Оптимальное управление в экономике позволяет:

- строить динамические модели управляемых процессов
- исследовать оптимальные режимы их развития в микро- и макроэкономике
- устанавливать в виде количественных взаимосвязей свойства экономических и естественно-научных систем
- обосновывать выбор наилучших решений в условиях существующих ограничений

ISBN 5-279-02575-5
9 785279 025756

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Б.А.Лагоша

$$J=\int_0^T f^0(t,x,u)\,dt \to \min$$

Б.А.Лагоша

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением вузов
по образованию в области математических
методов в экономике в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
061800 "Математические методы в экономике"
и другим экономическим специальностям

Москва
"Финансы и статистика"
2003

УДК 330.45(075.8)
ББК 65.050в6я73
Л14

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра высшей математики
Государственного университета управления
(зав. кафедрой – доктор экономических наук,
профессор В. В. Лебедев);

Н. Е. Егорова,
доктор экономических наук, профессор,
главный научный сотрудник Центрального экономико-математического института (ЦЭМИ РАН)

Лагоша Б. А.

Л14 Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.: ил.
ISBN 5-279-02575-5

Исследуются методы и задачи оптимального управления в экономике, математический аппарат в форме теорем о достаточных условиях оптимальности. Из этих теорем выводятся вычислительные средства оптимального управления, доступные для практического применения. Теория сопровождается иллюстрациями экономической и другой природы.

Для обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике». Может использоваться в рамках специальности 351400 «Прикладная информатика (по областям)», а также всеми, кто интересуется применением математических методов в экономике.

Л $\frac{0605010201 - 024}{010 (01) - 2003}$ 282 – 2002

УДК 330.45(075.8)
ББК 65.050в6я73

ISBN 5-279-02575-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 3
ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Глава 4
ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Глава 5
ОДНОПРОДУКТОВАЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ

Глава 6
МЕТОД ЛАГРАНЖА–ПОНТРЯГИНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 7
МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Глава 8
ПРИМЕНЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА–ПОНТРЯГИНА

Глава 9
МЕТОД ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основе настоящего учебного пособия лежат Государственный образовательный стандарт по специальности 061800 «Математические методы в экономике», результаты многолетнего сотрудничества автора с доктором технических наук, профессором В.Ф. Кротовым на кафедре экономической кибернетики в Московском государственном университете экономики, статистики и информатики (МЭСИ) и учебное пособие [9] по расширенному курсу теории оптимального управления (ТОУ). Это пособие давно стало библиографической редкостью, в связи с чем возникла необходимость подготовки данного учебного пособия с учетом накопленного опыта преподавания и происходящих изменений в экономике, с учетом новых возможностей использования вычислительной техники.

Скептикам, полагающим, что ТОУ экономистам вообще не нужна, что это занятие для инженеров, математиков, физиков и других представителей естественно-научных знаний, можно ответить следующее. С позиций прошлого Вы, безусловно, правы. Так было, пока от математики в экономике требовался лишь инструментарий для вычислений при решении расчетных задач.

По мере становления в нашей стране рыночной экономики ситуация начала меняться. Возросла роль математики как аналитического средства в экономике, уменьшилась необходимость ориентировать и направлять интеллектуальные ресурсы прежде всего на нужды обороны. Стало очевидным, что бизнес будет платить (и уже во многих случаях платит) за обоснованные компетентными расчетами и анализом инвестиционные проекты, прогнозы и рекомендации по снижению риска. В этих условиях экономика от апологетико-вербальной ориентации прошлого начала поворачиваться к естественно-научным дисциплинам, хотя ее достижения в этом направлении по-прежнему нельзя сопоставлять с точными законами и выводами в естествознании.

Теория оптимального управления инвариантна к прикладным областям применения, если содержательные постановки задач вписываются в рамки принятых в ней канонических правил. Соответствующие возможности в сфере экономики реализуются в форме динамических оптимизационных моделей в управляемых системах с различными целевыми функциями и множеством ограничений на переменные состояния и управления.

В рамках Государственного стандарта и рабочей программы курса рассматриваются только детерминированные модели. Факторам неопределенности и риска в экономической практике, а также соответствующим математическим моделям посвящено учебное пособие [8].

В настоящем учебном пособии изложение всех конкретных методов оптимального управления ведется с единых методологических позиций – достаточных условий оптимальности В. Ф. Кротова [5, 9]. Результаты соответствующих теорем непосредственно проявляются как признак оптимальности для непрерывных и дискретных (многошаговых) управляемых процессов в общем виде. Ставя при формулировке задачи оптимального управления ряд дополнительных требований (ограничений), получаем соотношения в форме Лагранжа–Понтрягина как необходимые условия оптимальности. Применительно к непрерывным управляемым процессам (двухточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений) они известны в форме принципа максимума Понтрягина [7].

Из достаточных условий оптимальности с помощью специального выбора функции φ (t, x) (результат решения дифференциального уравнения Беллмана в частных производных для непрерывных и конечно-разностного – для многошаговых процессов) получаем алгоритмы динамического программирования для непрерывных и дискретных управляемых систем [9]. Таким образом, разработанные ранее как независимые принцип максимума и метод динамического программирования выводятся через достаточные условия оптимальности В. Ф. Кротова.

В целом теоретическая часть учебного пособия отражает совокупность математических методов ТОУ, которые могут использоваться в различных прикладных направлениях. Как уже говорилось, внимание сосредоточивается на их применении в макроэкономических динамических исследованиях, хотя будут рассматриваться и другие примеры.

Содержание книги отвечает следующей схеме.

В главе 1 приведены справочные данные по необходимому для изучения ТОУ математическому аппарату. Поскольку в экономических вузах ТОУ читается не раньше чем на 7 – 9 семестрах, а математические дисциплины завершаются в основном на вто-

ром курсе, к началу изучения ТОУ студенты нередко забывают необходимые математические методы. Это изначально вызывает трудности в изучении курса. Поэтому здесь в стиле справочника отражены сведения по применению элементов дифференциального и интегрального исчисления к исследованию графиков функций и нахождению их экстремальных значений, включая зависимость функций от параметра. В таком же стиле представлены дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, линейные с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные не выше второго порядка (большего в учебных целях не требуется), методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений в формах задач Коши и двухточечной краевой. На примерах поясняется разница между операторами inf и min, sup и max. Приводятся необходимые в ТОУ сведения из теории множеств. В последующих главах, в которых излагаются основные разделы курса, делаются необходимые ссылки на соответствующие разделы и формулы главы 1.

В главе 2 представлены основные понятия системного анализа: система, модель, управление, обратная связь, замкнутая система, внешняя среда. Дается характеристика экономической системы как объекта управления, что отражает некоторые аспекты ее математического моделирования. Приводится пример системы с необходимостью проведения диагностического анализа с позиций указанных выше факторов. Материал этой главы важен для последующего изложения конкретных методов оптимального управления. Он используется для углубления понимания синтеза оптимальных управлений в методе Лагранжа–Понтрягина.

В соответствии с общей направленностью системного анализа в главе 3 рассматриваются некоторые типовые оптимизационные модели экономической динамики. Данный процесс сопровождается примерами задач оптимального управления в непрерывной и дискретной постановке. Излагается метод построения траекторий управляемых процессов (вектора состояния и управления), на основе чего можно создавать для студентов конкретные упражнения.

В главе 4 представлена общая каноническая постановка задачи оптимального управления для непрерывных и дискретных процессов, вводятся вспомогательные математические конструкции и доказываются три теоремы о достаточных условиях оптимальности:

• для непрерывных процессов, когда оптимальное решение существует в классе допустимых;

• для дискретных (многошаговых) процессов;

• обобщенная теорема для непрерывных процессов, когда оптимальное решение не существует, но находится минимизирующая последовательность допустимых траекторий. Здесь показана разница между операторами инфинум и минимум, супремум и максимум.

Исследуется тип задачи с линейно входящим управлением без ограничений и с ограничениями на управление, когда решение (непрерывное или разрывное) достигается путем непосредственного применения достаточных условий оптимальности.

В главе 5 в соответствии с постановкой и алгоритмом решения задач линейных по управлению представлена модификация макроэкономической модели производства и распределения продукции с использованием аппарата линейных по управлению задач с ограничениями на управление и с нелинейной производственной функцией Кобба–Дугласа. Согласно разработанному алгоритму решения находится оптимальная траектория управления. При этом в каждый момент времени осуществляется разделение валового национального продукта на инвестиции и непроизводственное конечное потребление. Вводится понятие магистрального режима развития экономики, выявляются его свойства и объясняется содержательный смысл.

Глава 6 посвящена методу Лагранжа–Понтрягина (принципу максимума) для непрерывных управляемых процессов. Как необходимые при выполнении двух требований теоремы о достаточных условиях оптимальности выводятся уравнения метода. Дается комментарий к названию «принцип максимума». При наличии свободных граничных условий на правом конце (при $t = T$) получаются так называемые условия трансверсальности. В итоге нахождение оптимального процесса управления сводится к двухточечной краевой задаче для системы $2n$ дифференциальных уравнений, где n – размерность вектора состояния системы. Рассматривается особый частный случай – классическая задача Эйлера вариационного исчисления.

Выводятся ограничения для возможности применения принципа максимума как достаточного условия оптимальности. В этом причина популярности этого метода на практике. Даются примеры нахождения оптимальных процессов с решениями и без решений.

В главе 7 исследуется метод Лагранжа для дискретных (многошаговых) процессов с одномерным аргументом. Выводятся условия оптимальности для вариантов неограниченного управления и при наличии ограничений на управление. Приводятся задачи с решениями и без решений – для самостоятельной и внеаудиторной работы.

В главе 8 демонстрируются некоторые применения необходимых условий оптимальности в форме Лагранжа–Понтрягина. Рассматривается экономическая задача календарного планирования спроса и поставок продукции, не допускающей длительного хранения, в случае дискретного варианта потребления и производства. Задача календарного планирования для непрерывного варианта производства и потребления задается для внеаудиторной работы (при «ручной» технологии решения и с использованием ЭВМ). Все исходные данные, фигурирующие в названных задачах, условные. Для теоретического анализа это оказывается достаточным, а реальные экономические оценки – это специальный вопрос подготовки данных для использования моделей на практике, выходящий за рамки исследования.

В качестве иллюстрации аналитического решения находится и обосновывается оптимальное управление механическим прямолинейным движением. Показывается, что во всех случаях имеют место оптимальные решения.

В главе 9, исходя из теоремы о достаточных условиях оптимальности для непрерывных и дискретных (многошаговых) процессов, реализуются достаточные условия оптимальности в форме Гамильтона–Якоби–Беллмана (динамического программирования). Анализируются различия между непрерывной и дискретной постановкой задач. Как дискретный вариант представлен пример использования метода при оптимизации распределения инвестиций между инвестиционными проектами на фирме при условных исходных данных. Проводится сравнительный анализ методов Лагранжа–Понтрягина и Гамильтона–Якоби–Беллмана.

В настоящем учебном пособии использованы переработанные материалы ранее изданных с участием автора публикаций [6, 9], личный опыт многолетнего преподавания курса ТОУ студентам и преподавателям в системе повышения квалификации, учебно-методические пособия в МЭСИ главным образом для решения задач.

В конце глав приводятся задачи с решениями, вопросы и задачи для самостоятельной работы.

Даются список рекомендуемой литературы, краткий словарь терминов и предметный указатель.

Для изучения материала, изложенного в настоящем учебном пособии, достаточно владеть основами дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальных уравнений в объеме первых двух курсов экономических вузов. Кроме того, при необходимости, как уже отмечалось, читатель может обратиться к справочному материалу главы 1.

Автор благодарит доктора технических наук, профессора В. Ф. Кротова за многолетнее плодотворное сотрудничество, а также рецензентов: доктора экономических наук, профессора В. В. Лебедева (ГУУ)), доктора экономических наук, профессора Н. Е. Егорову (ЦЭМИ РАН) и доктора технических наук, профессора Л. Г. Гагарину (Московский государственный институт электронной техники (технический университет) за внимательное прочтение рукописи, пожелания и рекомендации, способствовавшие улучшению учебного пособия.

ГЛАВА 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения теории множеств и теории функций

Понятие множества в математике постулируется, чтобы оперировать с некоторыми совокупностями чисел, матриц, функций, других элементов, принадлежащих этим совокупностям. Множества могут быть конечными, бесконечными, пустыми. Конечное множество включает ограниченное число элементов, их можно пересчитать. Бесконечное множество содержит бесконечное число элементов.

Пусть заданы множества X и Y с элементами $x \in X$ и $y \in Y$. Прямым (декартовым) произведением множеств X и Y называется множество $Z = X \times Y$, которое включает всевозможные пары $v = (x; y)$, где $x \in X, y \in Y, v \in Z$.

Пример 1.1. Пусть даны множества $X = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$; $Y = \{y : 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Тогда $Z = X \times Y$ – единичный квадрат: $Z = \{v = (x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ (рис. 1.1).

Пусть далее некоторое множество V является подмножеством прямого произведения $Z = X \times Y$, это обозначается как $V \subset X \times Y$.

На рис. 1.2 изображен случай, когда X и Y – множества всех действительных чисел, $Z = X \times Y$ – вся координатная плоскость, V – некоторое ограниченное подмножество на этой плоскости.

Проекцией множества V на множество X называется такое множество V_x (*см.* рис. 1.2) всех элементов x, для которого каждому элементу $x \in V_x$ можно поставить в соответствие по крайней мере один элемент $y \in Y$, так чтобы пара $(x, y) \in V$.

Сечением множества V при данном x (*см.* рис. 1.2) называется множество V^x всех элементов $y \in Y$, каждый из которых в паре с заданным x образует элемент $v = (x; y) \in V$; $V^x \subset Y$.

При этом будем обозначать $x \in V_x$; $y \in V^x$.

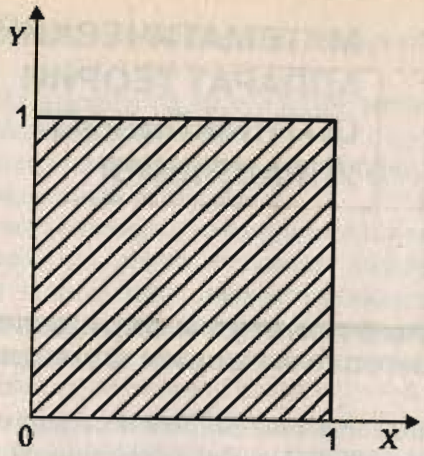

Рис. 1.1. Иллюстрация прямого произведения множеств – единичный квадрат

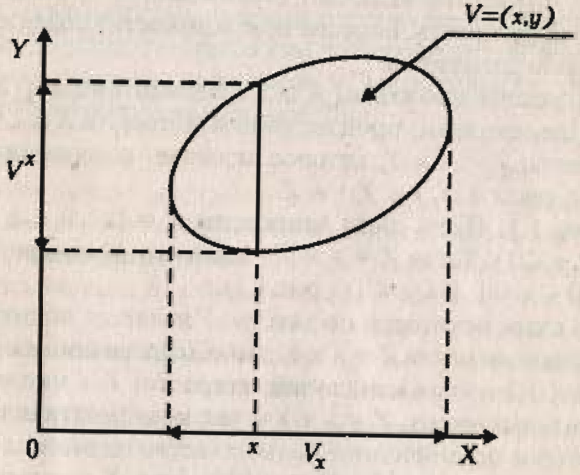

Рис. 1.2. Координатная плоскость с ограниченным подмножеством V

В практике оптимального управления важен частный случай, когда проекция V^x не зависит от x (рис. 1.3).

Этот частный случай встретится при изучении в главе 6 алгоритма принципа максимума Понтрягина, где $y \in V_y$. В общем же случае имеют место обозначения $x \in V_x$; $y \in V^x$.

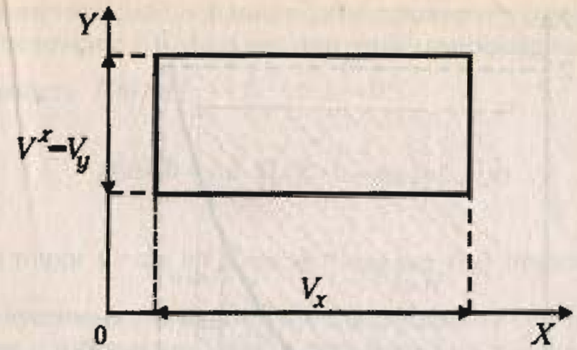

Рис. 1.3. Частный случай независимости V_x от x (проекция V_y равна сечению V^x)

Функция $y = f(x)$ называется законом отображения множества X $(x \in X)$ на множество Y $(y \in Y)$. Функциональная связь f – конкретный вид этого отображения. На множества X и Y в общем случае ограничения не накладываются. Элементами этих множеств могут быть действительные или комплексные числа, вектора, матрицы, логические переменные и т.д.

Если в функциональной зависимости $y = f(x)$ множество Y – числовая ось или ее отрезок, то такую функцию называют функционалом. Очевидно, что при принятых определениях функционал представляет частный случай функции. *Всякий функционал является функцией, но не всякая функция будет функционалом.* Поэтому в задачах математического программирования целевую функцию иначе называют функционалом. В данном случае оба эти понятия эквивалентны.

При изучении ТОУ необходимо понимать разницу между понятиями max и sup, min и inf соответственно.

По определению $\max\limits_{x \in X} f(x) = f(x^*)$, если $f(x^*) < f(x)$ для $\forall x \in X$; >

sup

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f(x).$$

Аналогично $\min\limits_{x \in X} f(x) = f(x^*)$, если $f(x^*) \le f(x)$ для $\forall x \in X$;

inf

$$x^* = \arg\min_{x \in X} f(x).$$

Пример 1.2. Найти $\max\limits_{0<x<1} f(x)$ и $\min\limits_{0<x<1} f(x)$, если $f(x) = 2x^2$, (рис. 1.4).

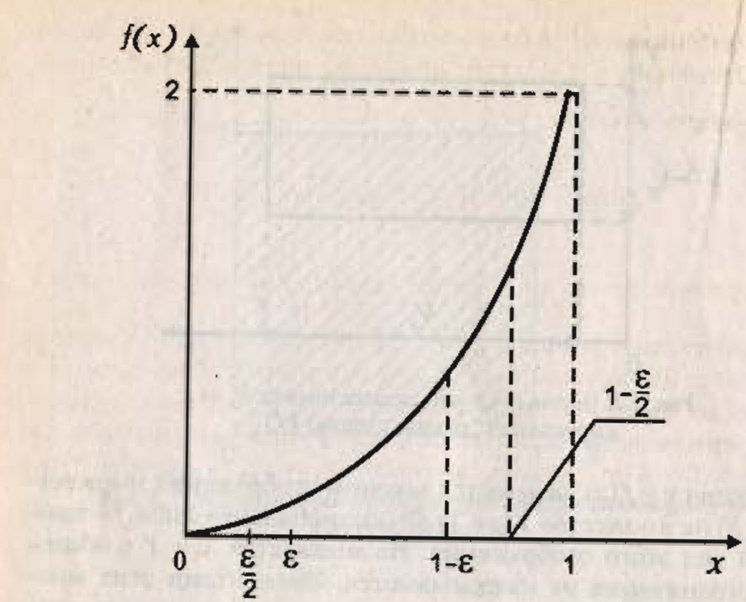

Рис. 1.4. Последовательность нахождения $\inf f(x)$ и $\sup f(x)$

Если сказать, что $1 = \arg\max\limits_{0<x<1} f(x)$, а $0 = \arg\min\limits_{0<x<1} f(x)$, то ответ будет неверным, так как ни $x=0$, ни $x=1$ не принадлежат допустимой области $0 < x < 1$. Если в качестве аргумента максимума $f(x)$ принять некоторое близкое к единице значение $x = 1 - \varepsilon$, где ε — положительное малое число, то ответ также будет неверным, ибо можно взять значение $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, более близкое к единице, при этом будет $f(1 - \frac{\varepsilon}{2}) > f(1 - \varepsilon)$. Если остановимся на выборе значения $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, то вновь можно будет взять число $x = 1 - \frac{\varepsilon}{4}$, при котором $f(1 - \frac{\varepsilon}{4}) > f(1 - \frac{\varepsilon}{2})$ и т.д. Таким образом, получается бесконечная последовательность значений $f(1-\varepsilon) < f(1 - \frac{\varepsilon}{2}) < < f(1 - \frac{\varepsilon}{4}) < \ldots$, стремящаяся к $f(1) = 2$.

