1}^p (r_{1j} \cos \alpha + r_{2j} \sin \alpha) y_{j0} + \\ &+ \sum_{j=1}^p \int_0^{t_k} [q_{1j} \cos \alpha + q_{2j} \sin \alpha] f_1 dt + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{v=1}^k [V_{1v} \cos \alpha + V_{2v} \sin \alpha] f_v^0, \quad (10.64)$$

где

$$\begin{aligned} r_{1j} &= \sum_{i=1}^n k_{ij}(t_k) \omega_{1i}; \quad q_{1j} = \sum_{i=1}^n Q_{ij} \omega_{1i}; \quad V_{1j} = \sum_{i=1}^n V_{ij} \omega_{1i}; \\ r_{2j} &= \sum_{i=1}^n k_{ij}(t_k) \omega_{2i}; \quad q_{2j} = \sum_{i=1}^n Q_{ij} \omega_{2i}; \quad V_{2j} = \sum_{i=1}^n V_{ij} \omega_{2i}. \end{aligned} \quad (10.65)$$

В частном случае, когда векторы ω_1 и ω_2 совпадают с координатными осями, т.е. $\omega_1 = e_k$; $\omega_2 = e_v$, получим

$$\begin{aligned} r_{1j} &= K_{kj}(t_k); \quad q_{1j} = Q_{kj}; \quad q_{2j} = Q_{vj}; \\ r_{2j} &= K_{vj}(t_k); \quad V_{1j} = V_{nj}; \quad V_{2j} = V_{vj}. \end{aligned}$$

Значение y_{j0} определяется в зависимости от знака выражения

$$r_{1j} \cos \alpha + r_{2j} \sin \alpha.$$

Максимальное значение суммы интегралов достигается при следующих законах изменения случайных функций:

$$\begin{aligned} f_j &= M_j \quad \text{при } [q_{1j} \cos \alpha + q_{2j} \sin \alpha] > 0; \\ f_j &= m_j \quad \text{при } [q_{1j} \cos \alpha + q_{2j} \sin \alpha] < 0. \end{aligned}$$

Максимальное значение суммы, зависящей от постоянных во времени случайных возмущений, достигается при значениях f_v^0 , равных

$$\begin{aligned} f_v^0 &= M_v^0 \quad \text{при } [V_{1v} \cos \alpha + V_{2v} \sin \alpha] > 0; \\ f_v^0 &= m_v^0 \quad \text{при } [V_{1v} \cos \alpha + V_{2v} \sin \alpha] < 0. \end{aligned}$$

§ 10.4. Определение максимальных значений динамических реакций

При исследовании движения системы тел часто требуется определить не только вектор «состояния» системы y (координаты и скорости), но и силовое взаимодействие (реакции) между отдельными телами системы. В качестве наиболее простой физической модели аналогичных задач можно привести следующую задачу. Груз массой m движется со скоростью v по абсолютно жесткой балке с упругим закреплением (рис. 10.19, а). Правая опора балки представляет собой пружину с жесткостью c и демпфером жидкого трения (коэффициент трения равен α). На массу m действует случайная сила $f(t)$, ограниченная по модулю. Между балкой и массой m возникает реакция N , которая зависит от поведения во времени функции f внутри области возможных значений. При расчетах требуется определить максимально возможное значение динамической реакции N , возникающей между массой m и балкой.

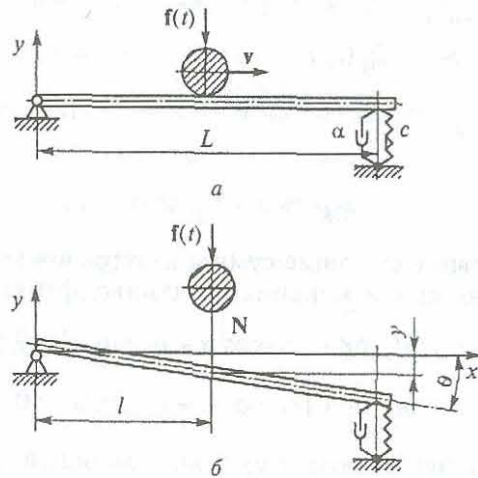


Рис. 10.19

Для расчета на прочность необходимо знать максимально возможные значения реакции для каждого момента времени. Значение реакции в каждый момент времени зависит от пове-

дения функции $f(t)$ с начала движения до данного момента. Каждому возможному поведению функции $f(t)$ в интервале $(0, t_1)$, где t_1 — произвольный момент времени, соответствующий положению массы m , показанному на рис. 10.19, а, будет соответствовать определенное значение реакции. Причем среди бесконечного множества возможных поведений функции f , включая и разрывные изменения во времени, имеется закон изменения f , сообщающий максимальное значение реакции в момент t_1 . Если при составлении уравнений движения системы воспользоваться методом кинетостатики, то получим уравнения, в которые будут входить алгебраически (без производных) неизвестные реакции. Рассмотрим общий случай движения системы, считая, что уравнения движения системы содержат k неизвестных реакций, входящих в уравнения алгебраически. В этом случае полную систему n уравнений можно разбить на две подсистемы (включая и уравнения связи, причем связи считаются двусторонними), которые в векторно-матричной записи имеют вид

$$\begin{aligned} A_{10}\ddot{y}_1 + A_{11}\dot{y}_1 + A_{12}y_1 + A_{13}z &= B_1 f_1; \\ \ddot{y}_1 + A_{21}\dot{y}_1 + A_{22}y_1 + A_{23}z &= B_2 f_2, \end{aligned} \quad (10.66)$$

где y_1 — вектор с $n - k$ компонентами, которыми являются обобщенные координаты системы; z — вектор с k компонентами из неизвестных реакций; f_1, f_2 — векторы, компонентами которых являются случайные возмущения, ограниченные по модулю и удовлетворяющие условию (10.18); A_{ij}, B_1, B_2 — матрицы, элементы которых в общем случае могут быть функциями времени.

В дальнейшем считаем, что размерность векторов f_1 и f_2 равна $n - k$. В системе уравнений (10.66) матрицы $A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{23}, B_1$ и B_2 прямоугольные, за исключением матрицы A_{13} , которая должна быть квадратной. Для того чтобы матрица A_{13} была квадратной, достаточно из общей системы уравнений взять число уравнений, равное размерности вектора z (первое уравнение системы (10.66)). Второе векторное уравнение системы (10.66) имеет размерность, равную $n - k$. Умножив первое уравнение системы (10.66) на матрицу A_{13}^{-1} , получим

$$z = A_{13}^{-1} B_1 f_1 - A_{13}^{-1} A_{10} \ddot{y}_1 - A_{13}^{-1} A_{11} \dot{y}_1 - A_{13}^{-1} A_{12} y_1. \quad (10.67)$$

Разбиение общей системы уравнений на два уравнения системы в общем произвольно, однако оно должно быть таким, чтобы определитель образованной матрицы A_{13} ни в одной точке интервала движения не обращался в нуль, т.е. матрица A_{13} должна быть неособенной. Подставив выражение для z во второе уравнение системы (10.66), получим векторно-матричное уравнение с исключенными алгебраическими неизвестными:

$$A_4 \ddot{y}_1 + A_5 \dot{y}_1 + A_6 y_1 = B_2 f_2 - A_{23} A_{13}^{-1} B_1 f_1, \quad (10.68)$$

где

$$A_4 = E - A_{23} A_{13}^{-1} A_{10}; \quad A_5 = A_{21} - A_{23} A_{13}^{-1} K_{11}; \quad A_6 = A_{22} - A_{23} A_{13}^{-1} A_{12}.$$

Понизим порядок уравнения (10.68), введя вектор

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (10.69)$$

и преобразуем (10.68) к уравнению вида

$$\dot{y} + A(t) y = B_3 f_2 - B_4 f_1, \quad (10.70)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Векторы f_1 и f_2 , входящие в уравнение (10.70), имеют размерность $2(n-k)$ (первые $n-k$ компонент векторов f_1 и f_2 отличны от нуля, остальные $n-k$ компонент равны нулю). Решение уравнения (10.70) может быть представлено в виде

$$y = K(t) y_0 + \int_0^t G(t, \tau) (B_3 f_2 - B_4 f_1) d\tau. \quad (10.71)$$

Матрица $K(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{K}(t) + A(t) K(t) = 0. \quad (10.72)$$

Для определения вектора z нас будет интересовать первая производная от вектора y по t :

$$\begin{aligned} \dot{y} = \dot{K}(t) y_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) (B_3 f_2 - B_4 f_1) d\tau + \\ + B_3(t) f_2(t) - B_4(t) f_1(t). \end{aligned} \quad (10.73)$$

Частная производная по t от матрицы Грина, входящая под интеграл в выражении (10.73), равна

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) = \dot{K}(t) K^{-1}(\tau),$$

или с учетом уравнения (10.72)

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) = -A(t) G(t, \tau). \quad (10.74)$$

Подставив выражение (10.74) в (10.73), получим

$$\begin{aligned} \dot{y} = -A(t) K(t) y_0 - \int_0^t A(t) G(t, \tau) B_3 f_2 d\tau + \\ + \int_0^t A(t) G(t, \tau) B_4 f_1 d\tau + B_3(t) f_2(t) - B_4(t) f_1(t). \end{aligned} \quad (10.75)$$

Так как $\ddot{y}_1 = \dot{y}_2$, выражение для вектора z (10.67) можно представить в виде

$$z = A_8 f_1 - A_9 \dot{y} - A_{10} y, \quad (10.76)$$

где A_8, A_9, A_{10} — прямоугольные матрицы. Матрицы A_9 и A_{10} имеют $2(n-k)$ столбцов и k строк. После подстановки в (10.76) выражений (10.71), (10.75) для $y, \dot{y}$ и преобразований получим

$$z = C f_1 - D f_2 + G y_0 + \int_0^t K'(t, \tau) f_1 d\tau + \int_0^t K''(t, \tau) f_2 d\tau, \quad (10.77)$$

где $C = A_9 B_4 + A_8$; $D = A_9 B_3$; $G = A_9 A K - A_{10} K$; $K' = [A_9 A - A_{10}] G B_3$; $K'' = [A_{10} - A_9 A] G B_4$.

В скалярной форме (10.77) имеет вид

$$z_i = \sum_{j=1}^{n-k} [c_{ij} f_{1j} - d_{ij} f_{2j} + g_{ij}^0 y_{0j}] + \sum_{j=1}^{n-k} \int_0^t k'_{ij} f_{1j} d\tau + \sum_{j=1}^{n-k} \int_0^t k''_{ij} f_{2j} d\tau, \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (10.78)$$

В случае определения максимального значения каждой из реакций законы изменения f_{1j} и f_{2j} определяются методом, изложенным в § 10.1. Найдем, например, законы изменения f_{1j} и f_{2j} , при которых z_p достигает максимального значения.

Максимальное значение суммы $\sum_{j=1}^{n-k} c_{pj} f_{1j}$ достигается при следующих условиях:

если $c_{pj} > 0$, то $f_{1j} = M_j(t)$;

если $c_{pj} < 0$, то $f_{1j} = m_j(t)$.

Аналогично определяется и максимальное значение суммы

$$\sum_{j=1}^{n-k} d_{pj} f_{2j}:$$

если $d_{pj} > 0$, то $f_{2j} = M_j(t)$;

если $d_{pj} < 0$, то $f_{2j} = m_j(t)$.

Максимальные значения интегралов, входящих в правую часть соотношения (10.78), определяются в фиксированный момент времени следующим образом. Если $k'_{pj} > 0$ (или $k'_{pj} < 0$) на интервале (τ_v, τ_{v+1}) , то $f_{1j} = M_j(\tau)$ (или $f_{1j} = m_j(\tau)$), и если $k'_{pj} < 0$ на интервале (τ_v, τ_{v+1}) , то $f_{1j} = m_j(\tau)$.

Если и начальные данные заданы в виде

$$y_{0j \min} \leq y_{0j} \leq y_{0j \max},$$

то «наихудшие» значения y_{0j} , при которых достигается максимум z_p , находятся из условий:

если $g_{pj}^0 > 0$, то $y_{0j} = y_{0j \max}$;

если $g_{pj}^0 < 0$, то $y_{0j} = y_{0j \min}$.

Пример 10.3. Определим максимальное значение реакции $N(t)$ (см. рис. 10.19, б), если $|f(t)| \leq a$. Воспользовавшись принципом Даламбера, получим уравнения движения балки и массы m :

$$J_0 \ddot{\theta} + \alpha L^2 \dot{\theta} + c L^2 \theta = -Nl; \quad (10.79)$$

$$m \ddot{y} + N - f = 0.$$

Исключив из системы (10.79) реакцию N , получим (так как $y = l\theta$)

$$(J_0 + ml^2) \ddot{\theta} + \alpha L^2 \dot{\theta} + c L^2 \theta = fl. \quad (10.80)$$

При нулевых начальных данных решение уравнения (10.80) имеет вид

$$\theta = \frac{1}{(J_0 + ml^2)} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin p_1(t-\tau) f d\tau, \quad (10.81)$$

где

$$p_1 = \sqrt{p_0^2 - n^2}; \quad n = \frac{\alpha L^2}{2(J_0 + ml^2)};$$

$$p_0^2 = \frac{c L^2}{J_0 + ml^2}.$$

Из второго уравнения системы (10.79) после преобразований можно получить выражение для реакции N в виде

$$N = \left(1 - \frac{ml^2}{J_0 + ml^2} \right) f + \frac{ml^2 c}{(J_0 + ml^2) p_1} \times \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin [p_1(t-\tau) + \beta] f d\tau, \quad (10.82)$$

где $c = \sqrt{p_0^4 + 4n^2 p_1^2}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{2np_1}{p_0^2}$.

Максимальное значение выражения (10.82) в основном определяется интегралом, который достигает экстремального значения, если функция $f(\tau)$ меняет значения с $+a$ на $-a$ в моменты времени τ_n , определяемые из условия

$$\sin [p_1(t - \tau_n) - \beta] = 0.$$

Максимально возможное значение реакции N достигается при $t \rightarrow \infty$, поэтому перейдем в выражении (10.82) к независимой переменной $\varepsilon = t - \tau$, которая изменяется от бесконечности до нуля. В этом случае моменты разрыва ε_k функции $f(\varepsilon)$ находим из условия

$$\sin [p_1 \varepsilon + \beta] = 0. \quad (10.83)$$

Максимальное значение реакции N

$$N_{\max} = \frac{J_0 a}{J_0 + ml^2} + c_1 \left[\sin(\beta + \beta_1) + 2 \sin \beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{n(k\pi - \beta)}{p_1}} \right], \quad (10.84)$$

где

$$c_1 = \frac{cml^2 a}{p_0 p_1 (J_0 + ml^2)}; \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{p_1}{n}.$$

Так как сумма в правой части (10.84)

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{n(k\pi - \beta)}{p_1}} = \frac{e^{-\frac{n(k\pi - \beta)}{p_1}}}{1 - e^{-\frac{n\pi}{p_1}}}, \quad (10.85)$$

то окончательно получаем

$$N_{\max} = \frac{J_0 a}{J_0 + ml^2} + c_1 \left[\sin(\beta + \beta_1) + 2 \sin \beta_1 \frac{e^{-\frac{n(k\pi - \beta)}{p_1}}}{1 - e^{-\frac{n\pi}{p_1}}} \right], \quad (10.86)$$

где $\sin \beta = \frac{2np_1}{\sqrt{p_0^2 + 4n^2 p_1^2}}$; $\sin \beta_1 = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + n^2}}$.

§ 10.5. Области возможных значений вектора состояния системы в случае нескольких участков движения

В предыдущих параграфах рассматривались задачи, когда число степеней свободы системы на заданном интервале времени движения оставалось неизменным с неизменным числом случайных возмущений. В реальных системах эти условия могут быть нарушены, т.е. в процессе движения может измениться число степеней свободы системы или число и даже тип случайных возмущений. На рис. 10.20 показана система с одной степенью свободы. Масса m движется по абсолютно жесткой балке со скоростью v . На интервале $(0, l_1)$ на массу m действует случайная сила f , ограниченная по модулю, а на интервале $(l_1,$

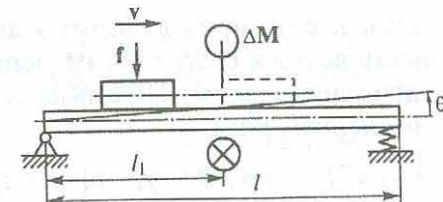


Рис. 10.20

L) — случайный крутящий момент ΔM , ограниченный по модулю (масса m раскручивается). Область возможных значений

θ и $\dot{\theta}$ в момент потери контакта массы m с балкой будет зависеть от двух участков движения, на каждом из которых действуют разные случайные возмущения. На рис. 10.21 показана система с изменяющимся числом степеней свободы. Кольцо 1 может свободно перемещаться по жестким направляющим 2, связанным с диском 3. Моменты t_i контакта кольца с диском 4 известны. Когда между кольцом 1 и диском 4 имеется зазор, данная система имеет две степени свободы. Если кольцо плотно прижимается к диску 4 (предполагается, что взаимное проскальзывание между кольцом 1 и диском 4 исключено), система имеет одну степень свободы.

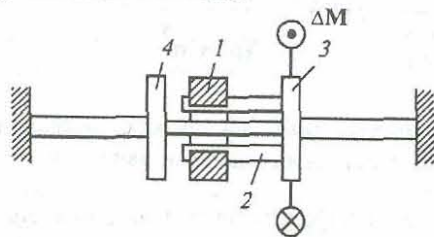


Рис. 10.21

Если требуется определить возможные угловые отклонения диска 3 в фиксированный момент времени при действии случайного момента ΔM , ограниченного по модулю, то необходимо рассматривать движение системы с учетом изменения числа степеней свободы.

Рассмотрим вначале случай, когда имеется два участка движения и размерность вектора состояния не меняется. На каждом из участков движения система описывается своим векторно-матричным уравнением вида

$$\dot{x}_1 + A_1 y_1 = B_1 f_{11}; \quad y_1(0) = y_{10} \quad (0 \leq t \leq t_k'); \quad (10.87)$$

$$\dot{x}_2 + A_2 y_2 = B_2 f_{12}; \quad y_2(t_k') = y_{20} \quad (t_k' \leq t \leq t_k), \quad (10.88)$$

где y_1 и y_2 — n -мерные векторы возмущенного состояния системы соответственно на первом и втором участках движения; f_{11} — вектор случайных возмущений, действующих на систему на первом участке движения; f_{12} — вектор случайных возмущений, действующих на систему на втором участке движения. Компоненты векторов f_{11} и f_{12} подчиняются условиям вида

$$m_{ij} \leq f_{ij} \leq M_{ij},$$

где m_{ij} и M_{ij} — некоторые известные функции.

Решения уравнений (10.87) и (10.88) имеют вид

$$y_1(t_k') = K_1(t_k') y_{10} + \int_0^{t_k'} G_1(t_k', t) B_1 f_{11} dt; \quad (10.89)$$

$$y_2(t_k - t_k') = K_2(t_k - t_k') y_{20} + \int_0^{t_k - t_k'} G_2[(t_k - t_k'), \tau] B_2 f_{12} d\tau. \quad (10.90)$$

Так как $y_1(t_k') = y_{20}$, то, подставив в (10.90) выражение для $y_1(t_k')$, получим

$$y_2(t_k - t_k') = K_2(t_k - t_k') K_1(t_k') y_{10} + \int_0^{t_k} K_2(t_k - t_k') \times \\ \times G_1(t_k', \tau) B_1 f_{11} d\tau + \int_0^{t_k - t_k'} G_2[(t_k - t_k'), \tau] B_2 f_{12} d\tau. \quad (10.91)$$

В случае k участков выражение для y_k будет содержать k интегральных слагаемых с непересекающимися пределами интегрирования.

Максимальное значение проекции вектора y_2 на произвольное направление определяется так же, как и для одного участка движения.

Пример 10.4. Уравнения движения системы на интервале времени $0 \leq t \leq t_1$ имеют вид

$$\dot{x}_{11} = f_1; \quad \dot{x}_{21} = x_{11}. \quad (10.92)$$

На интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$ уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_{12} = f_2; \quad \dot{x}_{22} = -x_{12}. \quad (10.93)$$

Случайные возмущения f_1 и f_2 удовлетворяют условию

$$1 \leq f_1 \leq 1.$$

Область возможных значений x_{11}^* и x_{21}^* в конце первого участка движения является областью начальных данных для системы (10.93). Решение системы (10.93) имеет вид

$$x_{12} = \int_0^{t_2-t_1} f_2 d\tau + x_{11}^*; \quad (10.94)$$

$$x_{22} = - \int_0^{t_2-t_1} (t_2 - t_1 - \tau) f_2 d\tau + x_{11}^*(t_2^0 - t_1) + x_{21}^*,$$

где x_{11}^* , x_{21}^* — значения x_{11} и x_{21} при $t = t_1$.

Для построения области удобнее представить решения (10.94) в форме

$$x_{12} = \int_0^{t_1} f_1 d\tau + \int_0^{t_2-t_1} f_2 d\tau; \quad (10.95)$$

$$x_{22} = \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) f_1 d\tau - \int_0^{t_2-t_1} [(t_2 - t_1) - \tau] f_2 d\tau.$$

Найдем максимальное значение проекции вектора $x(x_{12}, x_{22})$ на направление, определяемое единичным вектором e :

$$(x \cdot e) = \int_0^{t_1} [\cos \alpha + (2t_1 - t_1 - \tau) \sin \alpha] f_1 d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_2-t_1} [\cos \alpha - (t_2 - t_1 - \tau) \sin \alpha] f_2 d\tau.$$

Максимальное значение проекции $(x \cdot e)$ равно сумме максимальных значений слагаемых, которые можно определить отдельно (для каждого x определяем момент τ разрыва функций f_1 и f_2). Так как подынтегральные выражения в (10.95) линейно зависят от τ на интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, t_2) , они могут изменить знак только один раз, т.е. экстремальные значения каждого из интегралов достигаются при законах изменения f_1 и f_2 с одним разрывом. Каждой точке границы области от f_1 (1) I при $t = t_1$ (рис. 10.22) соответствует область от f_2 при $t = t_2$, показанная штриховой линией. Огибающая I ограничивает на плоскости $x_{22}x_{12}$ полную область в момент t_2 . Когда размерность вектора «состояния» системы y_1 на участках движения меняется, как, например, в системе, показанной на рис. 10.21, на каждом из участков движения имеем систему уравнений разной размерности.

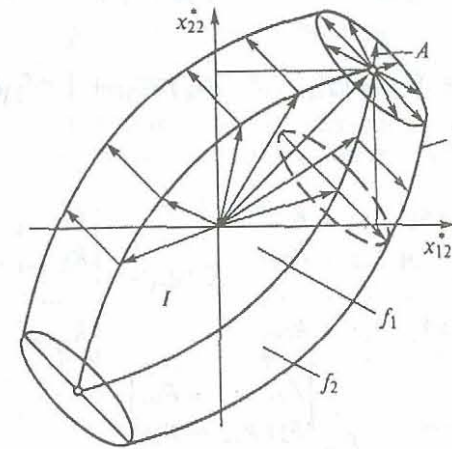


Рис. 10.22

Пусть для большей определенности размерность вектора y_1 равна n , а размерность вектора y_2 равна v ($v < n$):

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix}; \quad y_2 = \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2v} \end{bmatrix}.$$

Компоненты $y_{21}, \dots, y_{2v}$ являются «продолжением» компонент $y_{11}, \dots, y_{1v}$ на втором участке движения, т.е. компоненты векторов y_1 и y_2 ($y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1v}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2v}$) физически тождественны. Вектор $y_1(t_k')$ можно представить в виде

$$y_1(t_k') = \begin{bmatrix} y_{20} \\ y'_{20} \end{bmatrix} = K_1(t_k') \begin{bmatrix} y'_{10} \\ y''_{10} \end{bmatrix} + \int_0^{t_k'} K_1 B_1 f_{11} d\tau, \quad (10.96)$$

где y_{20}' содержит компоненты вектора y_1 , не имеющие продолжения на втором участке движения. Из уравнения (10.96) можно выделить выражение для y_{20} следующего вида:

$$y_{20} = K'_1(t_k') y'_{10} + K''_1(t_k') y''_{10} + \int_0^{t_k} P f_{11} d\tau, \quad (10.97)$$

где

$$K'_1(t_k') = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1v} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{v1} & k_{v2} & \dots & k_{vv} \end{bmatrix}; \quad K''_1(t_k') = \begin{bmatrix} k_{1,v+1} & \dots & k_{1n} \\ k_{2,v+1} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{v,v+1} & \dots & k_{vn} \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{v1} & p_{v2} & \dots & p_{vn} \end{bmatrix}.$$

Матрица K'_1 — квадратная (v -го порядка); матрицы K''_1 и P — прямоугольные. Матрица P представляет собой матрицу,

полученную из матрицы $K_1 B_1$ с сохранением первых v строк. Подставив выражение для y_{20} в (10.90), получим

$$y_2(t_k - t_k') = K_2(t_k - t_k') K'_1(t_k') y_{10}' + K_2(t_k - t_k') K''_1(t_k') y_{10}'' + \int_0^{t_k'} K_2(t_k - t_k') P f_{11} d\tau + \int_0^{t_k - t_k'} K_2[(t_k - t_k') \tau], B_2 f_{12} d\tau. \quad (10.98)$$

Область возможных значений вектора $y_2(t_k - t_k')$ возмущенного «состояния» системы в конце второго участка определяется так же, как и для одного участка движения.

§ 10.6. Области возможных значений вектора состояния системы при действии зависимых возмущений

Часто случайные возмущения нельзя рассматривать как независимые, например разброс координат и их первых двух производных в некоторый момент времени, проекции случайной силы на координатные оси и т.д. Пример механической системы, на которую действуют зависимые случайные возмущения, ограниченные по модулю, приведен в § 10.1 (см. рис. 10.10). Зависимость между возмущениями эквивалентна дополнительным ограничениям, накладываемым на эти функции. Одним из таких ограничений является условие (10.23)

$$(Cf \cdot f) \leq 1, \quad (10.99)$$

где C — квадратная самосопряженная положительно определенная матрица.

Элементы c_{ij} матрицы C в общем случае могут зависеть от времени. Как известно, для положительной определенности матрицы необходимо и достаточно, чтобы ее элементы удовлетворяли критерию Сильвестра (для любого момента времени t):

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Аналогичному условию может удовлетворять и вектор случайных начальных данных y_0 :

$$(C_0 y_0 \cdot y_0) \leq 1, \quad (10.100)$$

где C_0 — квадратная самосопряженная положительно определенная матрица с постоянными элементами.

Решение уравнения (10.24) имеет вид

$$y = K(t) y_0 + \int_0^{t_k} G(t_k, \tau) P(\tau) f d\tau. \quad (10.101)$$

Рассмотрим случай, когда вектор случайных возмущений может быть представлен в виде

$$f = H(t) f^0, \quad (10.102)$$

где $H(t)$ — диагональная матрица с непрерывно зависящими от времени элементами; f^0 — вектор, компоненты которого являются случайными числами, ограниченными по модулю.

Подставив выражение (10.102) в уравнение (10.101), получим

$$y = K y_0 + \int_0^{t_k} P(t_k, \tau) f^0 d\tau, \quad (10.103)$$

где $P(t_k, \tau) = G(t_k, \tau) \cdot B(\tau) H(\tau)$.

Условие (10.99) преобразуется к виду

$$(C_1 f^0 \cdot f^0) \leq 1, \quad (10.104)$$

где $C_1 = HCH$.

Для получения области отклонений вектора y найдем максимум проекции вектора y на единичный вектор α :

$$y_{пр \alpha} = (y \cdot \alpha) = (K(t) y_0 \cdot \alpha) + \left(\int_0^{t_k} P(t_k, \tau) f^0 d\tau \cdot \alpha \right). \quad (10.105)$$

Определим максимум выражения (10.105) при дополнительных условиях (10.99) и (10.100), которым должны удовлетворять векторы y_0 и f^0 . Воспользовавшись множителями Лагранжа, получим следующий функционал:

$$J = (K(t) y_0 \cdot \alpha) + \left(\int_0^{t_k} P(t_k, \tau) f^0 d\tau \cdot \alpha \right) - \frac{\mu}{2} [(C_0 y_0 \cdot y_0) - 1] - \frac{\lambda}{2} [(C_0 f^0 \cdot f^0) - 1],$$

или

$$J = (y_0 \cdot K^*(t) \alpha) + \left(f^0 \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \cdot \alpha \right) - \frac{\mu}{2} [(C_0 y_0 \cdot y_0) - 1] - \frac{\lambda}{2} [(C_0 f^0 \cdot f^0) - 1]. \quad (10.106)$$

Функционал J зависит от y_{0i} и f_{i0}^0 , поэтому y_{0i} и f_{i0}^0 , при которых J достигает экстремальных значений, находятся из условий

$$\frac{\partial J}{\partial y_{0i}} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial f_{i0}^0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.107)$$

Условия (10.107) можно получить и в более компактной форме, дифференцируя (10.106) по векторам y_0 и f^0 :

$$\frac{\partial J}{\partial y_0} = K^* \alpha - \mu C_0 y_0 = 0; \quad (10.108)$$

$$\frac{\partial J}{\partial f^0} = \int_0^{t_k} P^* d\tau \alpha - \lambda C_1 f^0 = 0.$$

Векторы y_0 и f^0 , сообщающие экстремальные значения выражению (10.106), находим из уравнений

$$K^*(t_k) \alpha = \mu C_0 y_0; \quad (10.109)$$

$$\int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha = \lambda C_1 f^0. \quad (10.110)$$

Умножив соотношения (10.109) и (10.110) на матрицы соответственно C_0^{-1} и C_1^{-1} , получим

$$C_0^{-1} K^*(t_k) \alpha = \mu y_0; \quad (10.111)$$

$$C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha = \lambda f^0. \quad (10.112)$$

Выражение (10.109) умножим скалярно на выражение (10.110):

$$[K^*(t_k) \alpha, C_0^{-1} K^*(t_k) \alpha] = \mu^2,$$

или

$$(K C_0^{-1} K^* \alpha, \alpha) = \mu^2. \quad (10.113)$$

Аналогичным образом поступим с выражениями (10.110) и (10.112):

$$\left(\int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha \cdot C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha \right) = \lambda^2,$$

или

$$\left(\int_0^{t_k} P d\tau C_1^{-1} \int_0^{t_k} C^* d\tau \alpha \cdot \alpha \right) = \lambda^2. \quad (10.114)$$

Выражения (10.113) и (10.114) определяют введенные множители Лагранжа μ и λ для каждого направления в пространстве.