Подобную последовательность называют *максимизирующей*, а значение $f(1) = 2 = \sup\limits_{0<x<1} f(x)$, $1 = \arg\sup\limits_{0<x<1} f(x)$.

Аналогичное рассуждение можно провести в отношении окрестности точки $x = 0$, получив при этом *минимизирующую* последовательность $f(\varepsilon) > f(\frac{\varepsilon}{2}) > f(\frac{\varepsilon}{4}) > \ldots \to 0$:

$$f(0) = 0 = \inf_{0<x<1} f(x); \quad 0 = \arg\inf_{0<x<1} f(x).$$

Если точки $0 = \arg\inf\limits_{0<x<1} f(x)$ и $1 = \arg\sup\limits_{0<x<1} f(x)$ принадлежат области допустимых значений $x \in X$ для функции $f(x)$, то инфинум совпадает с минимумом $f(x)$, а супремум — с максимумом $f(x)$. Таким образом, инфинум и супремум для некоторой функции могут существовать тогда, когда минимум или максимум не существует. Другими словами, *понятия инфинума и супремума более общие, чем минимума и максимума.*

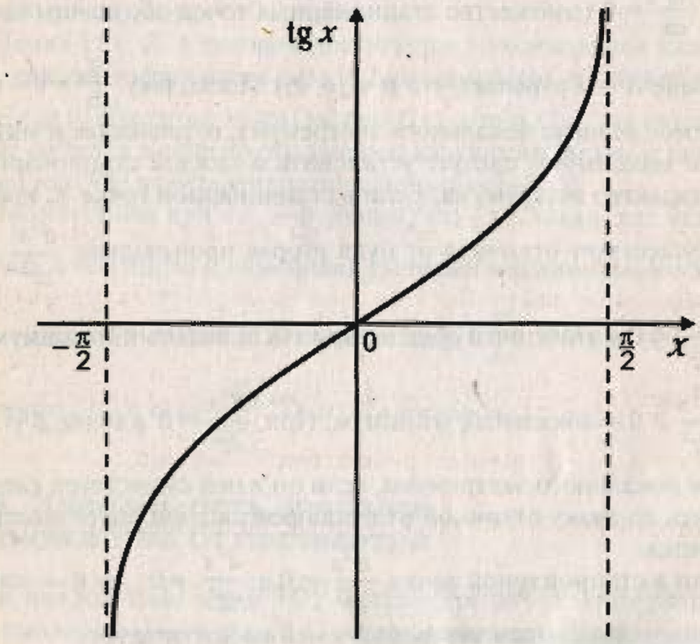

Рис. 1.5. Функция $y = \operatorname{tg} x$, для которой при $|x| < \frac{\pi}{2}$ не существует ни минимума, ни максимума, ни инфинума, ни супремума

Нетрудно, однако, привести пример, когда для функции на заданном множестве не существуют ни минимум, ни максимум, ни инфинум, ни супремум (рис. 1.5).

Таким образом, если минимум или максимум функции, заданной на некотором множестве, не существует, то инфинум или супремум может существовать, но это не означает, что последние существуют всегда. Пример, показанный на рис. 1.5, это иллюстрирует.

1.2. Оптимизация функций на ограниченном множестве

Пусть при $x \in [a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется найти $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Для решения этой задачи вначале необходимо найти стационарные точки функции $f(x)$, т.е. такие, в которых $\frac{df}{dx} = 0$ (множество стационарных точек обозначим через X, условие $\aleph \in X$ означает, что $\aleph \in [a, b]$). Поскольку $\frac{df}{dx} = 0$ – необходимое условие локального экстремума, отвечающее и минимуму, и максимуму, следует установить в каждой стационарной точке характер экстремума. Если в стационарной точке $\aleph$, кроме того, существует отличная от нуля вторая производная $\frac{d^2x}{dt^2}$, то при $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$ в этой точке обеспечивается локальный максимум, а при $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$ – локальный минимум. При $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ в точке $\aleph$ о характере локального экстремума, если он в ней существует, следует судить по знаку отличной от нуля производной более высокого порядка.

Если в стационарной точке $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ а $\frac{d^3x}{dt^3} \neq 0$, то $\aleph$ – точка перегиба, и локальный экстремум в ней не достигается.

Если в точке $\aleph$ производная $\frac{d^2x}{dt^2}$ не существует или $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, о характере локального экстремума в этой точке можно судить

следующим образом: если $\frac{df}{dx} > 0$ при $x > \aleph - h$ и $\frac{df}{dx} < 0$ при $x < \aleph - h$, где h – достаточно малое положительное число, то $\aleph$ – точка локального максимума. Если $\frac{df}{dx} < 0$ при $x > \aleph - h$ и $\frac{df}{dx} < 0$ при $x < \aleph + h$, то $\aleph$ – точка локального минимума.

Если при $x = \aleph$ производная $\frac{df}{dx}$ имеет одинаковый знак при $x > \aleph - h$ и $x < \aleph - h$, то $\aleph$ – точка перегиба. В этой точке меняется выпуклость функции, а экстремум в ней не достигается.

Таким образом, среди всех стационарных точек $\aleph_k \in X$ одним из указанных выше способов можно установить точки локальных максимумов.

Пусть это будут точки $\aleph_1,\ldots, \aleph_m$. Добавим к ним граничные точки $x = a$ и $x = b$ и определим $\max f(x)$ на множестве $x \in Z$, где $Z = \{\aleph_1,\ldots, \aleph_m, a, b\}$.

Точка $x^* \in Z$, в которой достигается максимальное значение $f(x)$, как уже говорилось в разд. 1.1, обозначается $x^* = \arg\max\limits_{x \in Z} f(x)$.

Если необходимо найти не $\max f(x)$, а $\min f(x)$, все сказанное выше остается в силе по отношению к функции $\theta(x) = -f(x)$: операция $\min f(x)$ эквивалентна операции $\max [-f(x)]$.

Монотонная при $x \in Z$ функция $f(x)$ (т.е. такая, для которой $\frac{df}{dx} \neq 0$, в том числе и линейная) достигает максимального значения только на границе. При этом если $\frac{df}{dx} > 0$ при $x \in Z$, то $b = \arg\max\limits_{x \in Z} f(x)$; если $\frac{df}{dx} < 0$, то $a = \arg\min\limits_{x \in Z} f(x)$.

1.3. Зависимость функции и множества от параметра

В каждой теме курса ТОУ будет встречаться более сложная, чем рассмотренная в разд. 1.2, задача: найти $\max f(x,t)$, где t – параметр, x – аргумент, $x \in X(t)$, $t \in \Omega$.

Предполагается, что функция $f(x, t)$ – непрерывная по x, где Ω – множество допустимых значений параметра t.

Логика решения в принципе та же, что и рассмотренная в разд. 1.2, только результаты будут зависеть от параметра t.

В самом деле, зафиксируем значение параметра t, задав $t = \tau \in \Omega$. Тогда функция $f(x, t)$ и множество допустимых значений x станут только функциями аргумента x:

$$f(x, t) = f(x, \tau) = \beta(x),\ X(t) = X(\tau).$$

Задачу max $\beta(x)$ при $x \in [X(\tau)]$, если этот максимум существует, можно решить, следуя методам, изложенным в разд. 1.2. Если этот максимум существует при $\tau \in \Omega$, можно записать:

$$x^*(\tau) = \arg\max_{x \in X(\tau)} \beta(x).$$

Придавая параметру t последовательно фиксированные значения τ_2, τ_3, ..., однотипным образом будем получать $x^*(\tau_2)$, $x^*(\tau_3)$,... Остается по точкам построить график функции $x^*(t) = \arg\max_{x \in X(t)} f(x,t)$ (рис. 1.6).

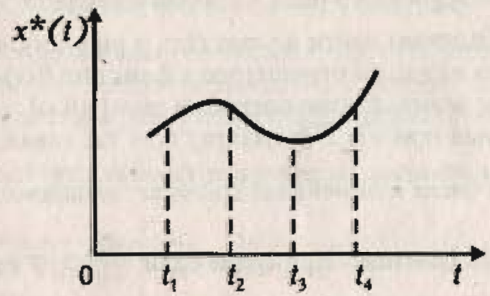

Рис. 1.6. График функции $x^*(t)$

Однако такой метод не всегда приемлем на практике. Во-первых, он трудоемкий, если принять во внимание достаточно большое число фиксированных значений t_1, t_2, ... Во-вторых, построение графика функции $x^*(t)$ по точкам не всегда может оказаться точным, поскольку между любыми двумя точками она может обладать какими-либо особыми свойствами, не выявленными при построении графика по точкам.

Точнее и проще максимизировать функции, исходя из их аналитических свойств, что будет показано на следующих примерах.

Пример 1.3. Максимизировать функцию $f(x, t) = tx$; $0 \le x \le t^2$; $|t| \le 1$.

В данном случае функция $f(x, t)$ линейна по x. Следовательно, при $t \ne 0$ она стационарных точек не может иметь, и максимум достигается на границе: либо в точке $x = 0$, либо при $x = t^2$. Вычислим значения $f(x, t)$ в этих точках и сравним их при различных значениях t:

$$f(0, t) = 0,\ f(t^2, t) = t^3.$$

При $t < 0$ $f(0, t) > f(t^2, t)$, так как $t^3 < 0$. Следовательно, при $t < 0$ максимальное значение функции $f(x, t)$ достигается в точке $x^* = 0$.

При $t > 0$ $f(0, t) < f(t^2, t)$, так как $t^3 > 0$. Поэтому максимальное значение функция $f(x, t)$ достигает в точке $x^* = t^2$. Наконец, в случае $t = 0$ $f(x, t) = 0$, причем существует лишь одно допустимое значение $x^* = 0$ $(0 \le x \le t^2 = 0)$. Следовательно, оно и будет точкой максимума функций $f(x, t)$ при $t = 0$. Как видно, случай $t = 0$ охватывается обоими условиями.

Все рассмотренные случаи объединяются в одну результирующую формулу:

$$x^*(t) = \arg\max_{0 \le x \le t^2} f(x,t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0; \\ t^2, & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Пример 1.4. Найти максимум функции $f(x, t) = tx^2 + 2x$; $|x| \le 1$; $|t| \le 1$.

Функция $f(x, t)$ представляет параболу, ориентированную ветвями вниз при $t < 0$ и ветвями вверх, если $t > 0$. При $t = 0$ $f(x, 0) = 2x$ – линейная функция, и максимум достигается на правой границе $x^*(0) = 1$. Рассмотрим случаи $-1 \le t < 0$ и $0 < t \le 1$.

При $t < 0$ вершина параболы $x_в(t)$ – точка безусловного максимума функции – определяется из необходимого условия $\frac{\partial f}{\partial x} = 2tx + 2 = 0$, откуда $x_в(t) = -1/t$. Значение функции $f(x, t)$ в вершине параболы равно

$$f(x_в(t), t) = \frac{t}{t^2} - \frac{2}{t} = -\frac{1}{t};$$

$$x_в(-1) = 1, f(1, -1) = 1 \text{ при } t = -1;$$

$$x_в(-\frac{1}{2}) = 2, f(2, -\frac{1}{2}) = 2 \text{ при } t = -\frac{1}{2};$$

$$x_в(-\frac{1}{3}) = 3,\ f(3, -\frac{1}{3}) = 3 \text{ при } t = -\frac{1}{3};$$

$$x_в(-0) \to \infty,\ f(\infty, -0) \to \infty \text{ при } t \to -0;$$

В результате семейство парабол, отвечающее случаю $-1 \le t < 0$, будет иметь вид, представленный на рис.1.7.

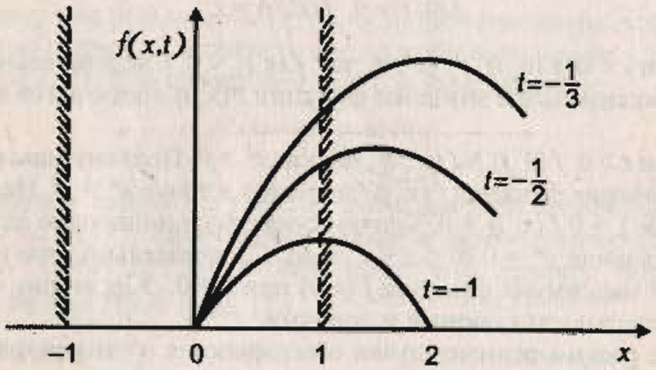

Рис. 1.7. Семейство парабол $f(x, t) = tx^2 + 2x$ при $-1 \le t < 0$

При всех значениях $-1 \le t < 0$ максимальное значение функции $f(x, t)$ при $|x| \le 1$ достигается в точке $x^*(t) = 1$ (границы $x = -1$ и $x = 1$ на рис. 1.7 отштрихованы).

Данный вывод может быть получен и аналитически. Действительно, имеется одна стационарная точка – вершина параболы: $x_в(t) = -\frac{1}{t}$. При $-1 \le t < 0$ $x_в(t) \ge 1$, причем $x_в(1) = 1$ только для крайнего значения $t = -1$. Следовательно, при $-1 < t \le 1$ функция $f(x, t)$ монотонно возрастает, достигая максимума в граничной точке $x^*(t) = 1$.

Рассмотрим теперь случай $0 < t \le 1$: парабола $f(x, t) = tx^2 + 2x$ ориентирована ветвями вверх (рис. 1.8).

В стационарной точке $x_в(t) = -\frac{1}{3}$ достигается абсолютный минимум функции $f(x, t)$. Следовательно, максимум по x при условии $|x| \le 1$ достигается только в граничных точках $x = \pm 1$. Определим точку максимума путем прямой подстановки значений $x = \pm 1$ в выражение $f(x, t) = tx^2 + 2x$, $f(1, t) = t + 2$, $f(-1, t) = = t - 2$.

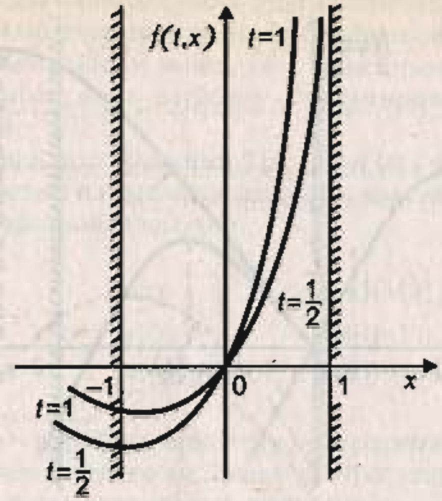

Рис. 1.8. Семейство парабол $f(x, t) = tx^2 + 2x$ при $0 < t \le 1$

Из полученного результата $f(1, t) > f(-1, t)$ вытекает, что $x^*(t) = 1$ при $0 < t \le 1$. Таким образом, для всех рассмотренных случаев получаем:

$$x^*(t) = \arg\max_{|x|\le 1}(tx^2 + 2x) = 1; \quad |t| \le 1.$$

Пример 1.5. Вычислить максимальное значение функции $f(x, t) = -x^2 + 2tx$; $0 \le x \le 2$; $|t| \le 2$.

В данном примере функция $f(x,t)$ представляет параболу, ориентированную ветвями вниз при любых значениях t, так как коэффициент при x^2 отрицательный и не зависит от t. При различных значениях t возможны три случая ориентации параболы, изображенные на рис.1.9:

1) максимальное значение функции достигается в точке $x^*(t) = x_в(t)$, если $x_в(t)$ лежит в допустимой области изменения x (эта область $0 \le x \le 2$ отштрихована);

2) максимальное значение достигается на правой границе (в точке $x^* = 2$), если значение $x_в(t)$ лежит правее правой границы;

3) максимальное значение достигается на левой границе (в точке $x^* = 0$), если значение $x_в(t)$ лежит левее левой границы.

Переведем сказанное выше на язык математических соотношений. Абсциссу вершины параболы определим из условия

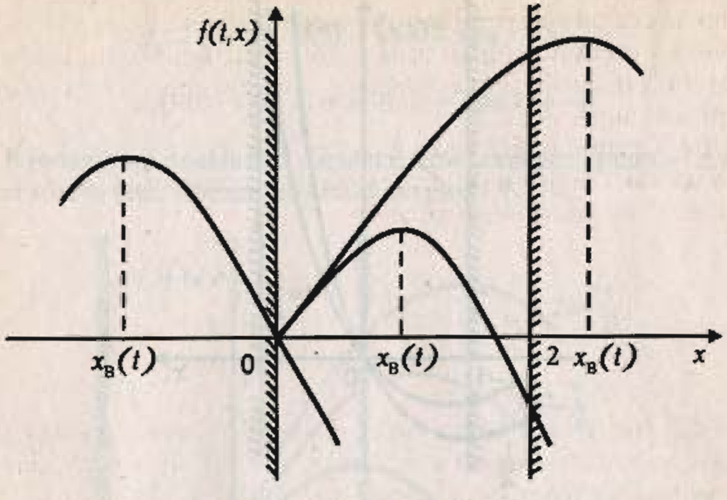

Рис. 1.9. Возможные случаи ориентации параболы относительно области допустимых значений x

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, что дает $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2t = 0$; $x_в(t) = t$. Нанесем функцию $x_в(t) = t$ – след вершины параболы при изменении t – на координатную плоскость (t, x), допустимые изменения аргумента x и параметра t отштрихованы (рис. 1.10).

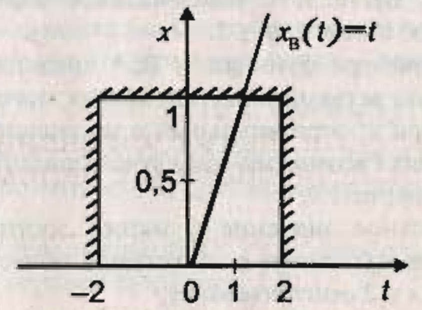

Рис. 1.10. След вершины параболы и оптимальное решение в системе координат (t, x)

При $0 \le t \le 2$ абсцисса вершины параболы $x_в(t)$ лежит в допустимой, отштрихованной области $0 \le x \le 2$. При $0 \le t \le 1$ $x^*(t) = t$, при $1 \le t \le 2$ $x^*(t) = 2$. При $-2 \le t \le 0$ след вершины параболы лежит ниже нижней границы $x = 0$, это дает нам $x^*(t) = 0$ (*см.* рис. 1.10).

В дальнейшем наиболее часто будем встречаться (для учебного процесса этого достаточно) именно с функциями $f(x, t)$, подобными рассмотренным выше, т.е. с линейными по x, а также представляющими по x параболу, ориентированную ветвями вверх или вниз.

Для линейной по x функции $f(x, t) = A(t)\,x + B(t)$, где $a(t) \le x \le b(t)$, как следует из вышеизложенного, максимум достигается в точке $x^*(t)$, заданной формулой

$$x^*(t) = \begin{cases} b(t); & t \in \{t : A(t) > 0\}; \\ a(t); & t \in \{t : A(t) < 0\}; \\ \forall x \in [a(t); b(t)]; & t \in \{t : A(t) = 0\}. \end{cases}$$

Если $f(x, t)$ – парабола, ориентированная ветвями вверх, максимум достигается только на границе. При этом исследование стационарных точек оказывается излишним.

Если $f(x, t)$ – парабола, ориентированная ветвями вниз, максимум достигается в точке

$$x^*(t) = \begin{cases} \arg\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0\right); & \arg\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0\right) \in [a(t); b(t)]; \\ b(t); & \arg\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0\right) > b(t); \\ a(t); & \arg\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0\right) < a(t). \end{cases}$$

1.4. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \qquad (1.1)$$

имеет решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, если функция $f(x, t)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (t_0, x_0).

Точнее, если функция $f(x, t)$ непрерывна в открытой области D (не включая границу этой области) и в ней выполняется условие Липшица

$$|f(x, t) - f(x, y)| \le M|x - y|, \qquad (1.2)$$

где M – некоторая положительная константа,

то дифференциальное уравнение (1.1) при любом начальном условии $x(t_0) = x_0$ (где точка $(t_0, x_0) \in D$) имеет единственное решение, определенное в области D (теорема существования и единственности решения для задачи Коши).

Достаточным условием выполнения формулы Липшица (1.2) является ограниченность в области D частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Если функцию $f(x, t)$ можно представить в виде $f(x, t) = \dfrac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(t)}$, то в уравнении (1.1) переменные разделяются и его можно переписать следующим образом:

$$\frac{dx}{\Psi_1(x)} = \frac{dt}{\Psi_2(t)}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\int \frac{dx}{\Psi_1(x)} = \int \frac{dt}{\Psi_2(t)} + C,$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.6. Решить уравнение при заданном начальном условии: $\dfrac{dx}{dt} = tx$; $x(0) = 4$. Разделение переменных дает $\dfrac{dx}{x} = tdt$. Интегрируя левую и правую части соответственно по x и по t, получаем

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + \ln C. \qquad (1.3)$$

Вместо произвольной постоянной C в общем решении (1.3) введем $\ln C$ (так будет легче потенцировать), т.е. если C – произвольная постоянная, то и $\ln C$ – произвольная постоянная. Потенцирование дает более компактный вид

$$x(t) = C\exp\left(\frac{t^2}{2}\right). \qquad (1.4)$$

Произвольная постоянная C в формуле (1.4) определяется из начального условия $x(0) = 4$, что дает $C = 4$.

Решение задачи Коши, удовлетворяющее начальному условию:

$$x(t) = 4\exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Пример 1.7. Решить уравнение $\dfrac{dx}{dt} = (1 + x^2)\cos t$; $x(0) = 1$. Разделение переменных дает

$$\frac{dx}{1+x^2} = \cos t\, dt.$$

После интегрирования левой части по x, а правой по t получаем $\operatorname{arc\,tg} x = \sin t + C$, откуда $x(t) = \operatorname{tg}(\sin t + C)$.

Обращаясь к начальному условию $x(0) = 1$, получаем $1 = \operatorname{tg} C$, откуда $C = \dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, решение задачи Коши:

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(\sin t + \frac{\pi}{4}\right).$$

1.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами разработана для произвольного порядка n, однако в курсе ТОУ уравнения более высокого порядка, чем второй, нам не потребуются. Этим и объясняется указанный выбор.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t), \qquad (1.5)$$

где a, b и c – постоянные коэффициенты.

Если функция $f(t) \neq 0$, уравнение (1.5) называют неоднородным, при $f(t) \equiv 0$ – однородным дифференциальным уравнением.

В случае $a \neq 0$ выражение (1.5) – уравнение второго порядка. Более высокие порядки при изучении ТОУ нам не потребуются. Решение уравнения (1.5), включающее две произвольные постоянные и правую часть $f(t) \equiv 0$, называют общим решением однородного уравнения. Обозначим его $x_1(t)$. Частное решение неоднородного уравнения – это любое решение уравнения (1.5) при $f(t) \neq 0$. Обозначим его $x_2(t)$.

Общее решение $x(t)$ неоднородного дифференциального уравнения (1.5) состоит из суммы общего решения однородного уравнения $x_1(t)$ и частного решения $x_2(t)$ неоднородного уравнения:

$$x(t)= x_1(t) + x_2(t). \tag{1.6}$$

Две произвольные постоянные в общем решении однородного уравнения $x_1(t)$ определяют, задав либо начальные условия: при $t = t_0$ $x(t_0) = x^0$, $\dfrac{dx}{dt} = x^1$ (задача Коши); либо краевые: $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$ (двухточечная краевая задача).

Общее решение однородного уравнения $x_1(t)$ определяется корнями характеристического уравнения

$$ap^2 + bp + c = 0. \tag{1.7}$$

Рассмотрим возможные при этом случаи.

1. Корни p_1 и p_2 характеристического уравнения (1.7) действительные и разные ($p_1 \neq p_2$). При этом

$$x_1(t) = C_1 \exp(p_1 t) + C_2 \exp(p_2 t), \tag{1.8}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2. Корни p_1, p_2 действительные и равные : $p_1 = p_2 = s$. Тогда

$$x_1(t) = e^{st}(C_1 t + C_2). \tag{1.9}$$

3. Корни p_1, p_2 комплексно сопряженные: $p_1, p_2 = j \pm ig$, где j и g – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1$. Данному случаю отвечает решение:

$$x_1(t) = e^{jt}(C_1 \cos gt + C_2 \sin gt). \tag{1.10}$$

Применительно к дифференциальному уравнению (1.5) значения $x_1(t)$ в указанных трех случаях исчерпывают все возможные варианты общего решения однородного уравнения. Вид частного решения неоднородного уравнения $x_2(t)$ зависит от правой части уравнения (1.5) и представляется в аналитической форме лишь для определенных частных случаев функции $f(t)$:

1) правая часть уравнения (1.5) – многочлен степени m:

$$f(t)=a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + ... + a_m, \tag{1.11}$$

где $a_0, a_1, ..., a_m$ – заданные коэффициенты.

При этом $x_2(t)$ также ищем в виде многочлена степени m:

$$x_2(t) = \gamma_0 t^m + \gamma_1 t^{m-1} + ... + \gamma_m. \tag{1.12}$$

Коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_m$ подлежат определению, для чего в левую часть уравнения (1.5) подставляют выражение типа (1.12), а в правую часть – выражение (1.11). После двойного дифференцирования (1.12), подстановки и приведения подобных членов в левой части уравнения (1.5) в обеих его частях получают многочлены степени m. Для того чтобы эти многочлены тождественно совпадали при любых значениях t, должны совпадать их коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях уравнения (1.5). Приравнивая слева и справа коэффициенты при свободных членах и множителях $t, t^2, ..., t^m$, получим $m + 1$ алгебраических уравнений для определения $m + 1$ коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_m$. Тем самым оказывается полученным частное решение неоднородного уравнения $x_2(t)$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1.5) определяется по формуле (1.6);

2) функция $f(t)$ – экспоненциальная:

$$f(t) = C e^{\alpha t}. \tag{1.13}$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (1.7) возможны различные варианты задания $x_2(t)$:

а) пусть корни p_1 и p_2 не совпадают с величиной α: $\alpha \neq p_1$, $\alpha \neq p_2$. Тогда частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $x_2(t) = A e^{\alpha t}$, где величина A подлежит определению. Выполняя аналогичные действия (*см.* формулы (1.11) и (1.12)) и приравнивая в уравнении (1.5) множители при $e^{\alpha t}$ в левой и правой частях, получим значение A:

$$A=\frac{C}{a\alpha^2+b\alpha+c}.$$

Здесь $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$, так как по предположению $\alpha \neq p_1$, $\alpha \neq p_2$;

б) корни p_1 и p_2 действительные и разные, и величина α равна одному из них, например, $\alpha = p_1$. Тогда $x_2(t)$ ищем в виде $x_2(t) = At\,e^{\alpha t}$. После аналогичных указанных выше вычислений, приравнивая в левой и правой частях уравнения (1.5) множители при $e^{\alpha t}$ и приводя подобные члены, получим

$$A=\frac{C}{2a\alpha+b};$$

в) корни p_1 и p_2 действительные и равные и их значения совпадают с величиной α:

$$p_1=p_2=\frac{-b}{2a}=\alpha,\quad b^2=4ac.$$

Тогда $x_2(t)$ ищем в виде $x_2(t) = At^2e^{\alpha t}$. Подобно приведенным выше случаям, учитывая, что α – корень характеристического уравнения (1.7), получаем $A=\frac{C}{2a}$;

3) правая часть в уравнении (1.5) имеет вид

$$f(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t, \tag{1.14}$$

где A, B, ω – заданные числа.

Если корни характеристического уравнения (1.7) p_1, p_2 действительные или комплексно сопряженные $p_1, p_2 = \alpha \pm i\beta$, при этом либо $\alpha \neq 0$, либо $\alpha = 0$, но $\beta \neq \omega$, $x_2(t)$ ищется в виде $x_2(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$, коэффициенты C и D подлежат определению, которое выполняется в принципе по той же схеме, что и в предыдущих случаях, а затем в левой и правой частях дифференциального уравнения (1.5) приравниваются коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. В результате получаем систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными C и D:

$$\left.\begin{aligned}C(c-a\omega^2)+Db\omega&=A;\\-Cb\omega+D(c-a\omega^2)&=B,\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

определитель которой равен $(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2$.

Как следует из решения характеристического уравнения (1.7),

$$\alpha=-\frac{b}{2a},\quad \beta^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то $b \neq 0$ и при любом значении $\omega \neq 0$ определитель системы (1.15) положительный (важно даже, чтобы он был просто отличным от нуля).

Если $\alpha = 0$, то $b = 0$ и $\beta^2=\frac{c}{a}$. Но так как по предположению $\beta \neq \omega$, то $\omega \neq \frac{c}{a}$. Следовательно, и в этом случае определитель системы (1.15) положительный и коэффициенты C и D вычисляются однозначно.

Если правая часть дифференциального уравнения (1.5) $f(t)$ является линейной комбинацией рассмотренных выше функций, то каждому входящему в $f(t)$ слагаемому будет отвечать своя часть $x_2(t)$, которая определяется одним из указанных выше способов.

Пример 1.8. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt}-2\frac{dx}{dt}+2x=\cos t-3t \tag{1.16}$$

с начальными условиями:

$$x=\frac{1}{5},\quad \frac{dx}{dt}=0 \ \text{ при } t=0. \tag{1.17}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$p^2-2p+2=0.$$

Его решение: $p_1, p_2 = 1 \pm i$.

Нахождение частного решения неоднородного уравнения $x_2(t)$ должно осуществляться в соответствии с рассмотренными выше правилами (1.11) и (1.14), на основании чего имеем

$$x_2(t)=C\cos t+D\sin t+Et+F. \tag{1.18}$$

Здесь коэффициенты C, D, E и F подлежат определению.

Вычисляя первую и вторую производные от $x_2(t)$, подставляя их в исходное уравнение (1.5) и приравнивая в левой и правой частях множители при t, $\cos t$, $\sin t$ и свободные члены, получаем систему из четырех линейных алгебраических уравнений:

$$C - 2D = 1;\ \ 2C + D = 0;$$
$$2E = -3;\ \ -2E + 2F = 0.$$

Решение этой системы:

$$F = E = -\frac{3}{2};\ \ C = \frac{1}{5};\ \ D = -\frac{2}{5}.$$

В дифференциальном уравнении (1.5) с учетом начальных условий (1.17) определяются две произвольные постоянные интегрирования в общем решении однородного уравнения $x_1(t)$, вследствие чего имеет место результат решения задачи Коши (1.16) и (1.17):

$$x(t) = e^t\left(\frac{3}{2}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right) + \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}.$$

В задачах ТОУ с применением принципа максимума Понтрягина, как будет показано в разд. 6.2, необходимые условия оптимальности сводятся не к задаче Коши, а к двухточечной краевой задаче. Для рассматриваемого дифференциального уравнения (1.16) вместо второго начального условия (1.17) примем краевое условие

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.19}$$

После соответствующих подстановок с использованием первого начального условия (1.16) и краевого условия (1.19) получим решение поставленной краевой задачи:

$$x(t) = e^t\left(\frac{3}{2}\cos t + \frac{2}{5}e^{-\pi/2}\sin t\right) + \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}.$$

Как видим, разница в решениях задачи Коши и краевой задачи определяется только множителем $e^{-\pi/2}$ во втором слагаемом, но это, вообще говоря, зависит от конкретного вида краевого условия типа (1.19). При другом условии результаты решений задач могли быть совершенно различными.

Сопоставление методов решений в двух рассмотренных вариантах (для задачи Коши и для краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами) указывает практически одинаковую их трудоемкость. Причем такой же вывод можно сделать и для задач большей размерности. Это справедливо, если общее решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений может быть получено в аналитической форме. Однако для произвольных типов дифференциальных уравнений возможность получить общие решения в аналитической форме ограничена – это скорее исключение, чем правило. Поэтому перейдем далее к рассмотрению задачи численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с выделением при этом задач Коши и двухточечных краевых задач.

1.6. Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений n-го порядка в нормальной форме

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, ..., x_n) \tag{1.20}$$

с начальными условиями

$$x_k(0) = x_k^0,\ \ k = 1, ..., n. \tag{1.21}$$

Для численного интегрирования задачи Коши (1.20) и (1.21) при условии существования и единственности решения (*см.* раздел 1.4) известен ряд методов: одношаговые Эйлера и Рунге–Кутта с модификациями, многошаговые типа Адамса, Димсдейла, Хемминга и др. Ограничимся наиболее простым из них – методом Эйлера.

Метод заключается в приближенном представлении производных

$$\frac{dx_k}{dt} \approx \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t},$$

и в переходе от системы дифференциальных уравнений (1.20) к системе конечно-разностных уравнений

$$x_k(t+\Delta t) \approx x_k(t) + f_k(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))\,\Delta t,\ k = 1, \ldots, n \qquad (1.22)$$

с начальными условиями (1.21).

Рассматриваемый метод характеризуется накоплением ошибок в процессе вычислений по мере удаления от начальной точки $t = 0$; его точность повышается при уменьшении конечной величины Δt. На практике этот метод можно применять, используя ЭВМ и полагая при этом величину Δt достаточно малой.

Метод численного интегрирования (прямой прогонки) для двухточечной краевой задачи представляется следующей расчетной схемой.

Примем постановку задачи в виде:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1(t), \ldots, x_{2n}(t)),\quad k = 1, \ldots, 2n; \qquad (1.23)$$

$$x_j(0) = x_{j0},\ j = 1, \ldots, n; \qquad (1.24)$$

$$x_l(T) = x_{l1},\ l = n+1, \ldots, 2n. \qquad (1.25)$$

К краевым задачам такого типа в теории оптимального управления сводятся задачи на применение необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Вместо краевой задачи (1.23) – (1.25) решаем задачу Коши с заданными начальными условиями (1.24) для n переменных, а последующим n неизвестным начальным значениям переменных присвоим произвольные значения:

$$x_s(0) = x_{s0},\ s = n+1, \ldots, 2n. \qquad (1.26)$$

Решение задачи Коши (1.23), (1.24) и (1.26) будет зависеть от n произвольных значений (1.26). Если данную зависимость удастся выразить аналитически (это возможно, если система дифференциальных уравнений (1.23) аналитически разрешима), то в результате будем иметь систему n алгебраических уравнений:

$$x_l(T, x_{n+1,0}, x_{n+2,0}, \ldots, x_{2n,0}) = x_{l1},\ l = n+1, \ldots, 2n. \qquad (1.27)$$

Если из системы (1.27) удастся определить установленные ранее как произвольные n величин $x_{n+1,0}, x_{n+2,0}, \ldots, x_{2n,0}$, получим решение краевой задачи (1.23) – (1.25). Решение алгебраической системы уравнений (1.27) – точное или приближенное – будет отвечать точному или приближенному решению краевой задачи (1.23) – (1.25).

В случае численного интегрирования задачи Коши (1.21), (1.22) приближенный характер решения краевой задачи (1.23) – (1.25) будет зависеть от выбора приближенного метода численного интегрирования задачи Коши.

Однако при достаточно сложной структуре системы уравнений (1.20) и большом числе обращений к формуле (1.22) в процессе численного решения задачи Коши при использовании ЭВМ получить аналитическую зависимость не представляется возможным. В данном случае недостающим начальным условиям (1.25) придаются произвольные числовые значения и вместо точных формул вычисляем величины $x_l(T)$, которые будут зависеть от произвольных числовых значений $x_{n+1,0}, x_{n+2,0}, \ldots, x_{2n,0}$. В общем случае считать, что вычисленные значения $x_l(T)$ будут совпадать с заданными x_{l1}, $l = n+1, n+2, \ldots, 2n$, разумеется, нет никаких оснований. Поэтому на следующей итерации численного интегрирования задачи Коши принимаются новые значения $x_{n+1,0}, x_{n+2,0}, \ldots, x_{2n,0}$ и т.д. до приемлемого на практике расхождения. Для этого можно, например, использовать оценку

$$\left[\sum_{l=n+1}^{2n} (x_l(T) - x_{l1})^2\right]^{1/2} \le \varepsilon,$$

где ε – заданный показатель точности.

Изложенный метод прямой прогонки трудоемок в вычислительном отношении, и его реализация на практике возможна только с использованием ЭВМ. В ТОУ он находит применение во многих приложениях, где требуется решать краевые задачи.

Из применяемых на практике пакетов прикладных программ можно рекомендовать MathCad, MathLab, Mathematica, Mapl, Derive, Statistica, программную систему Eurika. Подробнее см. в [3]. Там же имеется дополнительный список литературы.

Вопросы и задачи
для самостоятельной работы

1. Объяснить основные понятия теории множеств: конечные, бесконечные, пустые множества, принадлежность элементов множеству, прямое произведение, проекции и сечения множеств.

2. Сформулировать различие между функцией и функционалом. Какое из них более общее и почему?

3. Дать определения и показать на примерах смысл математических понятий max, sup, min, inf. Приведите примеры, уточните отношения общности.

Найти оптимальный аргумент $x^*(t)$, максимизирующий функцию $f(x, t)$ по x при всех допустимых значениях параметра t. Построить график функции $x^*(t)$:

4. $f(x, t) = (t^2 - 1)x^2 + 4tx$; $|t| \le 2$; $0 \le x \le t^2$.

5. $f(x, t) = (t-1)(t-2)x^2 - 2t^2x$; $0{,}1 \le t \le 3$; $|x| \le \frac{1}{t}$.

6. $f(x,t) = -\frac{x^2}{2} + (3-t)x$; $0{,}1 \le t \le 4$; $0 \le x \le \frac{2}{t}$.

7. $f(x, t) = t(x-4)x$; $|t| \le 5$; $0 \le x \le |t|$.

8. $f(x, t) = (t-1)(x-2t)x$; $|t| \le 5$; $|x| \le 3$.

9. $f(x, t) = (t-1)(t+2)x$; $0 \le t \le 3$; $|x| \le \frac{1}{t^2 + 0{,}5}$.