Найдем максимальное значение каждого из слагаемых, определяющих вектор y . Представим вектор y в виде суммы двух векторов:

$$y = y_1 + y_2, \quad (10.115)$$

где

$$y_1 = K(t_k) y_0,$$

$$y_2 = \int_0^{t_k} P(t_k, \tau) f^0 d\tau = \int_0^{t_k} P d\tau f^0.$$

Докажем следующую теорему: максимальное значение проекции векторов y_1 и y_2 на произвольное направление, определяемое единичным вектором α , равно значению множителя Лагранжа для этого направления. Умножим обе части равенства (10.111) слева на матрицу $K(t_k)$:

$$K(t_k) C_0^{-1} K^*(t_k) \alpha = \mu K(t_k) y_0 = \mu y_1. \quad (10.116)$$

Максимальное значение проекции вектора y_1 на направление α найдем из соотношения

$$y_{1\text{пр}\alpha} = (y_1 \cdot \alpha) = (K(t_k) y_0 \cdot \alpha) = (y_0 K^*(t_k) \cdot \alpha),$$

или, воспользовавшись соотношением (10.109),

$$y_{1\text{пр}\alpha} = (y_0 \cdot \mu C_0 y_0) = \mu (y_0 \cdot C_0 y_0) = \mu. \quad (10.117)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$y_{1\text{пр}\alpha} = \lambda. \quad (10.118)$$

Сформулированная теорема доказана. Максимальное значение функционала J или проекции вектора на направление α

$$J_{\text{max}} = y_{\text{пр}\alpha \text{ max}} = \mu + \lambda, \quad (10.119)$$

где μ и λ определяем из соотношений (10.113) и (10.114).

Найдем векторы y_0 и f^0 , которые дают максимальные значения y_1 и y_2 для данного направления α . Из соотношений (10.109) и (10.110) имеем

$$y_1 = \frac{1}{\mu} C_0^{-1} K^*(t_k) \alpha; \quad (10.120)$$

$$y_2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha. \quad (10.121)$$

Векторы y_1 и y_2 для данного направления α определяются из соотношений

$$y_1 = \frac{1}{\mu} K(t_k) C_0^{-1} K^*(t_k) \alpha; \quad (10.122)$$

$$y_2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{t_k} P(t_k, \tau) d\tau C_0^{-1} \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha, \quad (10.123)$$

или

$$y_1 = \frac{K C_0^{-1} K^* \alpha}{\sqrt{(K C_0^{-1} K^* \alpha \cdot \alpha)}}; \quad (10.124)$$

$$y_2 = \frac{\int_0^{t_k} P d\tau C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^* d\tau \alpha}{\sqrt{\int_0^{t_k} P d\tau C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^* d\tau \alpha \cdot \alpha}} = \frac{A}{a}. \quad (10.125)$$

Формулы (10.124) и (10.125) дают возможность для каждого единичного вектора α определить вектор y , соединяющий точку начала координат с некоторой точкой границы области возможных значений вектора y . Формулы (10.120) – (10.123) справедливы при условии, что $\mu \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Если для некоторых направлений вектора α множители Лагранжа обращаются в нуль, то формулы (10.120) – (10.123) неприменимы.

Из соотношений (10.116) и (10.117) следует, что в этом случае проекции векторов y_1 и y_2 на некотором направлении равны нулю (не обязательно обе проекции векторов y_1 и y_2 одновременно обращаются в нуль). Обращение одной из проекций векторов (например, y_1) в нуль означает, что область отклонений вектора y_1 вырождается, т.е. имеет меньшее число измерений. Множители Лагранжа могут обратиться в нуль только тогда, когда

$$K^*(t_k) \alpha = 0; \quad (10.126)$$

$$\int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau = 0. \quad (10.127)$$

Размерность подпространства вектора α , для которого множители Лагранжа обращаются в нуль, равна рангу матриц

$$K^*(t_k); \quad \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau.$$

Если ранг матриц равен n , то множители Лагранжа в нуль не обращаются. Вектор состояния системы в фиксированный момент времени (максимально возможное значение вектора y)

$$y_* = y_{1*} + y_{2*} = \left(\frac{K_1}{\sqrt{(K_1 \alpha \alpha)}} + \frac{P_1}{\sqrt{(P_1 \alpha \alpha)}} \right) \alpha, \quad (10.128)$$

где

$$K_1 = K C_0^{-1} K^*; \quad P_1 = \int_0^{t_k} P d\tau C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^* d\tau.$$

Соотношение (10.128) позволяет установить, как полная область зависит от разброса начальных данных (вектор y_{1*}) и от случайных возмущений, действующих при движении системы (вектор y_{2*}).

Найдем уравнения областей возможных значений каждого из векторов y_1 и y_2 общего решения y . Рассмотрим выражение для y_1 (10.122):

$$y_1 = K_1(t_k) \alpha. \quad (10.129)$$

Покажем, что матрица K_1 является самосопряженной, т.е. удовлетворяет условию $(K_1)^* = (K_1)$:

$$\begin{aligned} (K_1)^* &= \frac{1}{\mu} (K C_0^{-1} K^*)^* = \frac{1}{\mu} (K^*)^* (C_0^{-1})^* (K^*)^* = \\ &= \frac{1}{\mu} K (C_0^{-1})^* K^* = \frac{1}{\mu} K (C_0^*)^{-1} K^* = \frac{1}{\mu} K C_0^{-1} K^* = K_1. \end{aligned}$$

При выводе использовалось условие самосопряженности матрицы C_0 .

Из соотношения (10.129) имеем

$$K_1^{-1} y_1 = \alpha. \quad (10.130)$$

Умножив левую и правую части уравнения (10.130) скалярно соответственно на $K_1^{-1} y_1$ и α , получим

$$(K_1^{-1} y_1 \cdot K_1^{-1} y_1) = (\alpha \cdot \alpha) = 1,$$

или

$$((K_1^{-1})^2 y_1 \cdot y_1) = 1. \quad (10.131)$$

Уравнение (10.131) есть уравнение поверхности 2-го порядка в n -мерном пространстве. Из ограниченности области отклонений следует, что эта поверхность является эллипсоидом. Аналогичным образом можно показать, что вектор y_2 удовлетворяет уравнению

$$((P_1^{-1})^2 y_2 \cdot y_2) = 1, \quad (10.132)$$

где P — самосопряженная матрица.

Соотношения (10.124), (10.125) определяют максимально возможное значение вектора y (10.115) в зависимости от направления произвольного единичного вектора α . При непрерывном изменении направления вектора α в пространстве конец вектора y_* очерчивает предельную поверхность (границу области возможных значений вектора состояния). Вектор α можно представить через проекции в исходной координатной системе:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n h_i e_i, \quad (10.133)$$

где h_i — проекции вектора α на координатные оси; e_i — единичные векторы координатных осей.

Компоненты вектора y_*

$$y_{*i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.134)$$

Рассмотрим частный случай, когда требуется найти проекцию области на двумерную плоскость. При этом

$$\alpha = h_1 e_1 + h_2 e_2 = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2.$$

Из (10.134) получаем

$$\begin{aligned} y_{*1} &= a_{11} h_1 + a_{12} h_2, \\ y_{*2} &= a_{21} h_1 + a_{22} h_2. \end{aligned} \quad (10.135)$$

Изменяя α от 0 до 360° , из соотношений (10.135) получаем координаты точек границы проекции области на двумерную плоскость.

Пример 10.5. Рассмотрим свободные колебания массы m (рис. 10.23). Без учета сил сопротивления уравнение малых колебаний массы имеет вид

$$\ddot{y} + p_0^2 y = 0, \quad (10.136)$$

$$\text{где } p_0^2 = \frac{c}{m}; \quad c = \frac{3EJ_x}{l^3}.$$

Начальные данные являются случайными зависимыми величинами, которые удовлетворяют условию

$$\left(\frac{y_0}{y_{0m}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\dot{y}_{0m}} \right)^2 \leq 1, \quad (10.137)$$

где $y_{0m}, \dot{y}_{0m}$ — максимально возможные значения разброса начальных данных.

В рассматриваемом случае условие (10.137) имеет простой физический смысл. В начальный момент времени система может иметь случайное отклонение y_0 и случайную скорость $\dot{y}_0$, т.е. система получает случайную энергию, равную

$$\frac{cy_0^2}{2} + \frac{m\dot{y}_0^2}{2} = W. \quad (10.138)$$

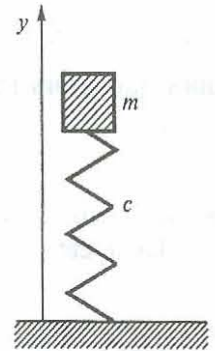


Рис. 10.23

Максимально возможная энергия, которую может получить система, ограничена и равна W_m , причем ее можно выразить через максимально возможное отклонение и максимально возможную скорость:

$$W_m = \frac{cy_0^2 \max}{2} = \frac{m\dot{y}_0^2 \max}{2}. \quad (10.139)$$

При произвольном отклонении и скорости

$$\frac{cy_0^2}{2} + \frac{m\dot{y}_0^2}{2} \leq W_m \quad (10.140)$$

или, разделив на W_m (10.139), получим

$$\left(\frac{y_0}{y_{0m}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\dot{y}_{0m}}\right)^2 \leq 1. \quad (10.141)$$

Перейдем к безразмерным величинам τ и z , положив

$$tp_0 = \tau; \quad y = zy_{0m}.$$

После преобразований получаем (перейдя к безразмерной координате и безразмерному времени)

$$\ddot{z} + z = 0; \quad (10.142)$$

$$z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\dot{z}_{0m}}\right)^2 \leq 1, \quad (10.143)$$

где $\dot{z}_{0m} = \frac{\dot{y}_{0m}}{(y_{0m} p_0)}$.

Условие (10.143) можно представить в виде скалярного произведения

$$(C_0 z_0 \cdot z_0) \leq 1, \quad (10.144)$$

где

$$C_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{0m}^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (10.142) представим в виде

$$z = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = K(\tau) z_0. \quad (10.145)$$

В момент времени $t = t_k$ или $\tau_k = t_k p_0$ (для упрощения записи положим $\tau_k = 1$) имеем

$$z = K(1) z_0. \quad (10.146)$$

Множитель Лагранжа (10.113) для произвольного направления единичного вектора α (см. рис. 10.18)

$$\mu = \sqrt{(K C_0^{-1} K^* \alpha \alpha)}, \quad (10.147)$$

где $K = \begin{bmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$; $C_0^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{0m}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $K^* = \begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$.

После преобразований имеем

$$\mu = \sqrt{k_{11} \cos^2 \alpha + k_{12} \sin 2\alpha + k_{22} \sin^2 \alpha},$$

или

$$\mu = \sqrt{\dot{z}_{0m}^2 \cos(\alpha - 1) + \sin^2(\alpha - 1)}, \quad (10.148)$$

где

$$k_{11} = \dot{z}_{0m}^2 \cos^2 1 + \sin^2 1;$$

$$k_{12} = \frac{1}{2} \sin 2(-1 + \dot{z}_{0m}^2);$$

$$k_{22} = \dot{z}_{0m}^2 \sin^2 1 + \cos^2 1.$$

Вектор z_0 , при котором проекция вектора z на направление, определяемое вектором α , достигает максимального значения, находим из выражения

$$z_0 = \frac{1}{\mu} C_0^{-1} K^*(1) \alpha,$$

или

$$z_0 = \frac{1}{\mu} [\dot{z}_{0m}^2 \cos(\alpha - 1) e_1 + \sin(\alpha - 1) e_2]. \quad (10.149)$$

Компоненты вектора z_0 :

$$z_{01} = \dot{z}_0 = \frac{\dot{z}_{0m}^2 \cos(\alpha - 1)}{\mu}; \quad (10.150)$$

$$z_{02} = z_0 = \frac{1}{\mu} \sin(\alpha - 1).$$

Полученные выражения для $\dot{z}_0$, z_0 и μ должны удовлетворять условию (10.144) (проверка решения). Легко убедиться, что это так. Вектор состояния системы z в момент времени $\tau = 1$ (10.124)

$$z = \frac{1}{\mu} K C_0^{-1} K^* \alpha,$$

или

$$z = \frac{1}{\mu} \left[(\dot{z}_{0m}^2 \cos^2 1 + \sin^2 1) \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin 2(\dot{z}_{0m}^2 - 1) \sin \alpha \right] e_1 + \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{2} (\dot{z}_{0m}^2 - 1) \sin 2 \cos \alpha + (\dot{z}_{0m}^2 \sin^2 1 + \cos^2 1) \sin \alpha \right] e_2.$$

Компоненты вектора состояния системы:

$$\dot{z}(1) = \frac{1}{\mu} \left[(\dot{z}_{0m}^2 \cos^2 1 + \sin^2 1) \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \sin 2(\dot{z}_{0m}^2 - 1) \right];$$

$$z(1) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2(\dot{z}_{0m}^2 - 1) + (\dot{z}_{0m}^2 \sin^2 1 + \cos^2 1) \sin \alpha \right]. \quad (10.151)$$

Меняя угол α от 0 до 2π , из (10.151) получаем координаты границы области возможных значений вектора состояния системы в фиксированный момент времени.

Рассмотрим частный случай, когда $\dot{z}_{0m}^2 = \mu = 1$:

$$\dot{z}(1) = \cos \alpha; \quad z(1) = \sin \alpha. \quad (10.152)$$

Исключая α из (10.151), получаем уравнение границы области возможных значений решений $\dot{z}^2 + z^2 = 1$, справедливое для любого времени τ .

В данном примере рассматриваются свободные колебания консервативной системы, для которой полная энергия остается неизменной, поэтому и область возможных значений решений остается неизменной во времени.

Рассмотрим случай, когда на массу m (см. рис. 10.10) действует случайная по направлению и ограниченная по модулю сила f ($|f| \leq f_m$).

Уравнения движения массы m имеют вид

$$\ddot{y} + p_1^2 y = \frac{1}{m} f_y; \quad \ddot{x} + p_2^2 x = \frac{1}{m} f_x, \quad (10.153)$$

где

$$p_1^2 = \frac{c_1}{m} = \frac{EJ_x}{3l^3 m}; \quad p_2^2 = \frac{c_2}{m} = \frac{EJ_y}{3l^3 m}.$$

Переходя к безразмерным параметрам $t p_1 = \tau$, $y = y_0 l$, $x = x_0 l$, после преобразований получим

$$\ddot{y}_0(\tau) + y_0(\tau) = \frac{f_y}{m p_1^2 l} = f_{y_0};$$

$$\ddot{x}_0(\tau) + p_0^2 x_0(\tau) = \frac{f_x}{mp_1^2 l} = f_{x_0}. \quad (10.154)$$

Безразмерные компоненты вектора $\mathbf{f}$ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{f_{x_0}}{f_{m_0}}\right)^2 + \left(\frac{f_{y_0}}{f_{m_0}}\right)^2 \leq 1 \quad \left(f_{m_0} = \frac{f_m}{mp_1^2 l}\right)$$

или

$$(C_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) \leq 1.$$

Требуется найти область возможных значений безразмерных координат x_0, y_0 массы m в фиксированный момент времени t_k ($\tau_k = p_1 t_k$) при нулевых начальных данных.