Найти решения задач Коши для уравнений с разделяющимися переменными:

10. $\sqrt{x^2+1}\,dx = t(x + \frac{1}{x})dt$; $x(0) = 0$.

11. $xt\,dt + (t+1)\,dx = 0$; $x(0) = e$.

12. $\frac{dx}{dt} = t\,\mathrm{tg}\,x$; $x(0) = 0$.

13. $\frac{dx}{dt} = 2t(x-1)$; $x(0) = 2$.

Найти решения задач Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

14. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = t - 6 + e^{2t}$; $x(0) = (\frac{dx}{dt})_0 = 0$.

15. $\frac{d^2x}{dt^2} - x = e^t$; $x(0) = 1$; $(\frac{dx}{dt})_0 = 0$.

16. $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x = 4e^{-3t} - t^2$; $x(0) = 0$; $(\frac{dx}{dt})_0 = 2$.

17. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = t + 1$; $x(0) = (\frac{dx}{dt})_0 = 0$.

18. $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + \sin t$; $x_1(\frac{\pi}{2}) = 1$.

$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 + \cos t + 1$; $x_2(\frac{\pi}{2}) = 0$.

19. $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + t^2 + 1$; $x_1(0) = 1$.

$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 - t$; $x_2(0) = 0$.

ГЛАВА 2 ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Система, модель, моделирование

Объектами применения ТОУ являются *управляемые системы*, описываемые дифференциальными или конечно-разностными уравнениями соответственно для непрерывных или дискретных (многошаговых) процессов. Понятия и определения: *система, модель, обратная связь, внешняя среда, замкнутая и разомкнутая системы, существенные или несущественные факторы*, обусловленные целевой ориентацией при изучении объекта исследования, — это понятийный аппарат основ управления, в частности ТОУ.

Принимая во внимание, что учебное пособие, кроме специальности «Математические методы в экономике» , может использоваться и при подготовке специалистов по менеджменту, прикладной информатике и другим дисциплинам, где курс математического моделирования экономики специально не читается, данный раздел может рассматриваться как вводный, отражающий содержательную сущность и формализованное представление понятий и принципов формирования структур систем управления. Так как речь идет именно об общих принципах и понятиях, то и примеры заимствуются из различных областей, начиная с физического движения материальной точки и кончая характеристиками сложных производственно-экономических систем. Разумеется, поскольку учебное пособие рекомендуется прежде всего для экономистов, последние доминируют.

Наблюдение, анализ и моделирование являются средствами познания и прогнозирования процессов, явлений и ситуаций во всех сферах объективной действительности.

Говоря, например, о системах застройки города или района, кровообращения, управления предприятием, системе уравнений, прежде всего имеют в виду некую совокупность. Но любая ли совокупность может быть названа системой? Вряд ли кто назовет

системами совокупность выброшенных старых вещей или луж на асфальте после дождя. Ни то, ни другое никак не упорядочено, не отвечает определенной цели, в соответствии с которой эта совокупность сформирована. Первое свойство систематизации, системного представления о рассматриваемом объекте — это наличие цели, для реализации которой предназначается данная совокупность предметов, явлений, логических представлений, формирующих объект. Цель функционирования системы редуцирует системные признаки, с помощью которых описываются и характеризуются элементы системы.

Например, допустим, что целью является реструктуризация системы управления предприятием (фирмой) на ординарном уровне. Нужно ли для этого знать фамилии и размеры зарплаты каждого работника? Нет, так как эти данные хотя в своей совокупности в большей или меньшей степени влияют на режим управления, но не являются наиболее важными на персональном уровне. Выделим существенные системные признаки. К ним относятся: рыночный спрос на продукцию производителя и число наименований выпускаемой продукции, производственные мощности предприятия по выпуску продукции различных наименований и аналогичные показатели предприятий-конкурентов, обеспеченность материальными, трудовыми ресурсами, общий фонд заработной платы и условия ее использования и т.д. Особо следует выделить узкие места. К ним относятся факторы и условия, сдерживающие повышение эффективности производства. Сущностью системы управления предприятием относительно отражения условий управляемости последним является установление и описание взаимосвязей и взаимозависимостей между наиболее существенными факторами и характеристиками предприятия. Еще раз подчеркнем, что речь идет о предприятии (фирме) как производственно-экономической системе с позиций управляемости им, т.е. предприятие рассматривается как объект управления. Именно исходя из этого и определены существенные признаки объекта. При изменении цели могут стать другими как существенные признаки, так и связи с внешней средой. Например, если на том же предприятии будут анализироваться уровень квалификации работников и организация оплаты их труда, то ведомость на получение заработной платы, ранее не представлявшая первостепенного значения, станет теперь основным документом.

Таким образом, для выделения системы требуется наличие:

а) цели, для реализации которой формируется система;

б) объекта исследования, состоящего из множества элементов, связанных в единое целое важными относительно цели системными признаками;

в) субъекта исследования («наблюдателя»), формирующего систему;

г) характеристик внешней среды по отношению к системе.

Наличие субъекта исследования и возможная неоднозначность, субъективность при выделении существенных системных признаков вызывают значительные трудности в процессе выделения системы и соответственно ее универсального определения. Поэтому необходим более подробный системный анализ [4].

Изложенный выше вербальный подход дает возможность определить *систему* как упорядоченное представление об объекте исследования относительно поставленной цели. *Упорядоченность* заключается в целенаправленном выделении системообразующих элементов, установлении их существенных признаков, характеристик взаимосвязей между собой и с внешней средой. Системный подход, формирование систем позволяют выделить главное, наиболее существенное в исследуемых объектах и явлениях; игнорирование второстепенного упрощает, упорядочивает в целом изучаемые процессы. Для анализа многих сложных ситуаций такой подход важен сам по себе, однако, как правило, построение системы служит предпосылкой для разработки или реализации модели конкретной ситуации.

Описанный подход предполагает ясность цели исследования и детерминированное к ней отношение всех элементов системы, взаимосвязь между ними и с внешней средой. Такие системы называют *детерминированными*. Это не означает, что все предпосылки, лежащие в основе их построения, на практике выполняются. Однако во многих случаях, и это характерно для экономики, цель исследований – изучение и анализ природы усредненных и устойчивых в среднем показателей. Это определяет детерминированный подход к построению системы.

Перейдем к рассмотрению сущности понятий *модель* и *моделирование* [4]. Слово «модель» (фр. *modèle*) имеет несколько значений: образцовый экземпляр какого-либо изделия; вид, тип конструкции (например, автомобиля); материал, натура для художественного произведения; копия, воспроизведение предмета,

обычно в уменьшенном размере; исследуемый объект, представленный в наиболее общем виде.

В качестве примеров моделей можно привести глобус как модель земного шара, карту как модель местности, маленькую, например, настольную модель самолета, внешне подобную своему натуральному образцу, и т.д.

Однако по настольной модели самолета нельзя определить его прочностные, аэродинамические характеристики, характеристики системы управления. Следовательно, для реализации названных целей данная модель не годится. Эта модель подошла бы, если бы наша цель была – добиться внешнего подобия. Таким образом, и это главное, структура и свойства модели зависят от целей, для достижения которых она создается. В этом органическое единство системы и модели. Если неизвестна цель моделирования, то и неизвестно, с учетом каких свойств и качеств надо строить модель.

Следовательно, *модель – это формализованное представление об объекте исследования относительно поставленной цели.*

Модели можно различать по характеру моделируемых объектов, сферам приложения, глубине моделирования. В зависимости от средств моделирования выделяют материальное (предметное) и идеальное моделирование.

Материальное моделирование, основывающееся на материальной аналогии моделируемого объекта и модели, осуществляется путем воспроизведения основных геометрических, физических, других функциональных характеристик изучаемого объекта. Частным случаем материального моделирования является *физическое* моделирование, по отношению к которому, в свою очередь, частным случаем является *аналоговое* моделирование. Оно основано на аналогии явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. Пример аналогового моделирования – изучение механических колебаний с помощью электрической системы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями. Так как эксперименты с электрической системой обычно проще и дешевле, она исследуется в качестве аналога механической системы (например, при изучении колебаний мостов).

Идеальное моделирование отличается от материального принципиально. Оно основано на идеальной, или мыслимой, аналогии. В экономических исследованиях это основной вид моделирования. Идеальное моделирование, в свою очередь, разбивается на два подкласса: знаковое (формализованное) и интуитивное моделирование. При *знаковом* моделировании моделями служат схемы, графики, чертежи, формулы. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, осуществляемое средствами логико-математических построений.

Интуитивное моделирование (например, рисковых ситуаций [8]) встречается в тех областях науки, где познавательный процесс находится на начальной стадии или имеют место очень сложные взаимосвязи. Такие исследования называют мысленными экспериментами. В экономике в основном применяется интуитивное моделирование; оно описывает практический опыт исполнителей и руководящих работников.

2.2. Управление. Обратная связь. Замкнутая система

Введенные в разд. 2.1 понятия не дают возможности разделить системы на управляемые и неуправляемые. В широком смысле под *управлением* понимается конкретная организация тех или иных процессов для достижения намеченных целей. Управляемая система призвана обеспечивать целенаправленное функционирование при изменяющихся внутренних или/и внешних условиях. Неуправляемой системе целенаправленное функционирование не свойственно.

Примеры управляемых систем: движение автомобиля, работа предприятия в соответствии с договорами, планами и стимулами. Примеры неуправляемых систем: движение ветра, работа светофора с точки зрения автомобилистов (переключается автоматически независимо от состояния потока машин). В системе, структура которой установлена ее целевой ориентацией (для решения каких задач создается система), управление сводится к поддержанию расчетных значений выходных параметров при отклонениях внешних условий и внутренних параметров от расчетных.

В экономической системе выбор и формирование как структуры, так и способа функционирования являются задачами управления, обеспечивающими динамику ее развития. Однако соотношение типов задач – формирование или реструктуризация производства и способа функционирования системы – различно на разных уровнях иерархии управления.

2.2.1. Принципиальная схема управления

Любое управление предполагает наличие объекта управления (управляемой системы), субъекта управления (управляющей системы) и внешней среды.

Объект управления производит те или иные действия для реализации намеченных целей. Его сложность зависит от количества входящих в него элементов и природы взаимосвязей между ними. В процессе функционирования объект управления подвергается воздействию внешней среды, которая может способствовать или препятствовать достижению намеченных целей: благоприятная или неблагоприятная рыночная конъюнктура, сложившиеся цены, действия конкурентов и т.п.

Основное назначение управляющей системы – субъекта управления – поддерживать установленный и по каким-либо свойствам признанный нормальным режим работы объекта управления, а также обеспечивать нормальное функционирование отдельных элементов объекта управления в условиях воздействия внешней среды.

Объект управления во взаимодействии с управляющей системой – субъектом управления – образует замкнутую систему управления, упрощенный вариант которой приведен на рис. 2.1, где X – вектор воздействия внешней среды на объект управления; Y – вектор реакции на воздействие X. Связь, с помощью которой управляющая система – субъект управления – воздействует на объект управления, если эта связь имеется, называется *обратной связью*. Входным сигналом для обратной связи служит выходной сигнал системы Y. Если этот сигнал не соответствует целям управления замкнутой системой, то управляющая система выраба-

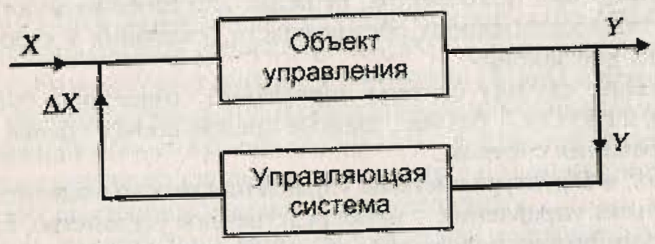

Рис. 2.1. Схема замкнутой системы управления (упрощенный вариант)

тывает воздействие обратной связи ΔX, которое вместе с сигналом X поступает на вход объекта управления (X, Y, ΔX – векторы соответствующих размерностей).

В правильно работающей с точки зрения поставленной цели системе сигнал $X + \Delta X$ должен способствовать улучшению качества функционирования замкнутой системы управления.

Количественные оценки степени достижения цели в модели управления даются в виде значений функционала (целевой функции), а условия, в рамках которых функционирует система, – в виде ограничений модели. Цель оптимального управления – нахождение наилучшего относительно принятой целевой функции критерия оптимизации. Для конкретных ситуаций при выборе способа управления, хозяйствования или ведения деятельности он реализуется в виде экстремального значения функционала.

Обратная связь является средством гибкого управления, когда конкретное управляющее решение вырабатывается в зависимости от сложившейся ситуации – возмущения установленного функционирования системы.

При отсутствии обратной связи (упомянутый выше светофор) движение регулируется по заранее заданной программе независимо от фактических потоков автомобилей, т.е. состояния системы на выходе. Другие примеры управления без обратной связи: уставы, кодексы, инструкции и наставления. При этом может оказаться, что управленческое решение, принятое согласно одному из указанных регламентирующих документов, с учетом конкретной ситуации, характеризующей состояние системы на выходе, когда решение было принято, не является наилучшим по сравнению с другими возможными. Но оно тем не менее считается обязательным, правомочным, так как отвечает регламентирующему документу. Подобные случаи порождают порой ситуации, когда, как говорят, возникает альтернатива – принять решение «по закону» или «по совести». Решение «по совести» может отражать учет неординарных обстоятельств, уводящих в сторону от решения «по закону».

В каких случаях система управления создается с обратной связью, а в каких – без нее, зависит прежде всего от целей функционирования системы.

Итак, в структуре системы управления можно выделить:

- объект управления – непосредственное устройство, агрегат, организационную подсистему общей системы, в которой реализуется цель функционирования всей системы;

- субъект управления – управляющую систему, которая фиксирует параметры объекта управления и вырабатывает при необходимости управляющие воздействия на объект управления для приведения его функционирования к режиму, который в соответствии с целью управления принято считать нормальным. Если достижение такого режима в условиях имеющихся ресурсов системы невозможно, то в качестве нормального может быть принят режим, отклоняющийся от желаемого минимально;
- обратную связь – объект, подсистему, с помощью которой реализуется воздействие субъекта на объект управления.

Эти элементы, формирующие в совокупности замкнутую систему управления, находятся под воздействием внешней среды, которая может способствовать или препятствовать достижению целей системы.

2.2.2. Иерархия управления

Представленное описание замкнутой системы управления весьма схематично и отражает только принцип ее построения. В действительности каждый из указанных элементов, в свою очередь, может включать объект, субъект управления с обратной связью или без нее, вся система будет иметь, таким образом, иерархическую структуру. Подобное характерно для экономических систем прежде всего. Например, в системе управления крупной фирмой отраслевого профиля (например, автомобильный или нефтяной гигант) в качестве объекта управления рассматривают подведомственные фирмы и дочерние предприятия, а управляющего органа – центральный аппарат. Обратная связь при этом осуществляется через систему учета, контроля и оперативного управления в отношении подведомственных предприятий. Каждое предприятие, являясь, таким образом, объектом управления, в свою очередь, представляет замкнутую систему под воздействием внешней среды – вышестоящего уровня управления со всеми необходимыми структурными элементами. Объект управления – цехи, производственные участки; управляющая система – дирекция предприятия со своими службами; обратная связь осуществляется также через систему учета, контроля и оперативного управления со стороны руководства предприятия.

Если спускаться по этой иерархической лестнице, то по аналогичной схеме можно рассмотреть систему управления цехом. В рамках крупных производственных комплексов (возможно, и международного уровня) такие иерархические структуры могут быть многоступенчатыми.

2.3. Экономическая система как объект управления
(некоторые аспекты математического моделирования)

Изложенное выше относится к характеристике систем управления практически любой природы – экономической, физической, производственно-технологической. Теоретические методы оптимального управления, которые будем изучать в следующих разделах, также не слишком связаны с природой системы или со спецификой объекта управления, скорее они ориентированы на определенную форму модели. Для показа широких прикладных возможностей изучаемых методов ТОУ будут приведены различные примеры с преобладанием, однако, экономических задач. С учетом этого рассмотрим наиболее существенные характеристики экономических систем как объектов управления.

Экономическая система охватывает параметры и характеристики производства, распределения, обмена и потребления материальных благ. Функционирование экономических систем, за исключением, может быть, простейших случаев, по своей сущности многокритериально. Это означает, что в процессе функционирования предприятия одновременно ставятся цели добиться максимально возможных прибыли и выпуска продукции в натуральном или стоимостном выражении, выдержать необходимые потребителю ее номенклатуру или ассортимент, уровень качества, снизить удельную себестоимость и т.д. Некоторые из этих показателей могут быть противоречивыми, например первый и последний. Стремление к максимальному валовому выпуску продукции (в стоимостном или натуральном выражении) одновременно ведет и к валовому росту себестоимости. Иначе быть не может, так как производство каждого дополнительного изделия сопряжено с дополнительными затратами, т.е., чем больше выпускается продукции, тем больше становится и суммарная себестоимость производства. Ограничение такой себестоимости – противоположное требование к росту выпуска продукции. Минимизировать себестоимость производства имеет смысл только тогда, когда точно установлен необходимый для реализации (например,

по договорам) объем производства. Подобные противоречия могут иметь место и в отношении других частных критериальных показателей. В целом можно представить себе одну из двух альтернатив: либо все принимаемые в расчет частные критериальные показатели ведут себя качественно сходным образом, достигая одновременно своих экстремальных значений, либо не существует такого возможного плана производства, которому отвечали бы экстремальные значения одновременно всех частных критериальных показателей. Свидетельство тому – приведенный выше пример.

Первой альтернативе отвечает по существу однокритериальная ситуация, когда используется основной в содержательном отношении критерий, а остальные игнорируются, поскольку ничему не противоречат, не влияют на оптимизацию основного принятого в модели критерия.

Вторая альтернатива заключается в выработке разумного с практической точки зрения компромисса, когда для принятого плана производства не достигаются потенциально возможные оптимальные значения отдельных целевых критериев, но каждый из них для этого плана принимает в той или иной мере близкое к оптимальному значение. Не будем рассматривать сейчас практические детали формализованного отражения компромиссов – это самостоятельная теория, но в конечном итоге проблема компромисса сводится к выработке некоторого комплексного критерия, в котором названные выше частные критерии присутствуют как отдельные составляющие.

Пользуясь современной терминологией, можно утверждать, что задачи управления экономикой плохо структурированы и не всегда модель может быть построена однозначным образом. Прежде всего цели функционирования многих экономических и особенно социально-экономических систем не всегда возможно четко сформулировать. Причем это относится не к особым условиям или ситуациям, а к самым обычным, ординарным. Например, каким конкретно показателем можно характеризовать уровень жизни населения ? Вопрос вроде бы ясный, но в то же время каждый исследователь может подойти к нему по-разному, посвоему.

Один из наиболее простых подходов и, казалось бы, естественных – это ориентация на рост денежных доходов населения. Однако за этим стоят многие сложные социально-экономические проблемы, такие, как укрепление покупательной способности рубля, насыщение сферы потребления качественными и доступными населению по стоимости товарами, гарантирование законности и социальной справедливости и т.п. Итак, как именно конструктивно реализовать поставленную задачу оценки уровня жизни населения, вообще говоря, содержательно понятную, остается далеко не ясным.

Итеративный режим использования в экономике математических моделей – один из характерных приемов в случае плохо структурированных задач. Процесс сходимости показателей в итеративном режиме понимается как целенаправленный человеко-машинный диалог с возможными изменениями исходных данных и, если необходимо, отдельных элементов модели. Другими словами, происходит самообучение модели объекта с помощью имитации его функционирования.