Из системы (10.154) получим систему четырех уравнений первого порядка (опуская индекс "0" в безразмерных величинах):

$$\dot{y}_1 + y_2 = f_1; \quad \dot{y}_1 - y_2 = 0; \quad (10.155)$$

$$\dot{y}_3 + p_0^2 y_4 = f_3; \quad \dot{y}_4 - y_3 = 0, \quad (10.156)$$

где

$$y_1 = \dot{y}; \quad y_2 = y; \quad f_1 = f_y;$$

$$y_3 = \dot{x}; \quad y_4 = x; \quad f_3 = f_x.$$

В векторной записи имеем

$$\dot{\mathbf{y}} + A \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad (10.157)$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_m^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_m^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как следует из формулы (10.125), для определения вектора состояния системы $\mathbf{y}$ требуется знать матрицу $P(\tau_k, \tau)$. В рассматриваемом случае матрица P есть матрица Грина уравнения (10.157):

$$P(\tau_k, \tau) = G(\tau_k, \tau).$$

Так как матрица $G(\tau_k, \tau)$ определяется из решения однородных уравнений (10.155) и (10.156), которые независимы, то ее можно получить, определив матрицы Грина для каждой из систем уравнений (10.155) и (10.156). Матрицы Грина для этих уравнений имеют вид

$$G_1(\tau_k, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau_k - \tau) & \sin(\tau_k - \tau) \\ -\sin(\tau_k - \tau) & \cos(\tau_k - \tau) \end{bmatrix};$$

$$G_2(\tau_k, \tau) = \begin{bmatrix} \cos p_0(\tau_k - \tau) & \sin p_0(\tau_k - \tau) \\ -\sin p_0(\tau_k - \tau) & \cos p_0(\tau_k - \tau) \end{bmatrix},$$

поэтому $G(\tau_k, \tau) = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}.$

После интегрирования матрицы $G(\tau_k, \tau)$ получим

$$\int_0^{\tau_k} G(\tau_k, \tau) d\tau = \begin{bmatrix} G'_1 & 0 \\ 0 & G'_2 \end{bmatrix},$$

где

$$G'_1 = \begin{bmatrix} \sin \tau_k & (1 - \cos \tau_k) \\ -(1 - \cos \tau_k) & \sin \tau_k \end{bmatrix};$$

$$G'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0} \sin p_0 \tau_k & \frac{1}{p_0} (1 - \cos p_0 \tau_k) \\ -\frac{1}{p_0} (1 - \cos p_0 \tau_k) & \frac{1}{p_0} \sin p_0 \tau_k \end{bmatrix}.$$

После преобразований получаем матрицу B , входящую в числитель выражения (10.125):

$$B = \int_0^{t_k} P d\tau C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^* d\tau = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$B_{11} = \begin{bmatrix} f_m^2 \sin^2 \tau_k + (\cos \tau_k - 1)^2 & (f_m^2 - 1) \sin \tau_k (\cos \tau_k - 1) \\ (f_m^2 - 1) \sin \tau_k (\cos \tau_k - 1) & f_m^2 (1 - \cos \tau_k)^2 + \sin^2 \tau_k \end{bmatrix};$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} f_m^2 \sin^2 p_0 \tau_k + (\cos p_0 \tau_k - 1)^2 & (f_m^2 - 1) \sin p_0 \tau_k (\cos p_0 \tau_k - 1) \\ (f_m^2 - 1) \sin p_0 \tau_k (\cos p_0 \tau_k - 1) & f_m^2 (1 - \cos p_0 \tau_k)^2 + \sin^2 p_0 \tau_k \end{bmatrix}.$$

По условию задачи требуется найти область возможных значений в плоскости xOy , т.е. проекцию четырехмерной области на плоскость xOy , поэтому вектор α , входящий в формулу (10.125), лежит в этой плоскости, т.е.

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = 0 \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3 + \cos \alpha \mathbf{e}_4;$$

$$\mathbf{A} = (f_m^2 - 1) \sin \tau_k (\cos \tau_k - 1) \sin \alpha \mathbf{e}_1 + \\ + [f_m^2 (1 - \cos \tau_k)^2 + \sin^2 \tau_k] \sin \alpha \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \frac{1}{p_0^2} (f_m^2 - 1) \sin p_0 \tau_k (\cos p_0 \tau_k - 1) \cos \alpha \mathbf{e}_3 + \\ + \frac{1}{p_0^2} [f_m^2 (1 - \cos p_0 \tau_k)^2 + \sin^2 p_0 \tau_k] \cos \alpha \mathbf{e}_4,$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы координатных осей.

Знаменатель формулы (10.125) для рассматриваемого примера имеет вид

$$a = \sqrt{[f_m^2 (1 - \cos \tau_k)^2 + \sin^2 \tau_k] \sin^2 \alpha + \frac{1}{p_0^2} [f_m^2 (1 - \cos p_0 \tau_k)^2 + \sin^2 p_0 \tau_k] \cos^2 \alpha}.$$

Для построения проекции области на плоскости xOy необходимы проекции

$$y_2 = \frac{1}{a} [f_m^2 (1 - \cos \tau_k)^2 + \sin^2 \tau_k] \sin \alpha;$$

$$y_4 = \frac{1}{p_0^2 a} [f_m^2 (1 - \cos p_0 \tau_k)^2 + \sin^2 p_0 \tau_k] \cos \alpha.$$

Меняя α от 0 до 360° , получаем область возможных значений координат точки в момент времени τ_k .

Рассмотрим частный случай $p_0 = 1$. После преобразований получим

$$y_2 = \sqrt{f_m^2 (1 - \cos \tau_k)^2 + \sin^2 \tau_k} \cdot \sin \alpha;$$

$$y_4 = \sqrt{f_m^2 (1 - \cos \tau_k)^2 + \sin^2 \tau_k} \cdot \cos \alpha.$$

Исключив угол α , получим уравнение окружности

$$\left(\frac{y_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_4}{a}\right)^2 = 1.$$

Пример 10.6. Рассмотрим механическую систему, показанную на рис. 10.24. По абсолютно жесткой трубе, упруго закрепленной на правом конце, движется тело массой m_1 под действием силы R . Направление силы R характеризуется двумя случайными величинами ϵ и ϵ , где ϵ — линейное смещение;

ε — угловое смещение. Случайные смещения ограничены по модулю

$$|\mathbf{e}| \leq e_{\max}; |\boldsymbol{\varepsilon}| \leq \varepsilon_{\max}.$$

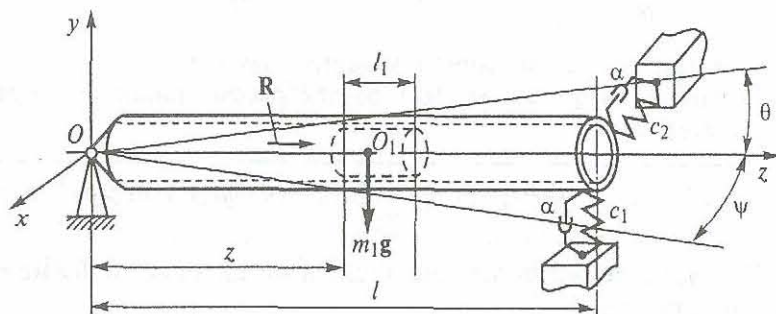


Рис. 10.24

Обе случайные величины можно считать малыми. На рис. 10.25 показаны проекции силы $\mathbf{R}$ на плоскости yOz и xOz и ее положение относительно точек O и O_1 , зависящее от проекций случайных смещений e_x, e_y, ε_y и ε_x . Для упрощения

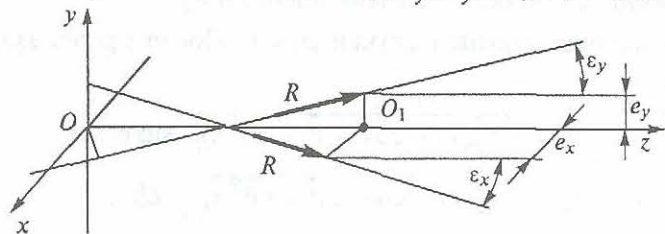


Рис. 10.25

примем, что в начальный момент времени координата точки O_1 равна $l_1/2$. Из-за случайных эксцентриситетов силы $\mathbf{R}$ появляются два случайных момента, действующих в плоскостях yOz и xOz :

$$M_x = (ze_y - e_y) R; \quad (10.158)$$

$$M_y = (ze_x - e_x) R. \quad (10.159)$$

Моменты M_x и M_y вызовут возмущенное движение трубы в двух плоскостях, которое характеризуется малыми угловыми отклонениями θ и ψ (см. рис. 10.24). Получим уравнения возмущенного движения относительно состояния равновесия, в котором находится система до приложения силы $\mathbf{R}$.

В момент выхода тела из трубы его ось получит угловые отклонения θ_k и ψ_k , а также угловые скорости $\dot{\theta}_k$ и $\dot{\psi}_k$, которые образуют четырехмерную область в фазовом пространстве. Так как проекции $e_x = |\mathbf{e}| \cos \alpha$, $e_y = |\mathbf{e}| \sin \alpha$, то получаем условие, которому удовлетворяют случайные величины e_x и e_y :

$$\left(\frac{e_x}{e_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{e_{\max}}\right)^2 \leq 1. \quad (10.160)$$

Аналогичному условию удовлетворяют случайные величины ε_x и ε_y :

$$\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{\max}}\right)^2 \leq 1. \quad (10.161)$$

При исследовании возмущенного движения системы под действием случайных величин $e_x, e_y, \varepsilon_x, \varepsilon_y$, удовлетворяющих условиям (10.160), (10.161), требуется определить области возможных значений вектора состояния системы в момент выхода тела. Считая углы малыми, получим следующие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} [J_x \dot{\theta}] + \alpha l^2 \ddot{\theta} + c_1 l^2 \dot{\theta} = M_x - m_1 g z; \quad (10.162)$$

$$\frac{d}{dt} [J_y \dot{\psi}] + \alpha l^2 \ddot{\psi} + c_1 l^2 \dot{\psi} = M_y \quad (J_x = J_y). \quad (10.163)$$

Поскольку

$$J = J_x = J_y = J_0 + J_{01} + m_1 \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2,$$

где J_0 — момент трубы относительно точки 0; J_{01} — момент тела относительно оси, перпендикулярной оси z и проходящей через центр тяжести тела, после преобразований получаем

$$\ddot{\theta} + a_{11}\dot{\theta} + a_{12}\theta = b_0 + b_{11}\varepsilon_y + b_{12}\varepsilon_x; \quad (10.164)$$

$$\ddot{\psi} + a_{21}\dot{\psi} + a_{22}\psi = b_{21}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y, \quad (10.165)$$

где

$$a_{11} = \frac{2m_1 \left(z + \frac{l_1}{2} \right) \dot{z} + \alpha l^2}{J}; \quad a_{12} = \frac{c_1 l_1}{J};$$

$$a_{21} = a_{11}, \quad a_{22} = \frac{c_2 l^2}{J}; \quad b_0 = \frac{m_1 g z}{J};$$

$$b_{11} = b_{21} = \frac{Rz}{J}; \quad b_{12} = b_{22} = -\frac{R}{J}.$$

Считая, что малые колебания системы и малые отклонения линии действия силы от оси z практически не влияют на движение тела по оси z , при нулевых начальных данных получаем

$$z = \frac{R}{2m_1} t^2. \quad (10.166)$$

Уравнения (10.164) и (10.165) связаны через правые части, куда входят случайные величины, удовлетворяющие условиям (10.160) и (10.161). Если ввести вектор

$$y = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \psi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad (10.167)$$

то уравнения (10.164), (10.165) можно записать в виде

$$\dot{y} + A(t)y = B_1(t)f_1 + B_2(t)f_2 + b_0(t), \quad (10.168)$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_y \\ e_x \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (10.168) можно получить только численными методами, так как элементы матрицы $A(t)$ зависят от времени.

Общий вид решения при нулевых начальных данных имеет вид

$$y = \int_0^{t_k} G(t_k, t) [B_1(f_1 + f_2) + b_0] dt. \quad (10.169)$$

Матрицу $K(t_k, t)$ можно определить из решения однородного уравнения, сопряженного с однородным уравнением:

$$\frac{dz}{d\tau} + A^* z = 0 \quad (\tau = t_k - t). \quad (10.170)$$

Фундаментальная матрица решения уравнения (10.170) $K(\tau)$ связана с матрицей $G(t_k, t)$ соотношением

$$K^*(\tau) = G(t_k, t). \quad (10.171)$$

Ограничимся определением проекции четырехмерной области на фазовые плоскости $(\dot{\theta}_k, \dot{\psi}_k)$ и (θ_k, ψ_k) .

Возьмем произвольный вектор $\alpha_* = \alpha_*(\cos \beta, \sin \beta, 0, 0)$, лежащий в плоскости $(\dot{\theta}, \dot{\psi})$, и найдем проекцию вектора состояния системы y на направление, определяемое вектором α_* :

$$y_{\alpha_*} = (y \cdot \alpha_*) = \int_0^{t_k} K(t_k, t) [C_1(f_1 + f_2) + b_0] \cdot \alpha_* dt. \quad (10.172)$$

Для построения области требуется определить максимум проекции y_{α_*} при дополнительных условиях (10.160) и (10.161), наложенных на векторы f_1 и f_2 , т.е. надо найти максимум функционала вида

$$J = y_{\alpha_*} - \frac{\lambda_1}{2} [(B_1 f_1 \cdot f_1) - 1] - \frac{\lambda_2}{2} [(C_2 f_2 \cdot f_2) - 1], \quad (10.173)$$

где λ_1, λ_2 — множители Лагранжа;

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{\max}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_{\max}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_{\max}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e_{\max}^2} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с теорией, изложенной в § 10.7, максимальное значение функционала J равно сумме множителей Лагранжа:

$$J_{\max} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (10.174)$$

определяемых из соотношений

$$\begin{aligned} (C_1^{-1} D \alpha_* \cdot D \alpha_*) &= \lambda_1^2; \\ (C_2^{-1} D \alpha_* \cdot D \alpha_*) &= \lambda_2^2, \end{aligned} \quad (10.175)$$

где

$$D = \int_0^{t_k} (KB_1)^* d\tau.$$

Из выражений (10.175) следует, что достаточно один раз определить численные значения матрицы D , чтобы получить значения λ_i для любого направления вектора α_* . Векторы f_1 и f_2 , которые сообщают проекции вектора y на направление вектора α_* максимальное значение, равны:

$$f_{1m} = \frac{1}{\lambda_1} C_1^{-1} D \alpha_*; \quad f_{2m} = \frac{1}{\lambda_2} C_2^{-1} D \alpha_*. \quad (10.176)$$

Подставив значения f_{1m} и f_{2m} в решение (10.169), получим

$$y_m = D^* f_{1m} + D^* f_{2m} + \int_0^{t_k} K b_0 d\tau. \quad (10.177)$$

Для построения проекции области на плоскость $(\dot{\theta}_k, \dot{\psi}_k)$ достаточно определить две проекции вектора y_m (y_{1m} и y_{2m}):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_k = y_{1m} &= d_{11}^{(*)} \varepsilon_{ym} + d_{12}^{(*)} \varepsilon_{xm} + d_{13}^{(*)} e_{ym} + d_{14}^{(*)} e_{xm} + y_{1k}; \\ \dot{\psi}_k = y_{2m} &= d_{21}^{(*)} \varepsilon_{ym} + d_{22}^{(*)} \varepsilon_{xm} + d_{23}^{(*)} e_{ym} + d_{24}^{(*)} e_{xm} + y_{2k}, \end{aligned} \quad (10.178)$$

где $\varepsilon_{ym}, \varepsilon_{xm}, e_{ym}, e_{xm}$ — компоненты векторов f_{1m} и f_{2m} (10.176).