Построение математических моделей управления производством на каждом уровне иерархии связано с использованием агрегированной (укрупненной) информации: чем выше уровень иерархии, тем больше степень агрегирования данных. И соответственно должны существовать относительно простые методы, алгоритмы дезагрегирования (разукрупнения) информации при переходе к более низким уровням управления.

Нами рассмотрены некоторые общие положения, связанные с математическим моделированием экономических систем. Их учет привносит определенную специфику в методологию построения и использования на практике математических моделей в экономике. Более подробное обсуждение этих вопросов не входит в нашу задачу. Цель в другом: рассматривая общие условия использования положений и результатов математической теории оптимального управления, показать место ТОУ для экономических приложений.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит определение системы?
2. Чем отличается система от произвольной неупорядоченной совокупности разнородных элементов?
3. Как определяется замкнутая система? Приведите примеры.
4. Из каких элементов состоит замкнутая система?
5. Что такое обратная связь в системе? Приведите пример.

6. Могут ли быть системы без обратной связи? Приведите примеры.
7. Какие системы эффективнее – с обратной или без обратной связи ?
8. Как определяется разомкнутая система? Приведите пример.
9. Что такое существенные и несущественные элементы (признаки) в системе, как они влияют на ее структуру?
10. В чем состоят отличительные свойства экономических систем управления?
11. Каким показателем оценивается эффективность функционирования системы?
12. В чем заключается итеративный режим использования в экономике математических моделей?
13. Что такое агрегирование информации в экономике? Как это связано с уровнями управления?
14. Что такое плохо структурированные задачи в экономике?
15. Как реализуются на практике компромиссные решения в экономике?
16. В чем состоят основные свойства оптимальных по Парето компромиссных решений? Приведите примеры их применения на практике.

ГЛАВА 3 ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

3.1. Однопродуктовая динамическая макроэкономическая модель

Прежде чем переходить к построению абстрактных моделей управляемых процессов, в частности к моделям развития экономики (*см.* главу 4), рассмотрим механизм построения нескольких простых примеров экономической динамики.

Исследование взаимосвязей элементов производства вне общественной формы реализации продукции (рис. 3.1) приводит к производственно-технологической интерпретации экономики.

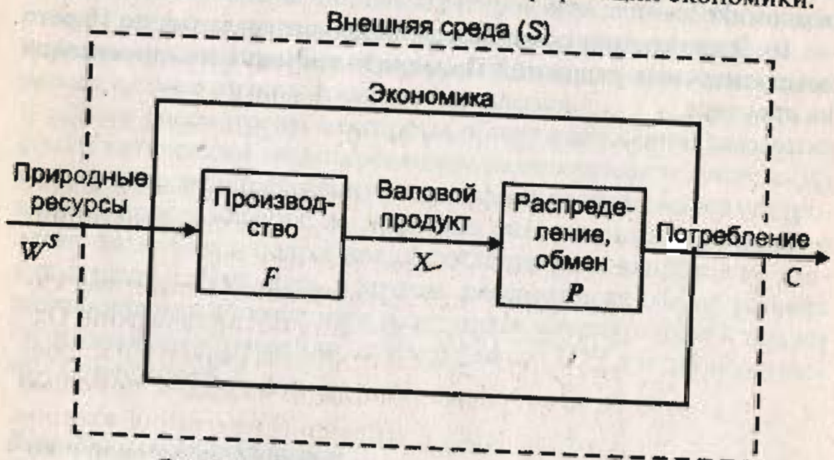

Рис. 3.1. Принципиальная схема производства и распределения продукции

На рис. 3.2 выделены факторы, характеризующие производство: живой труд (L), средства труда (основные производственные фонды, капитал K) и предметы труда (W^S) – ресурсы.

Результатом производственной деятельности является валовой продукт X, распределяемый в блоке P_X на производственное

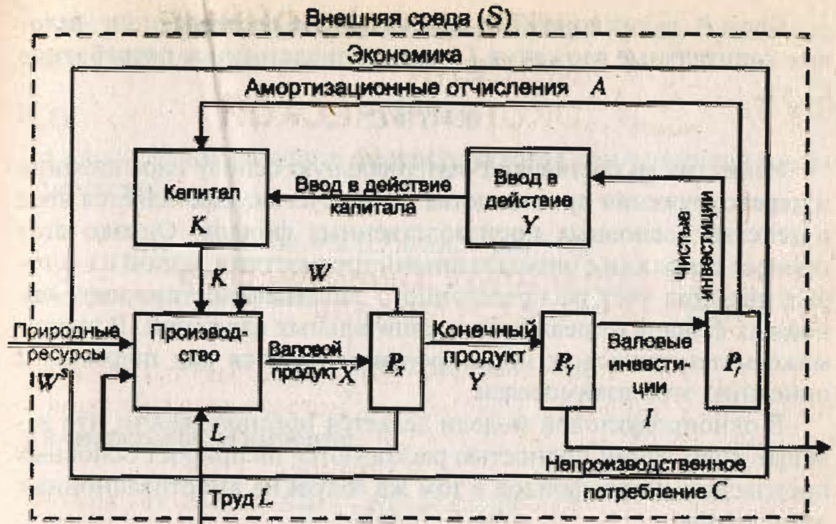

Рис. 3.2. Взаимодействие производственных факторов

потребление W и конечный продукт Y. В свою очередь, конечный продукт Y делится в блоке распределения P_Y на валовые капитальные вложения (I) и на непроизводственное потребление (C).

Валовые капитальные вложения I, входящие в блок P_I, делятся на амортизационные отчисления (A) и чистые инвестиции, идущие на расширение производственных фондов.

Ограничимся изучением взаимосвязей между синтетическими показателями верхнего уровня экономической иерархии. Одним из подходов к решению данной проблемы является построение однопродуктовой макроэкономической модели. С помощью этой модели изучают свойства и тенденции изменения взаимосвязанных агрегированных показателей, таких, как валовой и конечный продукты, трудовые ресурсы, производственные фонды (капитал), инвестиции, потребление и т.д. Так, на макроуровне блок распределения P_X показывает взаимосвязь между валовым продуктом X, производственным потреблением W и конечным продуктом Y:

$$X = W + Y. \tag{3.1}$$

Блок P_Y делит конечный продукт на две составляющие: валовые капитальные вложения I и непроизводственное потребление C, т.е.

$$Y = I + C. \tag{3.2}$$

Инвестиции составляют материальную основу наращивания и перевооружения производства. За их счет осуществляется ввод в действие основных производственных фондов. Однако этот процесс сопряжен с определенными трудностями, одной из которых является учет распределенного запаздывания прироста основных фондов от реализации капитальных вложений. В экономико-математическом моделировании имеется ряд подходов к описанию этой взаимосвязи.

В однопродуктовой модели делается предположение, что валовые инвестиции полностью расходуются на прирост основных производственных фондов в том же году и на амортизационные отчисления:

а) в дискретном варианте эта взаимосвязь имеет вид

$$I = q\,\Delta K_t + A; \tag{3.3}$$

$$\Delta K_t = K_{t+1} - K_t;$$

$$A = \mu K_t,$$

где ΔK_t – прирост основных производственных фондов в году t;
q – параметр модели;
A – амортизационные отчисления;
μ – коэффициент амортизации;
K_t – основные производственные фонды в году t;

б) аналогом уравнения (3.3) в непрерывном варианте является

$$I = q\frac{dK}{dt} + \mu K. \tag{3.3'}$$

Отсюда можно получить дифференциальное уравнение динамики фондов

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{q}(I - \mu K). \tag{3.4}$$

Объединяя уравнения связи (3.1) – (3.4), получим однопродуктовую динамическую макромодель в дискретном варианте:

$$X_t = W_t + q\,\Delta K_t + \mu K_t + C_t.$$

Если считать производственные затраты W пропорциональными выпуску продукции X, т.е.

$$W = aX, \tag{3.5}$$

то в дискретном варианте однопродуктовая динамическая модель примет вид

$$X_t = aX_t + q\,\Delta K_t + \mu K_t + C_t, \tag{3.6}$$

откуда можно получить

$$\Delta K_t = \frac{1}{q}[(1-a)X_t - \mu K_t - C_t],$$

а в непрерывном варианте

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{q}[(1-a)X - \mu K - C].$$

В некоторых случаях используют упрощенные варианты однопродуктовой динамической модели.

3.2. Частные случаи

Случай 1. Открытая однопродуктовая динамическая модель Леонтьева. Предполагают, что все валовые инвестиции идут на ввод в действие новых основных производственных фондов (основные фонды не изнашиваются). Считая, что прирост выпуска продукции $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$ пропорционален капитальным вложениям, т.е.

$$I_t = \eta \Delta X_t, \tag{3.7}$$

из уравнений (3.1) и (3.2) с учетом выражений (3.5) и (3.7) получим однопродуктовую открытую динамическую модель Леонтьева:

$$X_t = aX_t + \eta \Delta X_t + C_t.$$

В непрерывном варианте однопродуктовая динамическая макромодель Леонтьева имеет вид

$$X = aX + \eta\frac{dX}{dt} + C. \tag{3.8}$$

С математической точки зрения эта модель представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка (*см.* разд. 1.5, при решении уравнений второго порядка первый порядок может рассматриваться как частный случай).

Случай 2. Замкнутая однопродуктовая модель Леонтьева. Предполагают, что непроизводственное потребление $C(t)$ идет полностью на восстановление рабочей силы $L(t)$. Тогда, введя норму потребления $\gamma(t)$, получим

$$C(t) = \gamma(t)\, L(t). \tag{3.9}$$

Далее если считать, что затраты труда пропорциональны выпуску продукции, то

$$L(t) = b(t)\, X(t), \tag{3.10}$$

где $b(t)$ – норма трудоемкости.

Подставляя в формулу (3.8) соотношения (3.9) и (3.10), получим «замкнутую по потреблению» модель расширенного воспроизводства:

$$X(t) = a(t)X(t) + \eta(t)\frac{dX}{dt} + \gamma(t)b(t)X(t),$$

которая описывается однородным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dX}{dt} - p(t)X(t) = 0; \tag{3.10'}$$

$$p(t) = [1 - a(t) - \gamma(t)b(t)]\frac{1}{\eta(t)}.$$

Тогда развитие экономики определяется решением уравнения (3.10′):

$$X(t) = X_0 \exp\left(\int_0^t p(t)dt\right).$$

Случай 3. Непроизводственное потребление является известной функцией времени. При этом закон развития экономики определяется из модели (3.8), которая представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dX}{dt} + p_1(t)X(t) = f(t);$$

$$p_1(t) = -\frac{1}{\eta(t)}[1 - a(t)]; \quad f(t) = -\frac{1}{\eta(t)}C(t)$$

с решением

$$X(t) = \exp\left(-\int_0^t p_1(t)dt\right)\left[\int_0^t f(t)\exp\left(-\int_0^t p_1(t)dt\right)dt + X_0\right].$$

Итак, выделение из конечного продукта Y накапливаемой части I приводит к рассмотрению динамических моделей и применению для их исследования в качестве математического инструментария теории дифференциальных (в непрерывном случае) и конечно-разностных (в многошаговом варианте) уравнений.

3.3. Однопродуктовая оптимизационная динамическая макроэкономическая модель

Экономика содержит в себе объективную необходимость и возможность оптимального развития. Количественный анализ и математическая формулировка экономических законов служат переходной ступенью от их качественной трактовки к разработке моделей оптимального развития. При математической интерпретации экономических законов следует исходить из того, что закон, представляющий причинно-следственную связь производственных отношений, имеет некоторую количественную форму выражения. В качестве материального носителя при этом предполагается рассматривать в основном различные формы общественного продукта.

В исследуемой оптимизационной модели в качестве критерия оптимальности предполагается максимизировать дисконтированную сумму конечного (непроизводственного) потребления в течение срока прогнозирования (планирования) $[0; T]$:

$$J = \int_0^T \theta(t)C(t)dt \to \max, \tag{3.11}$$

где $C(t)$ – непроизводственное потребление;

$\theta(t)$ – функция дисконтирования, отражающая меру предпочтения потребления в данный момент t относительно потребления того же продукта в последующие моменты.

Принято считать, что $\max \theta(t) = \theta(0)$ и $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

Итак, если стоит задача оптимального развития экономики, то ее можно сформулировать следующим образом: определить такой вариант выпуска продукции $X(t)$ и такое непроизводственное потребление $C(t)$, которые обеспечат наибольшее интегральное дисконтированное потребление.

Модель примет следующий вид.

Для экономики, распределение продукции которой определено дифференциальным уравнением связи (*см.* дискретный аналог (3.6))

$$X(t) = aX(t) + q\frac{dK}{dt} + \mu K + C(t),$$

выпуск продукции ограничен производственной функцией $F(t, R, L)$ (подробнее *см.* в разд. 5.1):

$$0 \le X \le F(t, R, L),$$

а рост производственных фондов ограничен снизу:

$$K(t) \ge K_{\text{задан}} \text{ и } X(t_0) = X_0.$$

Необходимо найти такой вариант развития, который обеспечивает максимум функционала (3.11).

Итак, рассмотренная однопродуктовая модель учитывает не только динамику развития экономики, но и цель этого развития.

Количественное определение оптимального варианта развития экономики с помощью этой модели связано с использованием аппарата ТОУ (*см.* главу 5).

3.4. Нелинейная оптимизационная модель развития многоотраслевой экономики

Дезагрегирование динамической однопродуктовой макроэкономической модели приводит к рассмотрению развития многоотраслевой экономики.

Рассмотрим экономику, представленную n отраслями, каждая из которых идентифицируется отраслевым уравнением воспроизводства основных фондов в предположении, что инвестиции в i-ю отрасль полностью расходуются без учета запаздывания на прирост основных производственных фондов и на амортизационные отчисления:

$$\frac{dK^i}{dt} = I^i - \mu^i K^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.12}$$

где I^i – интенсивность валовых инвестиций;
μ^i – коэффициент амортизационных отчислений;
K^i – основные фонды.

При известном уровне основных производственных фондов в базисном году

$$K^i(0) = K^i_0 \tag{3.13}$$

производственные возможности отраслей ограничены производственной функцией отрасли

$$0 \le X^i \le F^i(t, K^i, L^i), \tag{3.14}$$

где X^i – интенсивность валовой продукции;
L^i – трудовые ресурсы.

Межотраслевые связи представлены балансовыми соотношениями

$$X^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j X^j + Y^i; \tag{3.15}$$

$$Y^i = \sum_{j=1}^{n} d^i_j I^i + C^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.16}$$

где Y^i – интенсивность конечного продукта i-й отрасли;
d^i_j – структурные коэффициенты основных производственных фондов;
C^i – интенсивность производственного потребления i-й отрасли.

Для лучшего понимания формул (3.15) и (3.16) читателю рекомендуется повторить основы межотраслевого баланса [9, с. 25 – 43].

Трудовые ресурсы отраслей ограничены неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} L^i \le L^0, \qquad (3.17)$$

где L^0 – общая оценка трудоспособного населения.

Кроме того, из экономических соображений очевидно, что

$$I^i \ge 0,\ C^i \ge 0,\ K^i \ge 0. \qquad (3.18)$$

В качестве исходной информации задаются начальные значения основных производственных фондов K_0^i, коэффициенты амортизации отраслей μ^i, матрица коэффициентов прямых затрат (из межотраслевого баланса) $A = (a_j^i(t))$, матрица структуры фондов (d_j^i), суммарные трудовые ресурсы L', определяемые демографическим прогнозом, производственные функции отраслей $F^i(t, K, L)$.

Необходимо найти модель процесса $v = (X^*(t),\ Y^*(t),\ I^*(t),\ C^*(t),\ K^*(t),\ L^*(t))$, оптимального в смысле

$$J(v) = \int_0^\infty g(t, C)e^{-\delta t}dt \to \max \qquad (3.19)$$

на D – множестве процессов (планов), определяемых условиями (3.12) – (3.17).

В формуле (3.19) $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования (*см.* формулу (3.11), функция дисконтирования $\theta(t) = e^{-\delta t}$; $g\ (t, C\ )$ – вогнутая функция полезности.

Введение нелинейных производственных функций в межотраслевой баланс позволяет учесть возможность взаимного замещения труда и капитала в отраслях и зависимость производительности труда от фондовооруженности (в нелинейных моделях производительность труда считается заданной функцией времени).

Рассмотренная нелинейная оптимизационная модель развития многоотраслевой экономики также является задачей, решаемой в ТОУ.

Итак, было рассмотрено несколько вариантов модели динамического роста с повышающейся степенью сложности. Это не означает, что нет других экономико-математических проблем, допускающих свое решение с помощью аппарата ТОУ. С ними мы еще в полной мере будем встречаться в следующих разделах, а сейчас всего лишь демонстрируем возможности применения ТОУ в экономике.

Вопросы для самопроверки

1. Что является главным фактором принятия управленческих решений в однопродуктовой динамической макроэкономической модели (ОДММ)?
2. Какие основные переменные фигурируют в ОДММ?
3. В чем состоит суть трех вариантов модели Леонтьева?
4. Что такое дисконтирование, где и каким образом оно используется?
5. Что означает матрица прямых затрат в межотраслевом балансе?
6. Чем различаются модели ТОУ в непрерывном и дискретном времени?
7. Что означает функция полезности, где она используется и каким свойством обладает?

ГЛАВА 4

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

4.1. Вспомогательные математические конструкции

В ТОУ для решения задач применяется специфический математический аппарат, основанный на достаточных условиях оптимальности. Это означает, что если утверждаемое условие оптимальности достаточно, то данный управляемый процесс оптимальный. Но это не означает, что не может быть других оптимальных процессов, для которых данное достаточное условие не выполняется. Другими словами, условие A достаточно для выполнения заданного условия B, когда

$$A=\begin{cases}\text{TRUE}, & \text{то } B=\text{TRUE};\\ \text{FALSE}, & \text{то } B=(\text{TRUE})\vee(\text{FALSE}).\end{cases}$$

Из опыта решения различных математических задач известно, что наиболее эффективным средством отыскания решений являются необходимые и достаточные условия. Однако, преподавая ТОУ уже более 20 лет, нам не удалось построить примера, где найденное оптимальное решение не удовлетворяло бы достаточным условиям оптимальности. Следовательно, хотя необходимость в общем случае не доказана, по-видимому, достаточные условия оптимальности по своей сути близки и к необходимым.

Для доказательства соответствующих теорем о достаточных условиях оптимальности введем некоторые вспомогательные математические конструкции.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимизации, решение которой будет использоваться в дальнейшем.

Пусть задан функционал

$$J=\sum_{t=0}^{T-1} f^0(t,x(t),\ u(t))\to\min; \tag{4.1}$$

$$x(t)=(x^1(t),x^2(t),\dots,x^n(t));$$

$$u(t)=(u^1(t),u^2(t),\dots,u^r(t)),$$

где $x(t)$ – вектор состояния системы;
$u(t)$ – вектор управления.

На векторы $x(t)$ и $u(t)$ наложены условия

$$(x(t),\ u(t))\in V^t,\quad t=0,1,\dots,T-1.$$

Требуется отыскать минимальное значение функционала (4.1) при заданных ограничениях.

Эту постановку можно рассматривать как частный вариант задачи оптимального управления в тривиальном случае, когда среди ограничений, определяющих множество M допустимых процессов, отсутствуют уравнения процесса.