Каждой паре чисел y_{1m} и y_{2m} на плоскости $(\dot{\theta}_k, \dot{\psi}_k)$ соответствует точка границы проекции области. В выражения для проекций y_{1m} и y_{2m} (10.178) входят неслучайные составляющие y_{1k} и y_{2k} , которые при построении области можно не учитывать, так как они не влияют на форму области. Числовые значения параметров, входящих в уравнения движения (10.164), (10.165) и условия (10.160), (10.161), следующие:
 $l = 6$ м; $l_1 = 1$ м; $m_1 g = 600$ Н; $J_0 = 4 \cdot 10^3$ кг · м²; $J_{01} = 50$ кг · м²;
 $c_2 = 4 \cdot 10^6$ Н/м; $\alpha = 0$; $e_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\varepsilon_{\max} = 10^{-3}$ рад; $R = 10^6$ Н; $t_k = 0,49$ с.

Изменяя α (рис. 10.26) от 0 до 360° и определяя для каждого значения α y_{1m} и y_{2m} (практически для ряда дискретных значений α), получаем проекцию области возможных значений

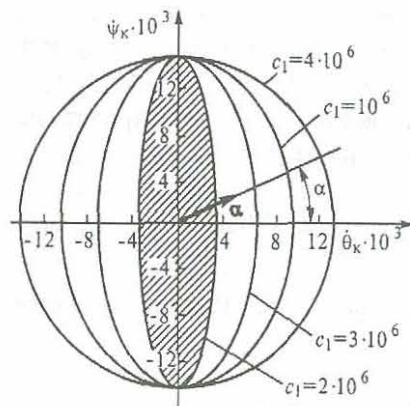


Рис. 10.26

(рис. 10.26) угловых скоростей оси тела в момент выхода из трубы.

На рис. 10.26 приведена область для ряда значений жесткости c_1 . Область существенно зависит от параметров системы, в данном случае от жесткости (при фиксированном значении c_2). Существует такое значение c_1 , при котором область становится минимальной. Это значение c_1 можно считать оптимальным (так как в технических задачах желательно,

чтобы область возможных значений вектора возмущенного движения системы была минимальной).

§ 10.7. Определение максимальных значений линейных функционалов при независимых возмущениях

Часто при исследовании движения динамической системы требуется установить экстремальные значения некоторой функции, характеризующей качество процесса и зависящей от вектора y возмущенного состояния системы в фиксированный момент времени t_k , например

$$J = L(y_k). \quad (10.179)$$

Вектор y удовлетворяет уравнению вида

$$\dot{y} + Ay = Bf, \quad (10.180)$$

а компоненты f_i вектора f удовлетворяют ограничениям (10.18) или (10.23).

В прикладных задачах функция $L(y_k)$ представляет собой некоторую числовую оценку (критерий качества процесса), характеризующую отклонение процесса от заданного состояния. В этих случаях вектор возмущенного состояния y_k рас-

сматривается как малый вектор и функцию $L(y_k)$ можно разложить в ряд

$$L(y_k) = (L_k, y_k) + (L_0 y_k, y_k) + \Delta L', \quad (10.181)$$

где (L_k, y_k) — линейная часть разложения, представленная в виде скалярного произведения; $(L_0 y_k, y_k)$ — квадратичная часть разложения; L_k — вектор с компонентами $\left(\frac{\partial L}{\partial y_{ki}}\right)_{y_{ki}=0}$; L_0 —

матрица с элементами $\frac{\partial^2 L}{\partial y_{ki} \partial y_{ki}}|_{y_{ki}=0} = 0$; $\Delta L'$ — оставшая сумма

ряда.

Например, в § 10.2 было рассмотрено движение ракеты, на которую действует случайный возмущающий момент M_B , ограниченный по модулю (см. рис. 10.13). Такой момент может возникать при действии случайных порывов ветра или при случайных эксцентриситетах тяги. Получить информацию о случайном воздействии ветра, необходимую для применения методов теории случайных процессов, как правило, очень сложно, а пренебречь эффектом от возможного действия ветра нельзя. Поэтому возникает необходимость в оценке максимально возможного эффекта действия ветра при ограниченном объеме информации о случайном ветре. Такой информацией является информация о максимально возможных скоростях ветра в данном географическом месте, которая позволяет определить область возможных значений возмущающего момента M_B (см. рис. 10.14).

В примере 10.2 была получена область возможных значений угла φ и $\dot{\varphi}$ в момент времени t_k . Эти значения можно рассматривать как угловое отклонение осевой линии ракеты (и ее первой производной) от номинального значения, т.е. φ_k и $\dot{\varphi}_k$ можно считать малыми величинами. Если под моментом времени t_k понимать момент окончания действия силы R , то дальнейшее движение тела будет происходить по траектории, отличной от расчетной. Расчетная траектория, соответствующая расстоянию x_0 по оси x , кончается в точке A (рис. 10.27). Возможные траектории при прочих равных условиях зависят

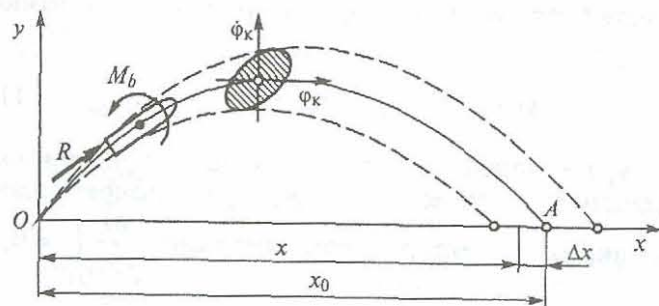


Рис. 10.27

от φ_k и $\dot{\varphi}_k$. Если обозначить через Δx отклонения точек падения тела от точки A , то Δx есть функция φ_k и $\dot{\varphi}_k$. Вследствие ограниченности области возможных значений $(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)$ и времени движения на пассивном участке траектории разброс по дальности $\Delta x(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)$ тоже есть ограниченная функция. Примем, что $\Delta x_{\max} \ll x$. Разложив функцию $x(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)$ в ряд Тейлора и ограничившись только линейной частью разложения, получим

$$\Delta x(\varphi_k, \dot{\varphi}_k) = \frac{\partial x}{\partial \varphi_k} \varphi_k + \frac{\partial x}{\partial \dot{\varphi}_k} \dot{\varphi}_k \quad (10.182)$$

или

$$J = (\mathbf{L}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k), \quad (10.183)$$

где $\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi_k} \\ \frac{\partial x}{\partial \dot{\varphi}_k} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\varphi}_k = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{pmatrix}$ — компоненты вектора $\mathbf{L}_k$ считаются известными.

Из (10.183) следует, что Δx представляет собой линейный функционал, зависящий от вектора $\boldsymbol{\varphi}_k$. Требуется определить экстремальное значение Δx при известной области возможных значений случайного возмущающего момента M_b и возможный эффект (наихудший) от действия случайного ветра.

В общем случае данная задача формулируется следующим образом: в фиксированный момент времени t_k требуется определить экстремальное значение линейного функционала вида

$$J = (\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{y}_k), \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k) \quad (10.184)$$

при условии, что вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет векторно-матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{f} \quad (\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0), \quad (10.185)$$

а компоненты вектора $\mathbf{f}$ — условиям (10.18) и (10.23). Вектор $\mathbf{L}_k$ заданный, причем компоненты вектора $\mathbf{L}_k$ линейно независимы, т.е. соотношение $\sum_{i=1}^n L_{ki} \alpha_i$ может выполняться только

при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Рассмотрим случай, когда возмущения f_j независимы, т.е. удовлетворяют условиям (10.18). Умножим скалярное уравнение (10.185) на некоторый вектор $\mathbf{L}$:

$$(\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{y}}) + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \mathbf{y}) = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}). \quad (10.186)$$

Первое слагаемое в левой части уравнения (10.186) преобразуем к виду

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{y})^* - (\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{y}). \quad (10.187)$$

Уравнение (10.186) с использованием (10.187) принимает вид

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{y})^* - (\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \mathbf{y}) = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}). \quad (10.188)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (10.188) по t :

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{y})|_{t=t_k} - (\mathbf{L} \cdot \mathbf{y})|_{t=0} + \int_0^{t_k} [(\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \mathbf{y}) - (\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{y})] dt = \int_0^{t_k} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}) dt. \quad (10.189)$$

Выражение под интегралом можно преобразовать к виду

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \mathbf{y}) - (\mathbf{L} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{A}^* \mathbf{L} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{L} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{A}^* \mathbf{L} - \dot{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{y}. \quad (10.190)$$

Потребуем, чтобы вектор $\mathbf{L}$ в момент времени t_k был равен вектору $\mathbf{L}_k$. Из соотношения (10.189) окончательно имеем

$$j = (\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{y}_k) = \int_0^{t_k} (\mathbf{L} - \mathbf{A}^* \mathbf{L}) \cdot \mathbf{y} \cdot d\tau + \int_0^{t_k} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}) d\tau + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0). \quad (10.191)$$

Потребуем, чтобы введенный вектор $\mathbf{L}$ удовлетворял уравнению

$$\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{A}^* \mathbf{L} = 0. \quad (10.192)$$

Окончательно получаем выражение для функционала

$$J = \int_0^{t_k} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}) d\tau + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0). \quad (10.193)$$

Для решения уравнения (10.192) лучше перейти к переменной $\tau_1 = t_k - \tau$ (при $\tau_1 = 0$ $K(0) = E$):

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\tau_1} + \mathbf{A}^* \mathbf{L} = 0. \quad (10.194)$$

Решение уравнения (10.194) (при $\tau_1 = 0$ $K(0) = E$) имеет вид

$$\mathbf{L} = K(\tau_1) \mathbf{L}_k. \quad (10.195)$$

После всех преобразований получаем

$$J_1 = \int_0^{t_k} (K(\tau_1) \mathbf{L}_k \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}) d\tau_1 + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0),$$

или

$$J_1 = \int_0^{t_k} (B^* K(\tau_1) \mathbf{L}_k \cdot \mathbf{f}) d\tau_1 + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0). \quad (10.196)$$

Вектор $\mathbf{L}_0$ получается из (10.195) при $\tau_1 = t_k$, т.е.

$$\mathbf{L}_0 = K(t_0) \mathbf{L}_k. \quad (10.197)$$

Если вектор начальных данных $\mathbf{y}_0$ равен нулю, имеем

$$J_1 = \int_0^{t_k} (B^* K(\tau_1) \mathbf{L}_k \cdot \mathbf{f}) d\tau_1. \quad (10.198)$$

При случайных функциях с постоянными во времени границами ($f_{il} = \pm a_i$) имеем

$$J_1 = \int_0^{t_k} |B^* K(\tau_1)| d\tau_1 \mathbf{L}_k \cdot \mathbf{a}. \quad (10.199)$$

Из соотношения (10.198) легко установить закон изменения компонентов вектора $\mathbf{f}$, сообщающих функционалу J максимальное значение. В скалярной форме выражение (10.196) имеет вид

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^{t_k} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} L_{kj} f_i \right) d\tau_1 + \sum_{i=1}^n (L_{0i} y_{0i}), \quad (10.200)$$

где p_{ij} — элементы матрицы $P = B^* K(\tau_1)$.

Максимум выражения $\sum_{i=1}^n (L_{0i} y_{0i})$ найдем, определив y_{0i} из условий:

$$y_{0i} = y_{iM}, \text{ если } L_{0i} > 0;$$

$$y_{0i} = y_{iM}, \text{ если } L_{0i} < 0.$$

Пусть τ_{ik} — значения времени, где подынтегральная функция $\sum_{j=1}^n p_{ij} L_{kj}$ меняет знак.

Максимальное значение первого слагаемого правой части (10.200) определится по формуле

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{t_k} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} L_{kj} f_{1i} \right) d\tau_1 = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{\rho} \int_0^{t_{i,k+1}} \left[\sum_{j=1}^n p_{ij} L_{kj} \right] \begin{Bmatrix} M_i \\ m_i \end{Bmatrix} d\tau_1 \right\}. \quad (10.201)$$

Под интегралом на каждом из интервалов от $t_{i,k}$ до $t_{i,k+1}$ будет или функция M_i , или m_i — в зависимости от знака функции:

$$\left(\sum_{j=1}^n p_{ij} L_{kj} \right) = \delta_i. \quad (10.202)$$

Если на интервале $(t_{i,k}, t_{i,k+1}) \delta_i > 0$, то под интегралом в правой части выражения (10.201) будет M_i , если $\delta_i < 0$, то m_i .

Изложенный метод дает возможность определить не только максимум J_1 , но и наилучший закон изменения функции f_i . Если границы областей возможных значений f_i от времени не зависят, т.е. $f_i = \pm a_i$, то выражение для максимального значения J_1 принимает вид

$$J_1 = \sum_{i=1}^n a_i \int_0^{t_k} |\delta_i| d\tau_i + m \sum_{i=1}^n L_{0i} y_{0i}. \quad (10.203)$$

При определении максимального значения J_1 были установлены законы изменения функций f_i , которые сообщают J_1 максимальное значение. Если эти законы изменения f_i поставить в выражение (10.25), то получится некоторый вектор y . Будет ли этот вектор находиться внутри области или он будет касаться поверхности области возможных значений?

Если вектор y для найденных законов f_i будет находиться внутри области возможных значений, то это значит, что максимум функционала J_1 достигается на «внутренних» векторах y ; если вектор y для найденных f_i касается поверхности, ограничивающей область, то максимум достигается на векторах, определяющих предельную поверхность области отклонений.

Покажем, что максимальное значение линейного функционала $J = (L_k \cdot y_k)$ достигается на векторах, определяющих пре-

дельную поверхность области возможных значений вектора состояния системы. Для большей наглядности рассмотрим частный случай, когда вектор y_k имеет две компоненты. В этом случае область возможных значений ограничена плоской кривой на фазовой плоскости (рис. 10.28). Предположим, что максимум J соответствует вектору y_k (рис. 10.28):

$$J = (L_k \cdot y_k) = \max. \quad (10.204)$$

Любой вектор y_k , совпадающий по направлению с вектором $y_{k \max}$, может быть записан в виде

$$y_k = k y_{k \max}, \quad (10.205)$$

где k — скалярный множитель, меняющийся от нуля до единицы.

Подставив y_k в выражение (10.204), получим

$$J = k (L_k \cdot y_{k \max}). \quad (10.206)$$

Из (10.206) следует, что для любого вектора y_k , совпадающего по направлению с вектором $y_{k \max}$, для данного угла значение функционала J может быть только меньше, чем для вектора $y_{k \max}$, определяющего границу области, что и требовалось доказать.

Определим максимальное значение линейного функционала в случае нескольких участков движения. Рассмотрим движение системы на интервале $(0, t_k)$, когда имеется ряд интервалов времени (t_i, t_{i+1}) , на которых действуют разные случайные возмущения f_i , причем векторы f_i могут иметь разную размерность (считается, что размерность векторов f_i меньше размерности уравнений движения системы). Рассмотрим вначале случай, когда размерность уравнений движения системы на всех интервалах движения одна и та же. Определим максимальное значение функционала J в конце движения (при $t = t_k$), которое зависит от всех этапов движения. На каждом

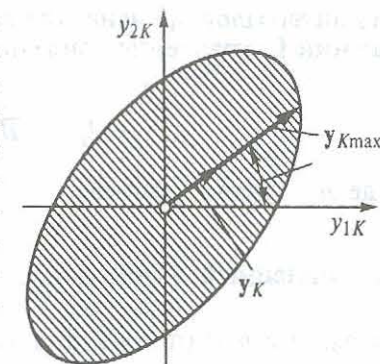


Рис. 10.28

из интервалов времени, где действует вектор случайных возмущений $\mathbf{f}_i$, уравнение движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{y}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{f}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.207)$$

где n — число участков.

$$\text{Линейный функционал (10.196)} \quad J = \int_0^{t_k} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \mathbf{f}) d\tau + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0)$$

связем с n -м (последним) участком движения:

$$J_n = \int_0^{t_{k_n}} (\mathbf{L}_n \cdot \mathbf{B}_n \mathbf{f}_n) d\tau + (\mathbf{L}_{0n} \cdot \mathbf{y}_{0n}(0)). \quad (10.208)$$

Значение $\mathbf{L}_n(t_{k_n})$ известно, поэтому из уравнения (10.134) можно найти $\mathbf{L}_n(0)$.

В свою очередь, скалярное произведение $(\mathbf{L}_n(0) \cdot \mathbf{y}_n(0))$ представляет собой значение функционала на предыдущем участке движения, т.е.

$$(\mathbf{L}_{0n} \cdot \mathbf{y}_n(0)) = \int_0^{t_{k_{n-1}}} (\mathbf{L}_{n-1} \cdot \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}) d\tau + (\mathbf{L}_{n-1} \cdot \mathbf{y}_{n-1}(0)), \quad (10.209)$$

и так далее, поэтому можно получить выражение для функционала, зависящего от движения системы на всем интервале $(0, t_k)$:

$$J = \sum_{i=1}^n \int_0^{t_{k_i}} (\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{f}_i) d\tau + (\mathbf{L}_{01} \cdot \mathbf{y}_1(0)). \quad (10.210)$$

Здесь $\mathbf{L}_{01}, \mathbf{y}_1(0)$ — значения векторов $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{y}_1$ в начале первого интервала движения.

Максимальное значение функционала (10.210)

$$J_{\max} = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{t_{k_i}} (\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{f}_i) d\tau \right)_{\max} + (\mathbf{L}_{01} \cdot \mathbf{y}_1(0))_{\max}, \quad (10.211)$$

$$\text{где } \sum_{i=1}^n t_{k_i} = t_k.$$

Метод определения максимального значения каждого из слагаемых, входящих в правую часть выражения (10.210), изложен выше.

Механическая система с изменяющейся размерностью вектора состояния $\mathbf{y}$ показана на рис. 10.29. По стержню движется тело, которое имеет контакт со стержнем в двух точках A и B . В начале движения система имеет одну степень свободы (рис. 10.29, а), а после потери контакта передней опоры (точка B) система имеет две степени свободы (рис. 10.29, б). Возможны и механические системы, когда размерность вектора $\mathbf{y}$ на первом участке движения больше, чем на втором (см. рис. 10.21).

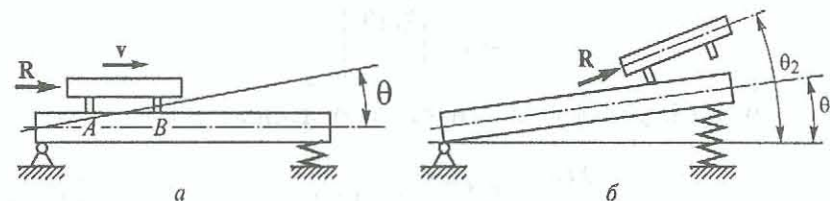


Рис. 10.29

Рассмотрим систему, когда имеется два участка движения, причем для определенности примем, что размерность n вектора состояния $\mathbf{y}_1$ на первом участке движения больше размерности v вектора $\mathbf{y}_2$. Рассмотрим второй участок движения системы и связанный с ним некоторый вектор $\mathbf{L}_2$, имеющий размерность вектора $\mathbf{y}_2$. Вектор $\mathbf{L}_2$ удовлетворяет сопряженному уравнению (10.194). На втором участке функционал

$$J_2 = \int_0^{t_k - t_{k_1}} (\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{B}_2 \mathbf{f}_2) d\tau + (\mathbf{L}_{02} \cdot \mathbf{y}_2(0)), \quad (10.212)$$

где t_{k_1} — время движения системы на первом участке.

Вектор $y_2(0)$ равен вектору y_{11} в конце первого участка, где y_{11} — вектор с компонентами, сохраняющими свое значение и на втором участке, т.е. вектор y_2 является «продолжением» вектора y_{11} . Так как вектор y_1 по условию задачи имеет размерность n (больше размерности вектора y_2), то при $t = t_{k_1}$

$$y_1(t_{k_1}) = \begin{bmatrix} y_{11}(t_{k_1}) \\ y_{12}(t_{k_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(0) \\ y_{12}(t_{k_1}) \end{bmatrix}. \quad (10.213)$$

Вектор y_{12} имеет размерность $n - v$.

Вектор $L_2(0)$ находим из решения уравнения

$$\frac{dL_2}{d\tau} + A_2^* L_2 = 0 \quad (\tau = (t_k - t_{k_1}) - t). \quad (10.214)$$

При $\tau = 0$ вектор L_2 задан.

Введем вектор L_{1k} с n -компонентами

$$L_{1k} = \begin{bmatrix} L_2(0) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.215)$$

Вектор L_{1k} есть вектор начальных данных для уравнения

$$\frac{dL_1}{d\tau} + A_1^* L_1 = 0 \quad (\tau = t_{k_1} - t). \quad (10.216)$$

При $\tau = 0$ $L_1 = L_{1k}$. Представим вектор $y_1(t_{k_1})$ в виде

$$y_1(t_{k_1}) = \begin{bmatrix} y_1''(t_k) \\ y_1''(t_{k_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(0) \\ y_1''(t_{k_1}) \end{bmatrix} \quad (10.217)$$

и рассмотрим скалярное произведение $(L_{1k} y_{1k})$, равное, согласно (10.215) и (10.217),

$$(L_{1k} \cdot y_1(t_{k_1})) = (L_{02} \cdot y_2(0)). \quad (10.218)$$

В свою очередь, скалярное произведение (10.218) есть функционал, связанный с первым участком движения, т.е.

$$J_1 = (L_{1k} \cdot y_{1k}) = \int_0^{t_{k_1}} (L_1 \cdot B_1 f_1) d\tau + (L_{01} \cdot y_1(0)), \quad (10.219)$$

поэтому окончательно получаем выражение для функционала J для двух участков движения:

$$J = \int_0^{t_{k_1}} (L_1 \cdot B_1 f_1) d\tau + \int_{t_{k_1}-t_{k_1}}^{t_k-t_{k_1}} (L_2 \cdot B_2 f_2) d\tau + (L_{01} \cdot y_1(0)). \quad (10.220)$$

§ 10.8. Максимальное значение линейного функционала при зависимых возмущениях

Определим максимальное значение линейного функционала при зависимых случайных возмущениях, удовлетворяющих условию (10.23).

Требуется найти максимум функционала

$$J = \int_0^{t_k} (L \cdot B f) d\tau + (L_0 \cdot y_0). \quad (10.221)$$

Вектор возмущений f можно записать в виде

$$f = H(t) f_0,$$

где $H(t)$ — диагональная матрица с непрерывно зависящими от времени элементами; f_0 — вектор, компоненты которого удовлетворяют условию

$$(C_1 f_0 \cdot f_0) \leq 1. \quad (10.222)$$

Аналогичному условию удовлетворяют и компоненты вектора y_0 :

$$(C_0 y_0 \cdot y_0) \leq 1.$$

Воспользовавшись множителями Лагранжа, получим функционал вида

$$J_1 = \int_0^{t_k} (\mathbf{L} \cdot B H \mathbf{f}_0) d\tau + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0) - \frac{\lambda}{2} [(C_0 \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_0) - 1] - \\ - \frac{\mu}{2} [(C_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{y}_0) - 1] = 0. \quad (10.223)$$

Так как $\mathbf{L} = K \mathbf{L}_0$, то

$$J_1 = \int_0^{t_k} [(BH)^* K \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{f}_0] d\tau + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0) - \frac{\lambda}{2} [(C_0 \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_0) - 1] - \\ - \frac{\mu}{2} [(C_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{y}_0) - 1] = 0. \quad (10.224)$$

Функционал (10.224) аналогичен выражению (10.106) для проекции вектора состояния системы на произвольное направление, определяемое вектором $\mathbf{e}_1$. Поэтому его максимальное значение равно

$$J_{1 \max} = \lambda + \mu, \quad (10.225)$$

где $\lambda^2 = (C_1^{-1} D \mathbf{L}_0 \cdot D \mathbf{L}_0)$; $D = \int_0^{t_k} (BH)^* K d\tau$; $\mu^2 = (C_1^{-1} \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{L}_0)$.

Рассмотрим случай, когда компоненты f_i вектора возмущений являются случайными разрывными функциями, ограниченными по модулю, как, например, независимые случайные возмущения (см. рис. 10.1). В этом случае вектор $\mathbf{f}$ можно представить в виде

$$\mathbf{f} = H(t) S(t) \mathbf{f}_0, \quad (10.226)$$

где $H(t)$ — диагональная матрица, аналогичная матрице C_1 , входящей в (10.222); S — диагональная матрица, элементами которой являются единичные разрывные функции $s_{ii}(t)$.

Функции $s_{ii}(t)$ могут принимать значения ± 1 , причем моменты разрыва функций случайны. Физически это означает, что компоненты f_i мгновенно могут менять свой знак в случайные моменты времени, в то время как компоненты вектора

(10.222) изменяются во времени непрерывно. Условие (10.23) для векторов (10.226) преобразуется к виду

$$(C_1(t) \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0) \leq 1, \quad (10.227)$$

где

$$C_1(t) = (HS)^* C(t) (HS).$$

Если матрица $C(t)$ диагональная, то и матрица $C_1(t)$ диагональная. Например, для случая, когда вектор $\mathbf{f}$ имеет три компонента, матрица $C_1(t)$ равна

$$C_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{h_{11}^2}{|\mathbf{f}|_{\max}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_{22}^2}{|\mathbf{f}|_{\max}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_{33}^2}{|\mathbf{f}|_{\max}^2} \end{bmatrix},$$

где h_{ii} — элементы матрицы H .

В этом частном случае (когда матрица $C(t)$ диагональная) условие (10.222) не зависит от s_{ii} , так как в элементы матрицы $C_1(t)$ входят s_{ii} , которые равны единице.

Линейный функционал (10.223) с учетом (10.226) принимает вид

$$J_1 = \int_0^{t_k} (\mathbf{L} \cdot BHS \mathbf{f}_0) d\tau + (\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{y}_0) - \frac{\lambda}{2} [(C_1 \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{f}_0) - 1] - \\ - \frac{\mu}{2} [(C_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{y}_0) - 1]. \quad (10.228)$$

Максимальное значение J_1 (10.228)

$$J_{1 \max} = \lambda_m + \mu, \quad (10.229)$$

но в отличие от аналогичного выражения (10.225) множитель Лагранжа λ_m определяется с учетом возможного разрывного изменения во времени компонент вектора $\mathbf{f}$.

В зависимости от разрывного изменения f_j во времени множитель Лагранжа λ может принимать различные значения, но среди возможных разрывных изменений f_j есть такие законы изменения, при которых λ достигает максимума. Для этого значения λ введено обозначение λ_m . Найдем λ_m , рассмотрев выражения для квадрата множителя Лагранжа (появление к (10.225)):

$$\lambda_m^2 = (C_1^{-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \quad (\mathbf{b} = D^{(0)} \mathbf{L}_0), \quad (10.230)$$

где

$$D^{(0)} = \int_0^{t_k} (BHS)^* K d\tau.$$

Элементы $b_{ij}^{(1)}$ и d_{ij} матриц $B^{(1)} = (BHS)^*$ и $D = BK$ соответственно равны:

$$b_{ij}^{(1)} = h_{il} s_{li} b_{ji}; \quad d_{ij} = h_{il} s_{li} \left(\sum_{\rho=1}^n b_{\rho i} k_{\rho j} \right).$$

Поэтому компоненты вектора $\mathbf{b}$ имеют вид

$$b_k = \int_0^{t_k} \left(\sum_{v=1}^n d_{kv} l_{0v} \right) h_{kk} s_{kk} d\tau, \quad (10.231)$$

Так как матрица C_1^{-1} диагональная, а ее элементы положительны, то максимальное значение квадратичной формы (10.230), или, что то же самое, квадрата множителя Лагранжа λ_m , достигается, когда компоненты вектора $\mathbf{b}$ принимают максимальные значения, что имеет место при следующих законах изменения функций:

$$s_{kk}^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{при } g_k > 0, \\ -1 & \text{при } g_k < 0, \end{cases} \quad (10.232)$$

где

$$g_k = \left(\sum_{v=1}^n d_{kv} l_{0v} \right) h_{kk}.$$

Моменты времени τ_p , когда функция s_{kk} меняет знак (точки разрыва), находятся из условий

$$g_k = 0. \quad (10.233)$$

Определив $s_{kk}^{(m)}$, находим вектор $\mathbf{f}_0^{(m)}$, соответствующий этим законам. При определении максимального значения J_1 используется условие (10.107)

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{f}_0} = 0,$$

которое в рассматриваемой задаче приводит к соотношению

$$\int_0^{t_k} (BHS)^* K \mathbf{L}_0 d\tau - \lambda_m C_1 \mathbf{f}_0^{(m)} = 0. \quad (10.234)$$

Определив максимальное значение λ_m и законы изменения единичных функций $s_{kk}^{(m)}$ (10.232), находим вектор $\mathbf{f}_0^{(m)}$:

$$\mathbf{f}_0^{(m)} = \frac{1}{\lambda_m} C_1^{-1} \int_0^{t_k} (BHS)^* K \mathbf{L}_0 d\tau. \quad (10.235)$$

Вектор $\mathbf{f}^{(m)}$, при котором функционал J (10.221) с учетом разрывного изменения во времени компонент $f_j^{(m)}$ достигает максимального значения,

$$\mathbf{f}^{(m)} = H S^{(m)} \mathbf{f}_0^{(m)}. \quad (10.236)$$

Рассмотрим случай, когда в процессе движения системы на разных интервалах времени действуют разные случайные возмущения, ограниченные по модулю и удовлетворяющие условиям

$$(C^{(j)} f_0^{(j)} \cdot f_0^{(j)}) \leq 1 \quad (C^{(j)} = (HS)^* C_j HS), \quad (10.237)$$

где индекс j соответствует j -му интервалу движения системы.