В данной задаче нетрудно получить необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять оптимальное решение $(x^*(t),\ u^*(t))$, минимизирующее функционал (4.1) . Эти условия можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 4.1. Для того чтобы процесс $(x^*(t),\ u^*(t))$ был оптимальным, т. е. минимизировал функционал (4.1), необходимо и достаточно, чтобы при всех $t=0,1,\dots,T-1$

$$f^0(t,x^*(t),u^*(t))=\min_{(x,u)\in V^t} f^0(t,x,u). \tag{4.2}$$

Доказательство.

1. *Необходимость.* Пусть $(x^*(t),\ u^*(t))$ – оптимальный процесс, т. е. удовлетворяющий условию (4.1) . Это значит, что

$$J(x^*(t),\ u^*(t))\le J(x(t),\ u(t)) \tag{4.3}$$

при $\forall\ (x(t),\ u(t))\le V^t$. Требуется доказать, что он удовлетворяет и условию (4.2).

Допустим противное: имеется такое $t=\tau$, при котором условие (4.2) не выполняется. Это означает, что при $t=\tau$ существует такое значение $(x(\tau),\ u(\tau))$, что

$$f^0(\tau,x(\tau),\ u(\tau))<f^0(\tau,x^*(\tau),\ u^*(\tau)). \tag{4.4}$$

Рассмотрим новый процесс $(x^0(t),\ u^0(t))$, который определим так:

$(x^0(t),\ u^0(t))=(x^*(t),\ u^*(t))$ при $t\ne\tau$ и $(x(t),\ u(t))$ при $t=\tau$.

Вычислим значение функционала (4.1) J на этом процессе:

$$J(x^0(t),\ u^0(t)) = \sum_{t=0}^{t^*-1} f^0(t, x^*(t), u^*(t)) +$$

$$+ \sum_{t=t^*+1}^{T-1} f^0(t, x^*(t),\ u^*(t)) + f^0(\tau, x(\tau),\ u(\tau)).$$

Разбив выражение (4.1), для $J(x^*(t), u^*(t))$ аналогичным образом получим

$$J(x^*(t),\ u^*(t)) = \sum_{t=0}^{t^*-1} f^0(t, x^*(t), u^*(t)) +$$

$$+ \sum_{t=t^*+1}^{T-1} f^0(t, x^*(t),\ u^*(t)) + f^0(\tau, x(\tau),\ u(\tau)).$$

Сравним теперь правые части двух последних равенств. Первые два слагаемых в них совпадают, а третьи удовлетворяют сделанному предположению (4.4). Следовательно,

$$J(x^*(t), u^*(t)) > J(x^0(t), u^0(t)),$$

что противоречит условию (4.3) оптимальности процесса $(x^*(t), u^*(t))$.

Необходимость доказана.

2. *Достаточность*. Пусть процесс $(x^*(t), u^*(t))$ удовлетворяет теореме 4.1. Требуется доказать, что для него будет выполнено и условие (4.1), т.е. этот процесс будет оптимальным.

Рассмотрим произвольный допустимый процесс $(x(t), u(t))$. Тогда из (4.2) можно установить, что при $\forall\ t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$

$$f^0(0, x^*(0), u^*(0)) \le f^0(0, x(0), u(0));$$
$$f^0(1, x^*(1), u^*(1)) \le f^0(1, x(1), u(1));$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^0(T\text{-}1, x^*(T\text{-}1), u^*(T\text{-}1)) \le f^0(T\text{-}1, x(T\text{-}1), u(T\text{-}1)).$$

Складывая эти неравенства почленно, получим

$$\sum_{t=0}^{T-1} f^0(t, x^*(t), u^*(t)) \le \sum_{t=0}^{T-1} f^0(t, x(t),\ u(t)).$$

Левая и правая части в этом неравенстве – значение функционала (4.1) для процессов $(t, x^*(t), u^*(t))$ и $(t, x(t), u(t))$, т.е.

$J(t, x^*(t), u^*(t)) \le J(t, x(t), u(t))$, откуда вследствие произвольности процесса $(x(t),\ u(t))$ и вытекает справедливость условия (4.1) для процесса $(x^*(t), u^*(t))$, который, следовательно, и является оптимальным.

Достаточность доказана.

Изложенная теорема сводит решение поставленной задачи (4.1) к минимизации функции $f^0(t, x, u)$ при $\forall\ t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$ по переменным (x, u) на множестве $(x, u) \in V^t$. При этом существование минимума функции $f^0(t, x, u)$ при $\forall\ t$ есть необходимое и достаточное условие существования решения задачи (4.1).

Отметим, что условия теоремы могут быть аналогично сформулированы и для задачи максимизации функционала, если перед ним поставить знак «минус», провести соответствующее переобозначение функций под знаком суммы и результат устремить к минимуму (*см.* разд. 1.2).

Теорема 4.1 может быть обобщена и на непрерывный случай, когда функционал задается соотношением

$$J = \int_0^T f^0(t,\ x,\ u)dt \to \min. \tag{4.5}$$

Однако формулировка теоремы при этом нуждается в уточнении. Что касается достаточности условия (4.2), то и в непрерывном случае это также остается справедливым (доказательство дословно повторяет приведенное выше с заменой суммирования интегрированием). Необходимым же это условие, вообще говоря, не является, что показывает следующий пример.

Рассмотрим функционал

$$J = \int_0^1 x^2 dt \to \min, \tag{4.6}$$

заданный на множестве кусочно-непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющий ограничению $1 \le x(t) \le 2$. Так как вследствие указанного ограничения $x^2(t) \ge 1$ при всех t, то, очевидно, и значение J не может быть меньше единицы. Таким образом, если при некотором $x^*(t)$ будет достигнуто значение $J(x^*(t)) = 1$, то можно сделать вывод, что функционал (4.6) достигает минимального значения.

Возьмем в качестве $x^*(t)$ следующую функцию:

$$x^*(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } (0 \le t < 0{,}5) \wedge (0{,}5 < t \le 1); \\ 2, \text{ если } t = 0{,}5. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом значение $J(x(t)) = 1$. Следовательно, $x(t)$ минимизирует функционал J. Но данная функция, как легко видеть, не минимизирует $x^2(t)$ в функционале (4.6) при всех $t \in [0;\ 1]$. В частности, этого не происходит при $t = \frac{1}{2}$, где значение $x^* = 2$. Подынтегральную функцию $x^2(t)$ минимизирует значение $x^* = 1$.

Таким образом, в данном примере необходимость условия теоремы не выполняется.

Для того чтобы условие теоремы в непрерывном случае стало не только достаточным, но и необходимым, его нужно уточнить. А именно нужно потребовать, чтобы оно выполнялось не обязательно в каждой точке t интервала $[0;\ T]$, а за исключением, может быть, точек, значение функции в которых не влияет на величину интервала (4.5).

Возможен и другой путь. Если дополнительно наложить требование непрерывности на процесс $(x(t),\ u(t))$ и на функцию $f^0(t, x, u)$, то формулировка теоремы в непрерывном случае сохраняется дословно с заменой соотношения (4.1) на (4.5). Однако требование непрерывности $(x(t), u(t))$ является слишком сильным в задачах ТОУ (независимо от прикладной области) и не выполняется даже в простейших случаях, в чем мы неоднократно убедимся в дальнейшем, решая конкретные задачи оптимального управления.

4.2. Достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов

Рассмотрим задачу ТОУ в следующем виде:

$$J = \int_0^T f^0(t,x,u)dt + F(x(T)) \to \min; \tag{4.7}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x,u),\ i = 1,\dots,n; \tag{4.8}$$

$$x(0) = x_0,\ (x(t),\ u(t)) \in V^t. \tag{4.9}$$

Требуется найти допустимый, удовлетворяющий ограничениям (4.8) и (4.9) процесс $(x^*(t),\ u^*(t))$, минимизирующий функционал (4.7). Предполагается, что вектор оптимального состояния

$x^*(t)$ непрерывен при $t \in (0;\ T)$, а вектор оптимального управления $u^*(t)$ в той же области значений t может иметь конечное число точек разрыва первого рода.

Пусть $\varphi(t, x)$ – непрерывная функция $n + 1$ переменной $t, x^1, x^2, \dots, x^n$, имеющая по всем этим переменным непрерывные частные производные по крайней мере до второго порядка*. Построим с помощью функции $\varphi(t, x)$ функции $\Phi(x)$ и $R(t, x, u)$, определяемые по формулам:

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, f(t,x,u)\right) - f^0(t,x,u); \tag{4.10}$$

$$\Phi(x) = \varphi(T, x) + F(x), \tag{4.11}$$

где $F(x)$ – терминальный член в формуле (4.7).

Второе слагаемое в правой части формулы (4.10) обозначает скалярное произведение двух векторов. Первый из них – $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)$ – градиент функции $\varphi(t, x)$ по компонентам вектора x, второй – $f(t, x, u)$ – векторная функция, координаты которой указаны в формуле (4.8). Введя теперь необходимые обозначения, сформулируем теорему.

Теорема 4.2 (достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов). Пусть допустимый процесс $v^* = (x^*(t),\ u^*(t)) \in M$ и некоторая функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяют условиям:

1) $R(t, x^*(t), u^*(t)) = \max\limits_{(x,u)\in V^t} R(t,x,u)$ при $\forall\ t \in [0;T]$;

2) $\Phi(x^*(T)) = \min\limits_{x \in V_x^T} \Phi(x)$.

Тогда процесс $(x^*(t),\ u^*(t))$ является оптимальным.

Примечание. M – множество допустимых процессов v.

Доказательство. Введем вспомогательный функционал

$$L(x,u,\varphi) = -\int_0^T R(t,x,u)dt + \Phi(x(T)) - \varphi(0,x_0). \tag{4.12}$$

* Второй порядок частных производных функции $\varphi(t, x)$ потребуется в разд. 6.1.

Функционал (4.12) определен на множестве троек функций $(x(t), u(t), \varphi(t, x))$. Если фиксировать значение $\varphi(t, x)$, то получим функционал, заданный на парах $(x(t), u(t))$.

Будем рассматривать множество D таких пар $(x(t), u(t))$, которые удовлетворяют при всех $t \in [0; T]$ ограничениям $(x(t), u(t)) \in V^t$, но могут не удовлетворять остальным ограничениям (4.8), (4.9)). Очевидно, $M \subset D$.

Введенный функционал $L(x, u, \varphi)$ будем при фиксированном значении функции $\varphi(t, x)$ считать заданным на множестве D. Функционал J, определяемый соотношением (4.12), будем также рассматривать не только на множестве M, но и на множестве D.

Функционал $L(x, u, \varphi)$ обладает следующим свойством, связывающим его с функционалом J.

Лемма 4.1. Для любой функции $\varphi(t, x)$, имеющей непрерывные частные производные по всем своим аргументам, на множестве допустимых процессов значения функционалов L и J совпадают, т.е.

$$L(x(t), u(t)), \varphi(t, x)) = J((x(t), u(t)) \text{ для } \forall\ (x(t), u(t)) \in M. \quad (4.13)$$

Доказательство. Преобразуем выражение (4.12) для функционала $L(x, u, \varphi)$, учитывая, что процесс $(x(t), u(t))$, на котором вычисляется его значение, принадлежит множеству M. Подставим в формулу (4.12) выражения $R(t, x, u)$ и $\Phi(x(T))$ из соотношений (4.10) и (4.11).

По отмеченному выше свойству функция $R(t, x, u)$ представляет разность величины

$$\omega(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_i} f^i(t,x,u),$$

или в векторном виде

$$\omega(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + [\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x},\ f(t,x,u)], \quad (4.14)$$

и подынтегральной функции $f^0(t, x, u)$ в формуле (4.10).

Таким образом, функцию $R(t, x, u)$ при подстановке в нее допустимого процесса $(x(t), u(t))$ можно представить в виде

$$R(t,x(t),u(t)) = \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt} - f^0(t,x(t),u(t)).$$

Тогда интегральный член в формуле (4.12) окажется равным

$$-\int_0^T R(t,x(t),u(t))dt = -\int_0^T \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt}dt + \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt. \quad (4.15)$$

Вычисляя первое слагаемое в правой части равенства (4.15) по формуле Ньютона –Лейбница, получим

$$-\int_0^T \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt}dt = \varphi(0,x(0)) - \varphi(T,x(T)).$$

Следовательно, выражение (4.15) преобразуется к виду

$$-\int_0^T R(t,x(t),u(t))dt = \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt + \varphi(0,x_0) - \varphi(T,x(T)).$$

Вернемся к соотношению (4.12), преобразуя его правую часть с учетом предыдущего равенства. Получим

$$L(x(t),u(t),\varphi(t,x)) = \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt + \varphi(0,x(0) - \varphi(0,x_0) +$$
$$+ \Phi(x(T)) - \varphi(T, x(T)).$$

Второе и третье слагаемые обращаются в нуль, так как $x(0) = x_0$. Два последних слагаемых преобразуем с учетом равенства (4.11):

$$\Phi(x(T)) - \varphi(T, x(T)) = F(x(T)).$$

Отсюда окончательно имеем

$$L(x(t),u(t),\varphi(t,x)) = \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))dt + F(x(T)),$$

что совпадает с соотношением (4.13), справедливость которого и следовало доказать.

Лемма 4.2. При выполнении условий 1 и 2 теоремы 4.2 функционал $L(x, u, \varphi)$ достигает минимального значения на множестве D при $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$, т. е.

$$L(x^*(t),u^*(t),\varphi(t,x^*)) = \min_{(x(t),u(t))\in D} L(x,u,\varphi). \quad (4.16)$$

Действительно, функционал (4.12) состоит из трех слагаемых, последнее из которых – постоянная величина.

Рассмотрим первое слагаемое: $-\int_0^T R(t,x,u)dt$.

Так как предполагается выполненным условие 1 теоремы 4.2, то при $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$ подынтегральное выражение $R(t, x, u)$ достигает для всех $t \in [0; T]$ максимального значения, а $-R(t, x, u)$ – минимального. Следовательно, в формуле (4.12) первое слагаемое будет минимальным.

Что касается второго слагаемого в функционале (4.12), то согласно условию 2 теоремы 4.2 оно также примет минимальное значение при $x = x^*(T)$.

Таким образом, каждое из слагаемых в формуле (4.12) достигает на процессе $(x^*(t), u^*(t))$ минимального значения по сравнению с любым другим процессом $(x(t), u(t))$ на множестве D. Следовательно, этим свойством обладает и сумма этих слагаемых, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь функционал l_φ, заданный соотношением

$$l_\varphi = \min L(x, u, \varphi), \quad (x(t), u(t)) \in D.$$

Тогда свойство (4.16), доказанное в лемме 4.2, можно записать в виде

$$L(x(t), u(t), \varphi(t, x)) \geq l_\varphi, \quad \forall (x(t), u(t)) \in D; \tag{4.17}$$

$$L(x^*(t), u^*(t), \varphi(t, x)) = l_\varphi. \tag{4.18}$$

Теперь утверждение теоремы 4.2 доказывается просто.

Во-первых, так как множество M является подмножеством множества D, то на нем также выполняется ограничение (4.17), т.е.

$$L(x(t), u(t), \varphi(t, x)) \geq l_\varphi, \qquad (x(t), u(t)) \in M.$$

Но в силу леммы 4.1 последнее неравенство можно переписать так:

$$J(x(t), u(t)) \geq l_\varphi, \qquad (x(t), u(t)) \in M. \tag{4.19}$$

Поскольку по условию теоремы 4.2 $(x^*(t), u^*(t)) \in M$, то выражение (4.18), в свою очередь, также равносильно равенству

$$J(x^*(t), u^*(t)) = l_\varphi. \tag{4.20}$$

Сопоставляя соотношения (4.19) и (4.20), получим, что при всех $(x(t), u(t)) \in M$

$$J(x^*(t), u^*(t)) \leq J(x(t), u(t)),$$

откуда и вытекает оптимальность процесса $(x^*(t), u^*(t))$.

Теорема 4.2 доказана.

Прокомментируем содержательный смысл теоремы 4.2 о достаточных условиях оптимальности.

Если среди всех допустимых, согласно условиям теоремы 4.2, процессов $(x(t), u(t))$ установлен процесс $(x^*(t), u^*(t))$, то он будет оптимальным. Но как именно его определить, это процедура рассмотрения и анализа различных типов нижеследующих задач. Другими словами, доказанная теорема – признак оптимальности допустимого процесса, если он каким-либо способом найден.

Сделаем замечание, относящееся к формулировке теоремы 4.2 для задач ТОУ, в которых конечное состояние $x(T) = x_1$ задано. В этом случае множество V_x^T состоит из одной точки. Таким образом, область определения функции $\Phi(x)$ – единственное значение $x = x_1$, которое и есть ее точка минимума. В связи с этим условие 2 теоремы 4.2 в задачах с фиксированным конечным состоянием выполняется тривиально, следовательно, для задач данного класса в формулировке этой теоремы актуально лишь условие 1.

4.3. Достаточные условия оптимальности для многошаговых процессов

Для задач ТОУ в дискретных системах, так же как и в рассмотренных в разд. 4.2 непрерывных, может быть сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях оптимальности. Используемые при этом математические конструкции аналогичны введенным выше и являются их качественным аналогом для многошаговых процессов.

Задача оптимального управления дискретной системой формулируется следующим образом. Пусть управляемый процесс описывается системой разностных уравнений

$$x^i(t+1) = f^i(t, x(t), u(t)), \; t = 0,1, \dots, T\text{-}1; \; i = 1,2, \dots, n, \tag{4.21}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{4.22}$$

На возможные значения состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$ наложены ограничения

$$(x(t), u(t)) \in V^t. \tag{4.23}$$

Соотношения (4.22), (4.23) можно рассматривать как ограничения, определяющие множество M допустимых процессов $(x(t), u(t))$ в данной системе.

Требуется найти такой процесс $(x^*(t), u^*(t))$, который минимизирует функционал

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} f^0(t, x(t), u(t)) + F(x(T)) \to \min. \tag{4.24}$$

Так же как и при рассмотрении непрерывных систем, для формулировки теоремы о достаточных условиях оптимальности вводятся две функции: $R(t, x, u)$ и $\Phi(x)$. Для их построения, как и выше, введем функцию $\varphi(t, x)$ переменных $(t, x^1, x^2, \ldots, x^n)$, или в векторном виде (t, x). В отличие от непрерывных систем здесь от функции $\varphi(t, x)$, вообще говоря, не требуется наличия каких-либо аналитических свойств типа непрерывности или дифференцируемости.

Функцию $R(t, x, u)$ определим в дискретном процессе следующим образом:

$$R(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) - f^0(t, x, u), \tag{4.25}$$

а функцию $\Phi(x)$, как и раньше, зададим в виде

$$\Phi(x) = \varphi(T, x) + F(x). \tag{4.26}$$

Если считать аналогом производной в дискретном процессе для функции $f(t)$ выражение $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$, то первые два слагаемых в (4.25) могут рассматриваться как «производная» $\Delta\varphi(t, x(t))$ функции $\varphi(t, x(t))$, если $x(t)$ является решением системы (4.21), т.е. траекторией рассматриваемого процесса.

Если это так, то в выражении $\varphi(t+1, f(t, x, u))$ после подстановки $x = x(t)$, $u = u(t)$ можно, учитывая уравнение процесса (4.21), $f(t, x(t), u(t))$ заменить на $x(t+1)$. В результате получим, что на траектории $x(t)$ первые два слагаемых в формуле (4.25) будут равны

$$\Delta\varphi(t, x(t)) = \varphi(t+1, x(t+1)) - \varphi(t, x(t)). \tag{4.27}$$

Для дискретного процесса имеет место теорема о достаточных условиях оптимальности, формулировка которой почти дословно совпадает с формулировкой теоремы 4.2 для непрерывных систем.