Моменты времени начала (t_{0j}) и конца (t_{kj}) интервалов известны. Ограничимся случаем, когда размерность вектора состояния системы на всех интервалах движения остается неизменной. Определим максимальное значение линейного

функционала J для момента времени $t_k \left(t_k = \sum_{j=1}^m t_{kj} \right)$ с учетом

действующих на систему возмущений $f^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), которые удовлетворяют условиям (10.237).

Для каждого из интервалов (t_{0j}, t_{kj}) движения можно получить функционал, аналогичный (10.221):

$$J^{(j)} = \int_0^{t_k} (S^{(j)} D^{(j)*} L^{(j)} \cdot f_0^{(j)}) d\tau_1 + (L_0^{(j)} \cdot y_0^{(j)}), \quad (10.238)$$

где

$$D^{j*} = (B^{(j)} H^{(j)})^*.$$

Выражение для функционала $J^{(j)}$ можно представить в виде

$$J^{(j)} = \int_0^{t_k} (S^{(j)} D^{(j)*} L^{(j)} \cdot f_0^{(j)}) d\tau_1 + J^{(j-1)}, \quad (10.239)$$

где

$$J^{(j-1)} = \int_0^{t_{k,j-1}} (S^{(j-1)} D^{(j-1)*} L^{(j-1)} \cdot f_0^{(j-1)}) d\tau_1 + (L_0^{(j-1)} \cdot y_0^{(j-1)}). \quad (10.240)$$

Ограничимся случаем, когда на каждом из участков действует один случайный вектор $f^{(j)}$.

Векторы $L_0^{(j)}$, входящие в (10.239), определяются из уравнений (при $\tau_1 = t_{kj}$)

$$\frac{dL^{(j)}}{d\tau_1} + A_j^* L^{(j)} = 0 \quad (L^{(j)} = K_j(\tau_1) L_k^{(j)}). \quad (10.241)$$

Известно значение вектора $L_k^{(j)}$ (в конце j -го участка движения), что позволяет определить значение вектора $L_0^{(j)}$:

$$L_0^{(j)} = K_j(t_{kj}) L_k^{(j)}, \quad (10.242)$$

который является значением вектора ($\bar{L}^{(j-1)}$) в конце предыдущего участка движения:

$$L_k^{(j-1)} = L_0^{(j)}. \quad (10.243)$$

Для последнего участка движения имеем

$$J^{(m)} = \int_0^{t_{km}} (S^{(m)} D^{(m)*} L^{(m)} \cdot f_0^{(m)}) d\tau_1 + J^{(m-1)}. \quad (10.244)$$

Исключив последовательно $J^{(m-1)}$ из (10.244) (используя рекуррентное соотношение (10.239)), получим

$$J = \sum_{j=1}^m \int_0^{t_{kj}} (S^{(j)} D^{(j)*} L^{(j)} \cdot f_0^{(j)}) d\tau_1 + (L_0^{(1)} \cdot y_0^{(1)}). \quad (10.245)$$

Интегралы, входящие в правую часть (10.245), содержат векторы $L^{(j)}$, которые удовлетворяют уравнениям (10.241). Решение уравнений можно получить, если известно значение вектора $L^{(j)}$ при $\tau_1 = 0$, т.е. известны значения $L_k^{(j)}$. Из векторов $L_k^{(j)}$ известен только вектор $L_k^{(m)}$, однако этого достаточно, чтобы получить, последовательно вычисляя, значение интегралов для каждого из участков, начиная с последнего. Решая уравнение (10.241) при $j = m$, получим $L_0^{(m)}$, который равен вектору $L_k^{(m-1)}$, вектору начальных данных для решения уравнения (10.241) на предыдущем интервале движения системы и т.д.

Так как в каждом из участков движения системы векторы $f^{(j)}$ удовлетворяют условиям (10.237)

$$(C^{(j)} f_0^{(j)} \cdot f_0^{(j)}) \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

то, не повторяя промежуточных преобразований при определении максимального значения J_1 (аналогичных ранее рассмотренному случаю с одним участком движения системы), получаем

$$J_{1 \max} = \mu + \sum_{j=1}^m \lambda_j, \quad (10.246)$$

где

$$\lambda_j^2 = [(C^{(j)})^{-1} b^{(j)} \cdot b^{(j)}];$$

$$b^{(j)} = \int_0^{t_{kj}} S^{(j)} D^{(j)} L_0^{(j)} d\tau, \quad D^{(j)} = (B^{(j)} H^{(j)})^* K_j. \quad (10.247)$$

Максимально возможное значение функционала J_1 будет достигаться, когда λ_j будут максимальные, что имеет место при следующих законах изменения единичных разрывных функций $s_{KK}^{(j)}$:

$$s_{KK}^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{при } \left(\sum_{v=1}^n d_{kv} l_{0v} h_{KK} \right) > 0; \\ -1 & \text{при } \left(\sum_{v=1}^n d_{kv} l_{0v} h_{KK} \right) < 0. \end{cases} \quad (10.248)$$

При законах изменения элементов матриц $S^{(j)}$ (10.248) компоненты векторов $b^{(j)}$ равны максимально возможным значениям, и при диагональной матрице $(C^{(j)})^{-1}$ с положительными элементами получаем максимальные значения λ_j^2 . Поэтому окончательно

$$J_{1 \max} = \mu + \sum_{j=1}^m \lambda_{j \max}. \quad (10.249)$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Дельта-функция Дирака. Рассмотрим функцию (рис. П.1)

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1+t^2} \right), \quad (\text{П.1})$$

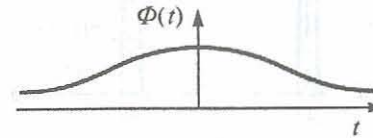


Рис. П.1

имеющую максимум при $t = 0$ и убывающую с ростом модуля $|t|$. Преобразуем функцию $\Phi(t)$, увеличив ее значение при $t = 0$ в m раз:

$$\Phi_1(mt) = \frac{1}{\pi} \frac{m}{[1+(mt)^2]}. \quad (\text{П.2})$$

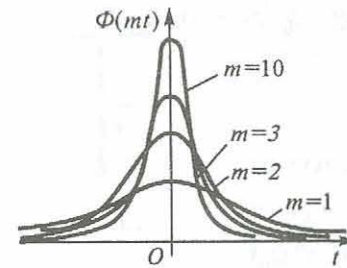


Рис. П.2

Функции $\Phi_1(mt)$ для ряда m показаны на рис. П.2. Можно показать, что интегралы от функций (П.1) и (П.2) от $-\infty$ до $+\infty$ равны единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(mt) dt = 1.$$

При неограниченном увеличении m ($m \rightarrow \infty$) получаем функцию, называемую дельта-функцией Дирака (рис. П.3):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_1(mt) = \delta(t).$$

Основные свойства δ -функции:

$$1) \delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \infty & t = 0; \\ 0 & t > 0; \end{cases} \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0; \\ \infty & t = t_0; \\ 0 & t > t_0; \end{cases} \quad (\text{П.3})$$

$$2) \delta(t) = \delta(-t);$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1;$$

$$4) \delta(t) = \delta(a\varepsilon) = \frac{1}{|a|} \delta(\varepsilon),$$

где ε — безразмерная величина.

Интегралы, содержащие δ -функцию и ее производные:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \varphi(t_0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \dot{\delta}(t - t_0) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(t) \delta(t - t_0) dt = - \dot{\varphi}(t_0),$$

где $\dot{\delta}$ — производная δ -функции.

Для производной n -го порядка получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^n(t) \varphi(t) dt = (-1)^n \varphi^n(t_0).$$

Производные δ -функции могут быть получены (наглядное представление) как предел $\Phi_1^n(m t)$ производных функций, т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_1^n(m t) = \delta^n(t).$$

Функция Хевисайда. Интеграл от δ -функции при переменном верхнем пределе

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = H(t - t_0), \quad H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0; \\ \frac{1}{2} & t = t_0; \\ 1 & t > t_0, \end{cases} \quad (\text{П.4})$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда (рис. П.4).

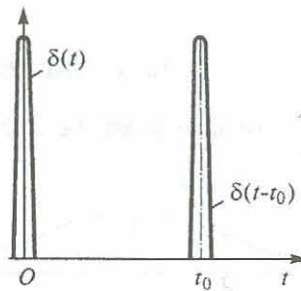


Рис. П.3

$$\frac{dH(t - t_0)}{dt} = \delta(t - t_0). \quad (\text{П.5})$$

Функция $\text{sign } t$ (рис. П.5):

$$\text{sign } t = \begin{cases} -1 & t < 0; \\ 0 & t = 0; \\ 1 & t > 0; \end{cases} \quad \text{sign}(t - t_0) = \begin{cases} -1 & t < t_0; \\ 0 & t = t_0; \\ 1 & t > t_0; \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

Рис. П.4

$$\frac{d \text{sign } t}{dt} = 2\delta(t); \quad H(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } t).$$

Функция $f(t) = |t|$ (рис. П.6):

$$|t| = t \text{sign } t; \quad \frac{d|t|}{dt} = \text{sign } t; \quad \frac{d^2|t|}{dt^2} = 2\delta(t). \quad (\text{П.7})$$

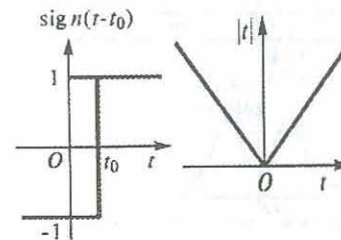


Рис. П.5

Рис. П.6

где

Приложение 2

ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ J_n

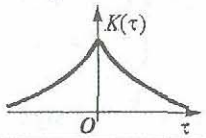
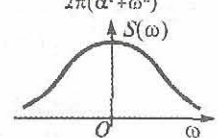
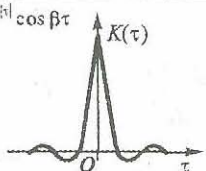
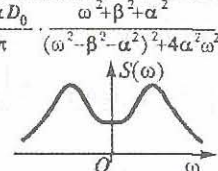
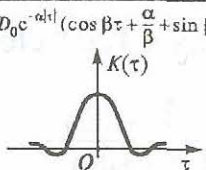
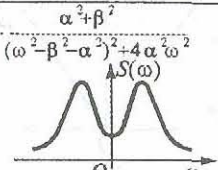
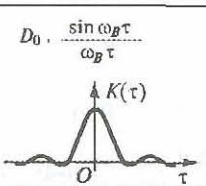
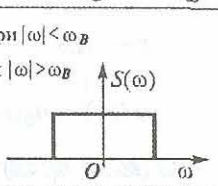
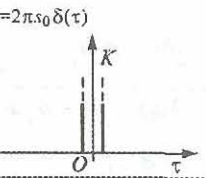
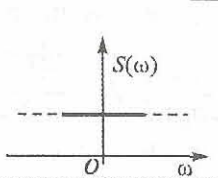
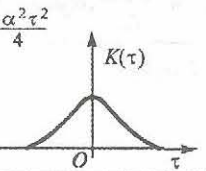
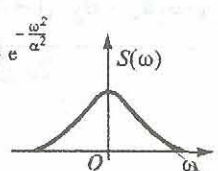
$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{|A(i\omega)|^2} d\omega,$$

$$A(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$G(i\omega) = b_0(i\omega)^{2n-2} + b_1(i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1};$$

$$J_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}; \quad J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1}; \quad J_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)};$$

$$J_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3a_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3 + a_2a_4 - a_1a_2a_3)}.$$

Корреляционные функции	Спектральные плотности
$D_0 e^{-\alpha \tau }$ 	$\frac{2\alpha D_0}{2\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$ 
$D_0 e^{-\alpha \tau } \cos \beta\tau$ 	$\frac{2\alpha D_0}{\pi} \frac{\omega^2 + \beta^2 + \alpha^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$ 
$D_0 e^{-\alpha \tau } (\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau)$ 	$\frac{2\alpha D_0}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$ 
$D_0 \frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau}$ 	$\frac{D_0}{\omega_B}$ при $ \omega < \omega_B$ 0 при $ \omega > \omega_B$ 
$K(\tau) = 2\pi s_0 \delta(\tau)$ 	
$D_0 e^{-\frac{\alpha^2 \tau^2}{4}}$ 	$\frac{2D_0}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}$ 

Гайавата ставит эксперимент

(По мотивам поэмы Г.У. Лонгфелло «Песнь о Гайавате»)

- Всюду славен Гайавата:
Он стрелок непревзойденный.
Легкий лук он поднимает —
Десять стрел взмывают к небу,
И последняя слетает
С тетивы тугой, звенящей
Прежде, чем вонзится в землю
Первая из десяти.
Все, кто видел Гайавату,
Говорили, что, бесспорно,
Совершенства он достиг.
- Но какой-то хитрый скептик
Тем не менее заметил,
Что в стрельбе не только ловкость,
Но и меткость ценят люди.
И добавил: было б лучше,
Если б славный Гайавата
В цель попал бы хоть однажды,
Пусть хоть выборка при этом
Будет меньшего объема.
- Гайавата рассердился
И сказал, что он в колледже
Посвятил себя науке,
Что статистикой зовется.
Он, себя считая вправе
Поучать своих собратьев,
Тут же лекцию прочел им.
Вспомнил он закон ошибок,
Усеченные кривые,
Информации потерю,
Заявил, что он добился
Несмещенных результатов,
И сказал, что после многих
Независимых попыток,
Даже если в их итоге
В цель ни разу не попал он, —
Все равно по средней точке

Отклонений от мишени
Можно сделать твердый вывод,
Что стрелял он безупречно
(За возможным исключением
Пресловутой меры нуль.)

4. Но упрямые индейцы
Возразили Гайавате,
Что они не понимают
Столь туманных рассуждений.
Им совсем не интересен
Результат его попыток.
И они предполагают,
Что охотник должен метко
В цель стрелять. А если будет
Он впустую тратить стрелы —
Должен сам за них платить.
5. Раздраженный Гайавата
Стал цитировать обильно
Р.А. Фишера и Итса,
Приводить работы Финни,
Книги Кемпторна Оскара,
Главы Кокрана и Кокса,
Андерсена и Банкрофта.
Он взывал к авторитетам,
Убеждая несогласных,
Что в стрельбе всего важнее
Не прямое попадание,
А научно безупречный
Статистический подход.
6. Кое-кто из возражавших
Согласился с Гайаватой,
Что в подобной точке зренья
Есть, возможно, доля смысла,
Но, пожалуй, все же лучше
Не пускаться в рассужденья,
А без промаха стрелять.
7. Наш герой в ответ на это
Предложил за луки взяться,
Чтоб строптивых оппонентов
В правоте своей уверить.
Он сказал: «Необходимо
Так построить состязанье,
Как советует учебник
Проводить эксперименты».
(Хоть научный этот способ

Применяется обычно
Для проверки качеств чая,
Но пороку, как известно,
Приложим к другим вещам.)
Гайавата разработал
Точный план соревнований,
Чтоб случайный их порядок
В соответствие пришелся
С тем характером, который
Носят множители в славной
Той теории, что ныне
Носит имя Галуа.