Теорема 4.3 (достаточные условия оптимальности для многошаговых процессов). Пусть допустимый процесс $v^* = (x^*(t)), u^*(t)) \in M$ и некоторая функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяют условиям:

1) $R(t, x^*(t), u^*(t)) = \max\limits_{(x,u) \in V^t} R(t, x, u), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1;$

2) $\Phi(x^*(T)) = \max\limits_{x \in V^T} \Phi(x).$

Тогда процесс $(x^*(t), u^*(t))$ является оптимальным.

Доказательство. Теорема 4.3 доказывается аналогично теореме 4.2.

Рассмотрим вспомогательный функционал $L(x, u, \varphi)$ с помощью соотношения

$$L(x, u, \varphi) = -\sum_{t=0}^{T-1} R(t, x(t), u(t)) + \Phi(x(T)) - \varphi(0, x_0). \tag{4.28}$$

Как и раньше, оба функционала L и J будем рассматривать на множестве D процессов $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих ограничению (4.23) и множеству допустимых процессов $M \subset D$.

Лемма 4.3. Для любой функции $\varphi(t, x)$ значения функционалов L и J на множестве M допустимых процессов совпадают, т.е.

$$L(x(t), u(t), \varphi(t, x)) = J(x(t), u(t)), \quad \forall (x(t), u(t)) \in M. \tag{4.29}$$

Доказательство. Проведем преобразование выражения (4.28) для функционала L, учитывая, что процесс $(x(t), u(t))$ является допустимым.

Соотношение (4.28), подставляя в него $(x(t), u(t)) \in M$ с учетом формулы (4.25), можно привести к виду

$$L(x(t), u(t), \varphi(t, x)) = -\sum_{t=0}^{T-1} (\varphi(t+1), f(t), x(t), u(t)) - \varphi(t, x(t)) + \tag{4.30}$$
$$+ \sum_{t=0}^{T-1} f^0(t, x(t), u(t)) + \Phi(T, x) - \varphi(0, x_0).$$

Выражения под знаком суммы в первом слагаемом вследствие соотношения (4.27) при значениях $t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$ будут равны:

$\varphi(1, x(1)) - \varphi(0, x(0))$ при $t = 0$;

$\varphi(2, x(2)) - \varphi(1, x(1))$ при $t = 1$;

$\varphi(3, x(3)) - \varphi(2, x(2))$ при $t = 2$;

....

$\varphi(T\text{-}1, x(T\text{-}1)) - \varphi(T\text{-}2, x(T\text{-}2))$ при $t = T\text{-}2$;

$\varphi(T, x(T)) - \varphi(T\text{-}1, x(T\text{-}1))$ при $t = T\text{-}1$.

Складывая эти выражения, видим, что после попарных сокращений их сумма будет равна $\varphi(T, x(T)) - \varphi(0, x(0))$. После ее подстановки в формулу (4.26) с учетом $x(0) = x_0$ получим

$$L(x(t), u(t), \varphi(t, x)) = \sum_{t=0}^{T-1} f^0(t, x(t), u(t)) + F(x(T)),$$

что совпадает с равенством (4.29), которое и требовалось установить.

Лемма 4.4. При выполнении условий 1 и 2 теоремы 4.3 функционал $L(x, u, \varphi)$ достигает минимального значения на множестве D при $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$, т.е.

$$L(x^*(t), u^*(t), \varphi(t, x)) = \min_{(x(t), u(t)) \in D} L(x, u, \varphi). \qquad (4.31)$$

Доказательство. Рассмотрим каждое из трех слагаемых в выражении (4.28) для функционала L.

По условию 1 теоремы 4.3 стоящая под знаком суммы в первом слагаемом в соотношении (4.28) функция $R(t, x(t), u(t))$ достигает при всех $t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$ своего максимального значения на процессе $(x^*(t), u^*(t))$. Вследствие теоремы 4.1 это является достаточным условием того, что максимальной будет и вся сумма значений $\sum_{t=0}^{T-1} R(t, x(t), u(t))$. Так как знак перед этой суммой отрицателен, то первое слагаемое в выражении (4.28) достигает на процессе $(x^*(t), u^*(t))$ своего минимального значения.

Второе слагаемое в соотношении (4.28) также будет минимально при $x = x^*(T)$ по условию 2 теоремы 4.3, а третье слагаемое – постоянная величина. Таким образом, все три слагаемых одновременно достигают минимального значения на процессе $(x^*(t), u^*(t))$. Следовательно, минимальной будет и их сумма, равная $L(x^*(t), u^*(t), \varphi(t, x))$.

Лемма 4.4 доказана.

Если теперь обозначим

$$l_\varphi = \min_{(x(t), u(t)) \in D} L(x, u, \varphi),$$

то, повторяя рассуждения для непрерывного процесса, получим с учетом леммы 4.4 соотношения (4.17) и (4.18). Применяя лемму 4.4, получим оценку (4.19) функционала $L(x, u)$, откуда с учетом допустимости процесса $(x^*(t), u^*(t))$ вытекает его оптимальность.

В дискретном процессе остаются справедливыми и сделанные в конце разд. 4.2 замечания, относящиеся к случаю $x(T) = x_1$.

4.4. Обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности

В главе 1 при изучении свойств операторов max и min, sup и inf были установлены различия между ними. Они на качественном уровне относятся и к ТОУ для классов задач отыскания экстремумов функционалов. В разд. 4.2 и 4.3 шла речь об условиях, гарантирующих оптимальность данного процесса $(x^*(t), u^*(t))$. Здесь установим, при каких условиях последовательность допустимых процессов $\{x_s^*(t), u_s^*(t)\}$ будет минимизирующей последовательностью в данной задаче оптимального управления.

Рассмотрим сначала задачу оптимального управления для непрерывных систем, когда ограничения, определяющие множество допустимых процессов, задаются соотношениями (4.8) и (4.9), а функционал J имеет вид (4.7). В задаче ТОУ для непрерывных систем достаточные условия оптимальности указанной последовательности могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 4.4 (обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности для непрерывных процессов). Пусть имеется последовательность допустимых процессов $\{x_s^*(t), u_s^*(t)\}$, принадлежащих M при $\forall\, s = 1, 2, \ldots$ Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t, x)$ (т.е. имеющая по крайней мере вторые частные производные по всем своим переменным), которая при $s \to \infty$ удовлетворяет условиям:

1) $R(t,x_s^*(t),\ u_s^*(t)) \to \sup\limits_{(x,u)\in V^t} R(t,x,u)$ равномерно по $t\in[0;\ T]$;

2) $\Phi(x_s^*(T)) \to \inf\limits_{x\in V_x^T} \Phi(x)$.

Тогда последовательность $\{x_s^*(t),\ u_s^*(t)\}$ является минимизирующей для функционала J.

Доказательство. Оно проводится с помощью тех же вспомогательных конструкций, что и в разд. 4.1.

Область M допустимых процессов расширяется с помощью таких процессов $(x(t),\ u(t))$, которые удовлетворяют условию $(x(t),\ u(t)) \in V^t$ при $\forall\ t \in [0,\ T]$, но не обязательно удовлетворяют уравнению процесса. Эти процессы составляют множество D, и M является его подмножеством.

Введем определенный на множестве D (следовательно, и на множестве M) функционал $L\ (x,\ u,\ \varphi)$ с помощью соотношения (4.12). О функционале $L\ (x,\ u,\ \varphi)$ известно (*см.* лемму 4.1), что на множестве M его значение совпадает со значениями функционала J (соотношение (4.13)).

Обозначим l_φ аналогично тому, как было сделано в формуле (4.18):

$$l_\varphi = \inf_{(x,u)\in D} L(x,u,\varphi).$$

Так как M есть подмножество D ($M \subset D$), то

$$\inf_{(x,u)\in D} L(x,u,\varphi) \le \inf_{(x,u)\in M} L(x,u,\varphi),$$

откуда

$$\inf_{(x,u)\in M} J(x,u) \ge l_\varphi. \tag{4.32}$$

С другой стороны, из условия 1 настоящей теоремы для первого слагаемого в правой части соотношения (4.12) получаем

$$\int_0^T R(t,x_s^*\ (t),\ u_s^*\ (t))\ dt \to \sup_{(x,u)\in D} \int_0^T R(t,x(t),u(t))dt.$$

Следовательно, взятое с обратным знаком, это слагаемое стремится к

$$\inf_{(x,u)\in D} \left(-\int_0^T R(t,x(t),u(t))dt\right).$$

Из условия 2 теоремы 4.4 сразу получаем, что второе слагаемое в правой части функционала (4.12) также стремится к своей нижней грани.

Последнее слагаемое в правой части формулы (4.12) – постоянная величина, не влияющая на предельный переход, поэтому можно сделать вывод, что при $s\to\infty$

$$L\ (x_s^*(t),\ u_s^*(t),\ \varphi) \to l_\varphi. \tag{4.33}$$

Сравнивая соотношения (4.32) и(4.33) и пользуясь определением точной нижней грани (inf) функционала, можно написать $J(x_s^*,\ u_s^*) \to \inf\limits_{(x,u)\in M} J(x,u)$, т.е. последовательность $(x_s^*(t),\ u_s^*(t))$ является минимизирующей для функционала J на множестве M, что и утверждается в теореме 4.4.

Эта теорема остается справедливой, если несколько видоизменить ее условия.

Как отмечалось выше, иногда бывает удобно в условиях теоремы предполагать, что верхняя грань функции $R\ (t,\ x,\ u\ )$ рассматривается при данном значении t только на множестве $(x(t),\ u(t)) \in M$, являющемся подмножеством множества V^t. При таком изменении формулировка теоремы остается справедливой.

Условие 1 теоремы 4.4 может быть ослаблено, если сформулировать ее в виде

$$\int_0^T R(t,x_s^*\ (t),\ u_s^*\ (t))\ dt = \sup_{(x,u)\in D} \int_0^T R(t,x(t),u(t))dt.$$

Если же при $\forall\ t\in\ [0;\ T]$ существует $\max R\ (t,\ x,\ u)$ при $(x,u) \in V^t$, то утверждение теоремы остается верным при замене условия 1 также более слабым условием

$$\int_0^T R(t,x_s^*\ (t),\ u_s^*\ (t))\ dt \to \int_0^T R(t,x,u)dt, \quad \forall(x,u)\in V^t. \tag{4.34}$$

Использованное в формулировке теоремы 4.4 условие 1 является достаточным для выполнения соотношения (4.34) , так как равномерная сходимость подынтегральных функций обеспечивает и сходимость интеграла, однако диапазон применимости этого условия шире, чем условия 1 теоремы 4.4. Например, условие (4.34) можно применять для таких процессов, где управление $u(t)$ или состояние $x(t)$ не является ограниченным на отрезке

$[0; T]$. В этом случае даже если верхняя грань функции R и не существует при $\forall\, t \in [0; T]$, то для применения соотношения (4.34) требуются лишь существование и конечность интегралов в этом соотношении.

Перейдем теперь к обобщенной теореме о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов в дискретных системах.

Постановка задачи оптимального управления определяется функционалом (4.24), который требуется минимизировать на множестве M допустимых процессов, задаваемом ограничениями (4.21) – (4.23).

Так как доказательство теоремы для дискретных процессов может быть проведено аналогично доказательству теоремы для непрерывного процесса, ограничимся ее формулировкой.

Теорема 4.5 (обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов). Пусть имеется последовательность $\{x_s^*(t),\ u_s^*(t)\} \in M$ при $\forall\ s = 1, 2, \ldots, T$. Предположим, существует функция $\varphi(t, x)$, которая при $s \to \infty$ удовлетворяет условиям:

1) $R(t, x_s^*(t), u_s^*(t)) \to \sup\limits_{(x,u) \in V^t} R(t,x,u)$ для $\forall\ t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$;

2) $\Phi(x_s^*(T)) \to \inf\limits_{x \in V_x^T} \Phi(x)$.

Тогда последовательность $\{x_s^*(t),\ u_s^*(t)\}$ является минимизирующей для функционала J.

4.5. Применение достаточных условий оптимальности к решению задач

4.5.1. Линейные по управлению процессы без ограничений на управление

Доказанные в разд. 4.2 – 4.4 теоремы могут использоваться не только для проверки оптимальности некоторого процесса $(x^*(t), u^*(t))$, но и при отыскании оптимального процесса. Здесь рассмотрим класс оптимизационных задач, в которых непосредственное применение достаточных условий позволяет эффективно и не очень сложно строить оптимальное решение.

Управляемый процесс описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = P(t,x) + Q(t,x)u. \tag{4.35}$$

Данный процесс $(x(t), u(t))$, где $x(t)$ и $u(t)$ – скалярные функции, протекает при $t \in [0; T]$, причем начальное состояние системы при $t = 0$ и конечное при $t = T$, в которое ее требуется перевести, заданы:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \tag{4.36}$$

Функционал определяется соотношением

$$J = \int_0^T (P^0(t,x) + Q^0(t,x)u)dt \to \min. \tag{4.37}$$

В формулах (4.35), (4.37) $P(t, x)$, $Q(t, x)$, $P^0(t, x)$, $Q^0(t, x)$ – заданные непрерывные функции, причем $Q(t, x) \neq 0$ при $\forall\, t \in [0; T]$.

Рассматриваемый класс задач характеризуется линейной зависимостью от управления в правой части уравнения процесса (4.35) и подынтегральной функции (4.37). Зависимость же их от t и x может быть, вообще говоря, произвольной.

Предположим, что в данных задачах отсутствуют ограничения на $x(t)$ и $u(t)$. Для нахождения оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$ применим к подобным задачам теорему 4.2.

С учетом формул (4.35) и (4.37) запишем функцию $R(t, x, u)$ (4.10) следующим образом:

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}[P(t,x) + Q(t,x)u] - P^0(t,x) - Q^0(t,x)\,u, \tag{4.38}$$

где $\varphi(t, x)$ – некоторая функция, которую нужно определить.

Наша цель будет состоять в подборе функции $\varphi(t, x)$ таким образом, чтобы процесс $(x^*(t), u^*(t))$ при каждом t, максимизирующем выражение (4.38), был допустимым. При таком подходе процесс $(x^*(t), u^*(t))$ является оптимальным. Действительно, условие 1 теоремы 4.2 будет выполнено для процесса $(x^*(t), u^*(t))$, а условие 2, как отмечалось в разд. 4.2, удовлетворяется тривиально, поскольку правый конец траектории зафиксирован: $x(T) = x_1$.

Зададим функцию $\varphi(t, x)$ так, чтобы функция $R(t, x, u)$ не зависела от u. Из формулы (4.38) видно, что зависимость R от u линейна, поэтому независимость от u означает равенство нулю коэффициента при u, т.е.

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}Q(t,x)-Q^0(t,x)=0. \qquad (4.39)$$

При таком задании $\varphi(t, x)$ функция R будет зависеть от двух переменных: $R = R(t, x)$. Если теперь при каждом значении t найти $\max R(t, x)$ по x, получим некоторую траекторию $x^*(t)$. В случае допустимости $x^*(t)$, т.е. если она удовлетворяет условиям (4.36), эта траектория и будет искомым оптимальным решением. Соответствующее оптимальное управление $u^*(t)$ получим, подставляя $x^*(t)$ в уравнение процесса (4.35):

$$u^*(t)=\frac{\dfrac{dx^*(t)}{dt}-P(t,x^*(t))}{Q(t,x^*(t))}. \qquad (4.40)$$

При этом управление $u^*(t)$ будет допустимым из-за отсутствия в задаче ограничений на управление.

Найденный процесс $(x^*(t), u^*(t))$ будет удовлетворять условию 1 теоремы 4.2. Если окажутся выполненными краевые условия (4.36), то по этой теореме процесс $(x^*(t), u^*(t))$ будет оптимальным.

Для реализации представленной идеи требуется найти функцию $\varphi(t, x)$ из уравнения (4.39). Преобразуя его, получим

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}=\frac{Q^0(t,x)}{Q(t,x)}.$$

Данное уравнение – простейшее с частными производными. Его общее решение находится непосредственным интегрированием:

$$\varphi(t,x)=\int_c^x\frac{Q^0(t,\xi)}{Q(t,\xi)}d\xi+C(t), \qquad (4.41)$$

где c – произвольное число, которое можно, например, принять равным нулю;

$C(t)$ – произвольная функция времени.

Равенство (4.41) задает множество всех решений уравнения (4.35), любые два из которых отличаются друг от друга только на произвольную функцию времени. Чтобы с помощью найденной функции $\varphi(t, x)$ составить функцию R, вычислим слагаемые в выражении (4.38). Чтобы вычислить частную производную $\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}$, воспользуемся правилом дифференцирования интегралов по параметру. Из равенства (4.41), где параметром в подынтегральной функции является t, будем иметь

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=\int_c^x\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{Q^0(t,\xi)}{Q(t,\xi)}\right]d\xi+C_1(t). \qquad (4.42)$$

Подставляя значения производных функции $\varphi(t, x)$ в соотношение (4.38), получим

$$R(t,x)=\frac{Q^0(t,x)P(t,x)-P^0(t,x)Q(t,x)}{Q(t,x)}+\int_c^x\frac{\partial}{\partial t}\frac{Q^0(t,\xi)}{Q(t,\xi)}d\xi+C_1(t). \qquad (4.43)$$

Формула (4.43) позволяет получать выражение для функции $R(t, x)$ в любой задаче рассматриваемого в данном разделе класса. Отметим, что искомое значение $x^*(t)$, максимизирующее $R(t, x)$, не зависит от вида функции $C_1(t)$, так как последняя не зависит от x. Поэтому ее можно считать равной нулю (или любой другой константе или функции времени).

Все изложенное до сих пор справедливо, и траектория $x^*(t)$ является оптимальной, если выполняются краевые условия $x^*(0) = x_0$, $x^*(T) = x_1$.

В общем случае, когда краевые условия не выполнены (хотя бы любое одно из них), решение задачи может быть найдено в классе минимизирующих последовательностей. Для построения последовательности поступают следующим образом. Рассмотрим произвольную последовательность моментов времени $\tau_s \to 0$ и $\tau'_s \to T$ (рис. 4.1).

Соединим начальную точку x_0 прямой l_1 с точкой $x^*(\tau_1)$, эту же точку x_0 прямой l_2 – с точкой $x^*(\tau_2)$ и т.д. В результате получаем последовательность кривых $x_s^*(\tau)$, каждая из которых состоит из трех участков:

$$x_s^*(t)=\begin{cases} l_s, t\in[0;\tau_s);\\ x^*, t\in[\tau_s;\tau'_s);\\ l'_s, t\in[\tau'_s;T].\end{cases}$$

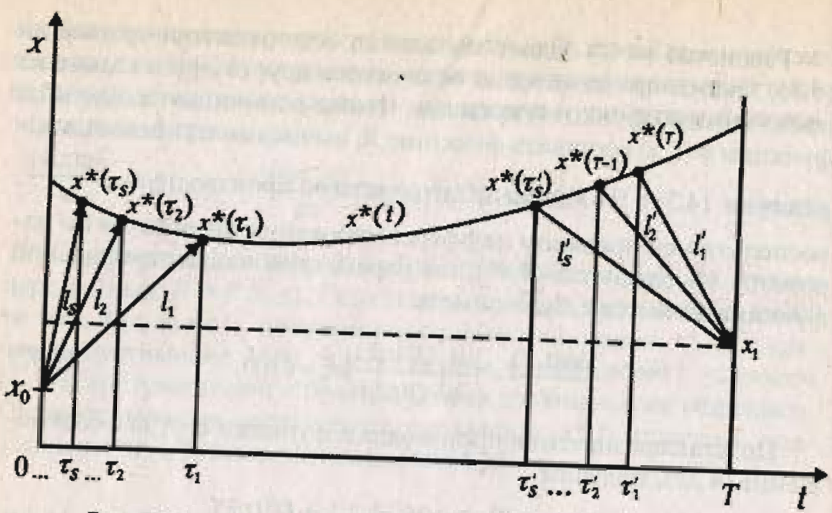

Рис. 4.1. Построение минимизирующей последовательности

Прямые l_s и l_s' задаются уравнениями

$$x = x_0 + [x^*(\tau_s) - x_0]\frac{t}{\tau_s};$$

$$x = x_1 + [x^*(\tau_s') - x_1](t - T)\frac{1}{\tau_s' - T}. \tag{4.44}$$

Полученные значения $x_s^*(t)$ будем рассматривать как траектории системы (4.35). Реализующие их уравнения $u_s^*(t)$ можно получить, подставляя значения $x_s^*(t)$ в формулу (4.39). После определения $u_s^*(t)$ получаем последовательность $(x_s^*(t),\ u_s^*(t))$ допустимых процессов, удовлетворяющих ограничениям (4.35) и (4.36) данной задачи. Построенная последовательность процессов является минимизирующей и представляет решение задачи. Покажем это.