8. Те, кто выразил готовность
Состязаться с Гайаватой,
Были круглые невежды
В проведении испытаний
И поэтому, наверно,
Все оставшееся время
Проводили в тренировках,
Соревнуясь меж собою
Или просто в цель стреляя.
9. И во время состязанья
Результаты всех стрелявших
Были просто превосходны,
Но, увы, за исключением
(Как ни трудно мне признаться)
Результата Гайаваты.
Гайавата, как обычно,
Вверх свои направил стрелы.
Он так ловко это сделал,
Что остался несмещенным,
Но при этом, к сожаленью,
В цель ни разу не попал.
10. «Что ж, — сказали тут индейцы, —
Мы иного и не ждали».
11. Гайавата, не смущаясь,
Попросил перо, бумагу,
Произвел расчет дисперсий
И в итоге вывел цифры,
Из которых стало ясно,
Что стрелки смогли добиться
Лишь смещенных результатов,
А дисперсии при этом
Одинаковыми были
И совсем не отличались

От дисперсии, которой
Гайавата сам достиг.
(Правда, следует отметить,
Что последний этот вывод
Убедительнее был бы,
Если б в данных Гайаваты,
По которым вычислял он
Результат эксперимента,
Зафиксированы были
И прямые попадания.
К сожалению, оппоненты,
В вычислениях не смысля,
Не могли с героем спорить,
Что бывает очень часто
При анализе дисперсий.)

12. Тем не менее индейцы,
Не поверившие цифрам,
Отбрали у героя
Легкий лук его и стрелы
И сказали, что, возможно,
Гайавата в самом деле
Выдающийся статистик,
Но при этом совершенно
Бесполезный как стрелок.
Что ж касается дисперсий,
То какой-то грубый неуч
Произнес такое слово,
Что его, сказать по чести,
В статистическом издании
Я не смею повторить.
13. И теперь в лесу дрсмучем
Бродит грустный Гайавата.
Непрестанно размышляя,
Вспоминает он нормальный
Тот закон распределенья
Отклонений и ошибок,
Что лишил его навеки
Славы лучшего стрелка.
И порою он приходит
К трезвой мысли, что, наверно,
Нужно целиться точнее,
Несмотря на риск смещения,
Если все же в результате
Иногда ему удастся
Поражать стрелою цель.

Из истории борьбы за качество

МЕРОПРИЯТИЯ	ТЕКСТ ПРИКАЗА
Меры административного воздействия	«... Повелеваю хозяина Тульской оружейной фабрики Корнелу Белоглаза бить кнутом и сослать в работу в монастыри, понеже он, подлец, осме- лится войску государеву продавать негодные пищали и фузес. Старшину олдермана Фрола Фукса бить кнутом и сослать в Азов, пусть не ставит клейма на плохие ружья».
Оргмероприятия	«Приказываю ружейной канцелярии из Петербурга переехать в Тулу и денно и ночью блюсти исправность ружей.
Контроль контроля	Пусть дьяки и подьячие смот- рят, как олдерман клейма ставит, буде сомнение возьмется, самим проверять и смотреть и стрельбою.
Выборочный контроль качества	А два ружья каждый месяц стре- лять, пока не испортятся.
Система экономических и моральных стимулов повышения качества работы	Буде замечка в войсках приклю- чится, особливо при сражении, по не- догляду дьяков и подьячих, бить оных кнутами нещадно по оголенному месту: хозяину - 25 кнутов и пени по червонцу за ружье; старшину олдермана - бить до бесчувствия; старшего дьяка - от- дать в унтер-офицеры; дьяка - отдать в дисаря; подьячего - лишить воскре- сной чарки сроком на один год.
Соцкультбыт	Новому хозяину ружейной фабри- ки Демигову повелеваю постропить дьякам и подьячим избы, дабы не хуже хозяйской были. Будут хуже, пусть Демигов не обижается, повелю живота лишить.

Петр I

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсаланов А.М. Расчет элементов конструкции заданной надежности при случайных воздействиях. М., Машиностроение, 1987.
2. Augusti G., Baratta A., Casciati F. Probabilistic Methods in Structural Engineering. London, New York, Chapman and Hall.
3. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. Строительная механика ракет. М., Высшая школа, 1984.
4. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М., Наука, 1964.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. М., Высшая школа, 1980.
6. Бендат Дж., Пирсон А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. М., Мир, 1989.
7. Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
8. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М., Машиностроение, 1984.
9. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979.
10. Борн М. Физика в жизни моего поколения. М., Изд-во Иностранная литература, 1963.
11. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М., Изд-во технико-теоретической литературы, 1939.
12. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М., Высшая школа, 2000.
13. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М., Высшая школа, 2000.
14. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. /Под ред. В.В. Болотина. М., Машиностроение, 1999.
15. Гладкий В.Ф. Динамика конструкции летательного аппарата. М., Наука, 1969.
16. Гладкий В.Ф. Прочность, вибрация и надежность конструкции летательного аппарата. М., Наука, 1975.
17. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Высшая школа, 1965.
18. Гусев А.С., Светлицкий В.А. Расчет конструкций при случайных воздействиях. М., Машиностроение, 1984.
19. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучести конструкций при случайных нагрузках. М., Машиностроение, 1989.
20. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М., Наука, 1976.
21. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М., Сов. радио, 1973.
22. Канур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. М., Мир, 1980.
23. Купер Дж., Макмиллен К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. М., Мир, 1989.
24. Мэнли Р. Анализ и обработка записей колебаний: Пер. с англ. М., Машиностроение, 1972.
25. Макаров Б.П. Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М., Машиностроение, 1983.
26. Николаенко Н.А., Ульянов С.В. Статистическая динамика машиностроительных конструкций. М., Машиностроение, 1977.
27. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л., Машиностроение, 1976.
28. Проскураков В.Б. Динамика и прочность рам и корпусов транспортных машин. Л., Машиностроение, 1972.
29. Пугачев В.С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
30. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. М., Наука, 1968.
31. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем. М., Машиностроение, 1991.
32. Светлицкий В.А. Динамика старта летательных аппаратов. М., Наука, 1986.
33. Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. I. М., Высшая школа, 1987.
34. Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. II. М., Высшая школа, 1987.
35. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. 2-е изд., перераб. и доп. М., Наука, 1968.
36. Силаев А.А. Спектральная теория поддресоривания транспортных машин. 2-е изд., перераб. и доп. М., Машиностроение, 1972.
37. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы: Пер. с англ./Под ред. Л.М. Лямшева. М., Мир, 1971.
38. Справочник по вероятностным расчетам. 2-е изд., перераб. и доп. /Г.Г. Абезгауз, А.П. Тронь, Ю.Н. Копенкин, И.А. Коровина. М., Воениздат, 1970.
39. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М., Наука, 1970.
40. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М., Сов. радио, 1977.
41. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.
42. Харкевич А.А. Спектры и анализ. 4-е изд. М., Физматгиз, 1962.
43. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М., Наука, 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	6
Глава 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	19
§ 1.1. Основные понятия теории вероятностей	19
§ 1.2. Функция распределения и плотность вероятности случайной величины	24
§ 1.3. Числовые характеристики случайных величин и их основные свойства	28
§ 1.4. Законы распределения плотности вероятности	32
§ 1.5. Определение вероятности попадания нормально распределенной случайной величины на заданный участок	40
§ 1.6. Системы случайных величин и их числовые характеристики	42
§ 1.7. Комплексные случайные величины	51
§ 1.8. Числовые характеристики функций случайных аргументов	53
Глава 2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОЦЕССЫ)	56
§ 2.1. Вероятностные характеристики нестационарных случайных функций	61
§ 2.2. Системы случайных функций и их вероятностные характеристики	70
§ 2.3. Линейные преобразования случайных функций	75
§ 2.4. Вероятностные характеристики решений линейных дифференциальных уравнений при нестационарных случайных возмущениях	82
Глава 3. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОЦЕССЫ)	90
§ 3.1. Вероятностные характеристики стационарных случайных функций	90
§ 3.2. Эргодическое свойство стационарной случайной функции	96
§ 3.3. Производные и интегралы от стационарных функций	100
§ 3.4. Спектральное представление стационарных случайных процессов	103
§ 3.5. Взаимные спектральные плотности и их свойства	113
§ 3.6. Определение спектральных плотностей решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	117
Глава 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ	123
§ 4.1. Непрерывные одномерные марковские процессы	123
§ 4.2. Уравнение Фокера-Планка-Колмогорова	126
§ 4.3. Многомерные марковские процессы	144
§ 4.4. Определение вероятности достижения границ области возможных значений случайной функции	149
Глава 5. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	157
§ 5.1. Свободные случайные колебания линейных систем	157
§ 5.2. Вынужденные случайные колебания линейных систем	164
§ 5.3. Колебания, вызванные случайным кинематическим возбуждением	190
§ 5.4. Задача о выбросах при случайных колебаниях	204
§ 5.5. Нелинейные случайные колебания	217

Глава 6. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	236
§ 6.1. Свободные случайные колебания линейных систем	236
§ 6.2. Колебания при случайном импульсном нагружении	241
§ 6.3. Нестационарные случайные колебания линейных систем	259
§ 6.4. Метод главных координат при исследовании нестационарных колебаний	265
§ 6.5. Вынужденные стационарные случайные колебания линейных систем	285
Глава 7. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН, ПРОДОЛЬНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ	306
§ 7.1. Уравнения малых колебаний	311
§ 7.2. Решение уравнений малых колебаний	316
Глава 8. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ	329
§ 8.1. Нелинейные уравнения движения пространственно-криволинейных стержней	331
§ 8.2. Уравнения движения стержня в проекциях на связанные оси	337
§ 8.3. Уравнения малых колебаний стержней	342
§ 8.4. Определение собственных значений и собственных векторов	351
§ 8.5. Нестационарные случайные колебания стержней	354
§ 8.6. Стационарные случайные колебания стержней	359
Глава 9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ	369
§ 9.1. Простейшие задачи теории надежности	379
§ 9.2. Возможные причины отказов	381
§ 9.3. Определение числовых значений вероятности безотказной работы	382
§ 9.4. Определение надежности при линейной зависимости напряженного состояния от случайных нагрузок	395
§ 9.5. Определение вероятности безотказной работы при нелинейной зависимости случайной величины F от внешних нагрузок	398
Глава 10. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПО МОДУЛЮ	408
§ 10.1. Определение максимальных значений компонент вектора состояния систем	419
§ 10.2. Области возможных значений вектора состояния системы при действии независимых возмущений	421
§ 10.3. Проекция области возможных значений вектора состояния системы на двумерные плоскости	434
§ 10.4. Определение максимальных значений динамических реакций	436
§ 10.5. Области возможных значений вектора состояния системы в случае нескольких участков движения	443
§ 10.6. Области возможных значений вектора состояния системы при действии зависимых возмущений	449
§ 10.7. Определение максимальных значений линейных функционалов при независимых возмущениях	472
§ 10.8. Максимальное значение линейного функционала при зависимых возмущениях	483
Приложения	491
Список литературы	500

Учебное издание

Валерий Александрович Светлицкий

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
И ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ

Редактор М.С. Винниченко
Корректор О.Ю. Соколова
Художник С.С. Водчиц

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

Подписано в печать 17.12.01. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 31,5. Уч.-изд. л. 31,6. Тираж 1000 экз.
Заказ № 341.

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета в типографии ГУП "Облиздат".
248640, г. Калуга, пл. Старый торг, 5.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ISBN 5-7038-1772-2



9 785703 817728

Список замеченных опечаток

Место	Должно быть
с. 10	4-я строка сверху
	$\mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i^{(0)}(t) + \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \Delta t^2,$
	(В.2)
с. 70	Посл. абзац, 1-я строка
	$\mathbf{r}_i^{(0)}(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \Delta t^2.$
	ВОВ
с. 167	2-я формула снизу
с. 181	$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t),$
с. 248	$\dot{K} y_{00} + K \dot{y}_{00} + AK y_{00} = f.$
с. 256	$K_f(t - t_1) = s_0 \delta(t - t_1),$
с. 263	3-я ф-ла сверху
с. 273	$D_{z_j} = \sum_{v=1}^n k_{jv}^{(1)^2} D_v \left(D_v = \frac{D_{jv}}{m_v^2} \right),$
с. 274	6-я ф-ла сверху
с. 322	$c_1 = \frac{\left(\frac{H p_1}{J_0} \right) J_{x_1} - p_1 \left(\frac{l}{J_0} - \frac{a_1}{M} \right) J_{x_2}}{p_1 p_2 (a_2 - a_1)}, c_3 = \frac{\left(\frac{H p_1}{J_0} \right) J_{x_1} + p_1 \left(\frac{l}{J_0} + \frac{a_1}{M} \right) J_{x_2}}{p_1 p_2 (a_2 - a_1)}.$
с. 351	(6.88)
с. 366	$D_{z_j}(t) = \sum_{v=1}^n \int_0^t \int_0^t g_{jv}(t, \tau) g_{kv}(t, \tau') K_{fvfv} d\tau d\tau'.$
с. 367	1-я ф-ла (6.130)
с. 453	$\sigma = \frac{M_n}{W_{x_2}} = \sum_{v=1}^n \int_0^t q_v f_v d\tau;$
с. 453	3-я ф-ла сверху
с. 453	$\sigma_a^2 = D_{f_1} \sum_{v=1}^n \sum_{p=1}^n \beta_v \beta_p \int_0^t \int_0^t q_v(\tau) q_p(\tau') d\tau d\tau'.$
с. 453	(7.34)
с. 453	$Y(z, i\omega) = \frac{\left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z}{l} \right)}{\left(\sum_{j=1}^n w_j(i\omega) \sin \frac{\pi j z_k}{l} \right)} Y_k(i\omega),$
с. 453	(8.72)
с. 453	$A^{(1)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} + A^{(2)} Z = 0.$
с. 453	(8.126)
с. 453	$z_j^*(h) = 3\sigma_z(h).$
с. 453	(8.127)
с. 453	$\sigma(h) = \frac{(z_{10} + z_1)}{F} + \frac{(z_{50} + z_5) x}{I_y} + \frac{(z_{60} + z_6) y}{I_x},$
с. 453	(10.120)
с. 453	$y_0 = \frac{1}{\mu} C_0^{-1} K^*(t_k) \alpha;$
с. 453	(10.121)
с. 453	$\mathbf{f}^0 = \frac{1}{\lambda} C_1^{-1} \int_0^{t_k} P^*(t_k, \tau) d\tau \alpha.$