Воспользуемся обобщенной теоремой 4.4. Как отмечалось в разд. 4.4, в данной задаче требуется для последовательности $(x_s^*(t),\ u_s^*(t))$ проверить выполнение лишь условия 1. Условие 2 удовлетворяется автоматически, так как $x_s^*(T) = x_1$ при всех s.

Как видно из рис. 4.1, сходимость $x_s(t)$ к $x_s^*(t)$ на интервале $[0;\ T]$ не является равномерной; следовательно, равномерная сходимость функции $R\ (t,\ x(t))$ в формуле (4.43) к своей верхней грани $R\ (t,\ x^*(t))$ не гарантирована, а в точках $t = 0$ и $t = T$ вообще может не иметь места. Поэтому будем проверять условие 1 теоремы 4.4, сформулированное в виде соотношения (4.34). В соответствии с этим требуется проверить, что при $s \to \infty$

$$\int_0^T R(t, x_s^*(t))\, dt \to \int_0^T R(t, x^*(t))dt. \tag{4.45}$$

Для того чтобы установить справедливость условия (4.45), представим интеграл в левой части в виде трех слагаемых:

$$\int_0^T R(t,\ x_s^*(t))\, dt = \int_0^{\tau_s} R(t,\ x_s^*(t))\, dt + \int_{\tau_s}^{\tau_s'} R(t,\ x_s^*(t))\, dt + \int_{\tau_s'}^{T} R(t,\ x_s^*(t))\, dt. \tag{4.46}$$

В связи с тем, что функция $R\ (t,\ x_s^*(t))$ ограничена, а длины промежутков интегрирования τ_s и $T\text{-}\tau_s'$ в первом и третьем слагаемых в формуле (4.46) стремятся к нулю, эти интегралы при $s \to \infty$ также стремятся к нулю. Аналогично согласно формуле (4.46) на промежутке $[\tau_s,\ \tau_s']$ значение $x_s^*\ (t)$ совпадает с $x^*(t)$, и второе слагаемое будет равно

$$\int_{\tau_s}^{\tau_s'} R(t, x_s(t))dt = \int_{\tau_s}^{\tau_s'} R(t, x(t))dt.$$

Следовательно, при $s \to \infty$ оно стремится к значению правой части (4.45). Это и доказывает, что данное соотношение выполняется для последовательности траекторий $x_s^*(t)$. Поэтому последовательность $(x_s^*(t),\ u_s^*(t))$ является минимизирующей.

Перейдем теперь к случаю, когда в рассматриваемой оптимизационной задаче (4.35) – (4.37) имеются ограничения на состояние. Множество допустимых состояний V_x^t при каждом фиксированном t представляет собой некоторое множество на числовой прямой. Будем считать, что это множество – отрезок

$$a(t) \le x(t) \le b(t). \tag{4.47}$$

Если по-прежнему считать, что на управление не наложено ограничений, то единственное изменение при решении данной задачи по сравнению с задачей без ограничений состоит в том, что траектория $x\ (t)$ в ней строится из условия

$$R(t,x(t)) \to \max_{x \in V_t^1} R(t,x),$$

где $R(t, x)$ задается соотношением (4.43).

Раньше же $R(t, x)$ находилась исходя из необходимого условия безусловного максимума этой функции $\dfrac{\partial R(t,x)}{\partial x} = 0$.

4.5.2. Линейные по управлению процессы с ограничениями на управление

Рассмотрим теперь общий случай, когда имеются ограничения на состояние и на управление. Исследуем наиболее часто встречающийся в задачах случай, когда область допустимых управлений задается ограничением

$$u_1(t, x) \le u \le u_2(t, x). \tag{4.48}$$

Таким образом, к ограничениям (4.35) – (4.37) оптимизационной задачи добавлены ограничения (4.47) – (4.48).

Решение сформулированной задачи начнем с определения области возможных состояний системы. Она определяется множеством всех траекторий, удовлетворяющих уравнению (4.35), краевым условиям (4.36) и ограничениям (4.47) и (4.48).

Для построения этого множества рассмотрим четыре траектории, отвечающие минимальному $u_1(t, x)$ и максимальному $u_2(t, x)$ значениям управления и краевым условиям (4.36). Пусть $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ – решения уравнений (траектории)

$$\frac{dx}{dt} = P(t,x) + Q(t,x)u_1(t,x);$$

$$\frac{dx}{dt} = P(t,x) + Q(t,x)u_2(t,x)$$

при начальном условии $x(0) = x_0$, а $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – их решения при конечном условии $x(T) = x_1$. Соответствующие функции этих решений изображены на рис. 4.2. Нетрудно заметить, что решение $x(t)$ уравнения (4.35), начинающееся в точке x_0 и оканчивающееся в точке x_1, не может выйти за пределы области, ограниченной кривыми $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $i = 1,2$.

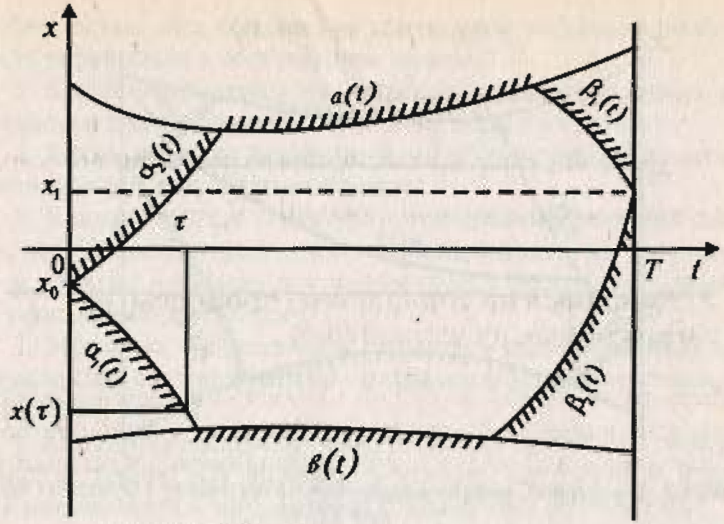

Рис. 4.2. Ограничения допустимого множества

Проанализируем, например, некоторую траекторию $x^1(t)$ с начальной точкой $x^1(0) = x_0$, отвергающую управление $u^1(t)$, и покажем, что она не может пересечь границу $\alpha_i(t)$. Так как по предположению $Q(t, x) \ne 0$, то пусть для определенности $Q(t, x) > 0$.

Рассмотрим кривую $\alpha_1(t)$, отвечающую минимальному значению управления $u = u_1(t, x)$. Пусть некоторая траектория, отвечающая управлению $u^1(t)$, пересекает α_1 в точке $t = \tau$ (рис. 4.3). Тогда в данной точке производная $\dfrac{dx}{dt} > \alpha_1(\tau)$. Так как обе траектории $x^1(t)$ и $\alpha_1(t)$ удовлетворяют уравнению (4.35) и $Q(t, x) > 0$, то нетрудно установить, что в точке $t = \tau$

$$u^1(\tau) < u_1(\tau, x(\tau)),$$

что противоречит ограничению на управление (4.48).

Аналогично доказывается, что траектории не могут пересекать остальные кривые: $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$.

Таким образом, мы сузили исходную область V_{tx} допустимых значений (t, x). Образовавшуюся область обозначим V^1, при этом $V^1 \subset V_{tx}$.

Перейдем к построению оптимальной траектории. Для этого рассмотрим траекторию $x^*(t)$, максимизирующую при каждом t функцию $R(t, x)$. Эта траектория изображена на рис. 4.3.

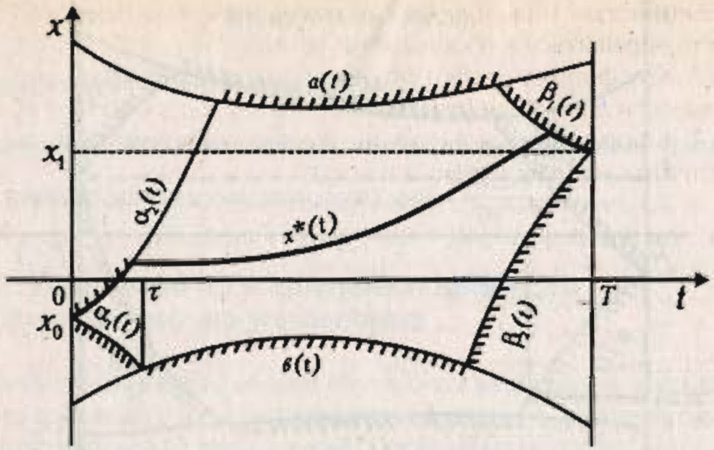

Рис. 4.3. Траектория, максимизирующая по аргументу x функцию $R(t, x)$ при $\forall t$

Если траектория $x^*(t)$ допустима, то она является оптимальной, так как удовлетворяет теореме 4.2. Действительно, условие 1 данной теоремы выполнено по построению траектории $x^*(t)$ как раз из требования максимума функции $R(t,x)$, которая не зависит от u^*. Следовательно, максимум по u достигается автоматически. Условие же 2 превращается в тривиальное, так как в данной задаче значение $x^*(T)$ зафиксировано.

Пусть управление $u^*(t)$ реализует траекторию $x^*(t)$. Оно определяется из уравнения процесса (4.40).

В конкретных задачах, как правило, оптимальная траектория состоит из трех участков, как показано на рис. 4.3. Два из них, примыкающих к граничным значениям x_0 и x_1, отвечают предельным значениям управлений $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$, а средний участок соответствует некоторому промежуточному значению управления. Это наглядно будет показано в главе 5 на примере однопродуктовой макроэкономической модели.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается логика теорем о достаточных условиях оптимальности?

2. Как формулируется теорема о достаточных условиях оптимальности для непрерывных процессов? Какой существенной

особенностью она обладает и тем самым вызывает необходимость обращаться к обобщенной теореме?

3. Как формулируется теорема о достаточных условиях оптимальности для управляемых многошаговых процессов?

4. Каким образом формулируется обобщенная теорема о достаточных условиях оптимальности?

5. Какова типовая структура оптимального решения для задач, линейных по управлению, с ограничениями на управление?

6. Почему в задачах для непрерывных процессов, линейных по управлению, требуется $Q(t, x) \neq 0$?

7. Может ли отсутствовать решение в задачах, линейных по управлению, с ограничениями на управление? Проанализируйте возможные случаи.

8. Как по формальному виду уравнений процесса в общей постановке задачи ТОУ определить векторы состояния и управления независимо от того, какими буквами они обозначены?

ГЛАВА 5

ОДНОПРОДУКТОВАЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ

5.1. Моделирование производства на макроуровне

При математическом моделировании взаимосвязь между факторами производства и его результатом обычно отражают с помощью производственных функций (ПФ). При построении ПФ следует иметь в виду, что затраты факторов производства на выпуск продукции всегда неотрицательны. Кроме того, нужно отметить, что при моделировании ПФ отсутствие одного из факторов приводит к нулевому выпуску продукции (именно такие факторы обычно принимаются в расчет). Полагают также, что факторы производства меняются непрерывно, а выпуск продукции изменяется достаточно гладко при изменении факторов, что естественно при рассмотрении производства на макроуровне.

Экономически целесообразно также, чтобы при увеличении количества используемого ресурса выпуск продукции рос, т.е. для дифференцируемой ПФ $F(K, L)$ можно записать следующие неравенства:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0; \qquad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \tag{5.1}$$

где K – капитал;
L – живой труд.

Данные предположения, разумеется, справедливы не всегда и не для любого фактора. Например, использование в фармацевтике и в медицине малыми дозами некоторых ядов в составе лекарств лечит человека, а большое – может привести к тяжелым заболеваниям или даже к смерти; то же можно утверждать в отношении чрезмерного количества трудовых ресурсов, когда их излишек может мешать производству, внося в него беспорядок и неорганизованность. Тем не менее будем предполагать исключительный характер таких случаев, считая условия (5.1) нормальными для практики.

Представленным формулам (5.1) условиям отвечают мультипликативные ПФ вида

$$X = aK^{\alpha}L^{\beta},\ a > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0, \tag{5.2}$$

где X – выпуск продукции;
a – выпуск продукции при единичных затратах капитала и живого труда;
α и β – эластичность выпуска продукции соответственно по капиталу и живому труду.

Мультипликативная ПФ дает возможность отразить эффект масштаба производства, который существует только при одновременном изменении факторов K и L. Пусть эти факторы изменяются в $\lambda > 0$ раз. Тогда

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta}F(K, L). \tag{5.3}$$

Различные значения $\alpha + \beta$ определяют следующие режимы развития экономики:

- если $\alpha + \beta > 1$ – интенсивный способ развития, т.е. с ростом масштаба производства в λ раз выпуск продукции возрастает более чем в λ раз;
- если $\alpha + \beta < 1$ – производство неэффективное, т. е. выпуск продукции возрастает, но менее чем в λ раз;
- если $\alpha + \beta = 1$ – нормальное развитие экономики за счет интенсивных факторов производства [9].

Наблюдения показывают, что в условиях экстенсивного производства увеличение затрат только одного из факторов производства приводит к снижению эффективности его использования, т.е.

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0; \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0. \tag{5.4}$$

Это означает, что каждая последующая единица возрастающего фактора соединяется с меньшим количеством другого фактора и его рост дает уменьшающийся прирост продукции. Такое явление называют эффектом насыщения. Например, при многостаночной организации производства значительное увеличение числа станков, приходящихся на одного рабочего в условиях неизменной технологии, квалификации работников и характеристик станков, уменьшает эффективность использования оборудования. Примерно то же происходит и в случае, когда руководитель производственного коллектива большую часть работы берет на себя, а не делегирует, хотя бы частично, другим сотрудникам. Он при этом все сам не успевает или делает плохо – его возможности по руководству достигли предела.

Для экстенсивного способа развития характерно:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{K\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\infty;\\ &\lim_{L\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\infty.\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

Это означает, что при отсутствии фактора K или L и при их последующем приросте на бесконечно малую величину ΔK или ΔL скорость возрастания выпуска продукции становится бесконечно большой.

Наоборот, в случае чрезмерно большого возрастания фактора K или L

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{K\to \infty}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=0;\\ &\lim_{L\to \infty}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.6}$$

прирост их эффективности снижается до нуля.

На рис. 5.1 приведен график подобной функции в зависимости от одного из аргументов K или L при фиксированном значении другого аргумента.

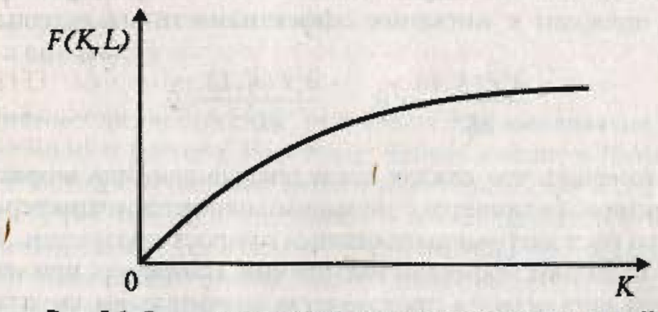

Рис. 5.1. Зависимость выпуска продукции от капитала K (при фиксированном значении живого труда L)

Если $\alpha + \beta = 1$, мультипликативная ПФ, отражающая модель экстенсивного способа развития, называется производственной функцией Кобба–Дугласа:

$$X = aK^{\alpha}L^{1-\alpha},\tag{5.7}$$

где α и $1 - \alpha$ – эластичность выпуска продукции по капиталу и живому труду соответственно.

Коэффициенты эластичности ПФ по факторам определяются как отношение предельной эффективности ПФ по данному фактору к средней эффективности:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\bigg/\frac{F(K,L)}{K};\\ &\beta=\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\bigg/\frac{F(K,L)}{L}.\end{aligned}\right\}\tag{5.8}$$

Рассмотренные ПФ имеют статический характер, в них в явном виде не учитывается фактор научно-технического прогресса (НТП): зависимость от времени, производственные навыки, образованность работников, общий уровень научно-технического развития общества и т.д. Формально получается так, что если затраченные труд и капитал в разное время одинаковые, то таким же одинаковым будет и выпуск продукции. В действительности, конечно, это не так, поскольку необходимо учитывать количественную и качественную зависимость выпуска продукции от времени и многих других факторов развития общества.

Простейший способ такого учета – автономный НТП, когда статическая ПФ умножается на эмпирически определяемый возрастающий в зависимости от времени множитель, например, $e^{\rho t}$, где ρ, в большинстве случаев положительная величина, означает темп роста НТП. *Преимущество* такого способа отражения в экономико-математических моделях факторов динамики НТП – в его технической простоте (практически не влияет на усложнение техники моделирования). *Недостаток* же – в сокрытии причин и качественных разновидностей НТП. Получается, что он возникает как бы из ничего, общество не затрачивает дополнительных ресурсов, что, очевидно, нереально.

Полноценная серьезная теория этой проблемы далеко выходит за рамки сложившегося курса ТОУ, поэтому, понимая ограниченность подхода, мы в дальнейшем (уже в следующем разделе) будем рассматривать ПФ с учетом автономного НТП, другими словами, в виде

$$X(t) = F(K, L)\, e^{\rho t}. \qquad (5.9)$$

На ограниченных отрезках времени при реальных значениях ρ получаемые результаты, как показывает сопоставление со статистическими данными [9], оказываются удовлетворительными.

5.2. Модель развития экономики: магистральная теория

В качестве практического примера применения достаточных условий оптимальности (*см.* разд. 3.1) рассмотрим однопродуктовую экономическую систему, характеризующуюся в каждый момент времени t (время непрерывное) набором переменных

$$X, Y, C, K, L, I,$$

где X – интенсивность выпуска валового продукта в рассматриваемый период;

Y – интенсивность конечного продукта, идущего на непроизводственное потребление;

C – величина непроизводственного потребления;

K – капитал (объем основных производственных фондов – ОПФ);

L – трудовые ресурсы (живая сила);

I – инвестиции.

Эти переменные взаимосвязаны. Прежде всего имеет место условие баланса в каждый момент времени:

$$X = aX + Y, \; 0 < a < 1.$$

В свою очередь, конечный продукт распределяется на валовые инвестиции и непроизводственное потребление:

$$Y = I + C.$$

Валовые инвестиции расходуются на прирост капитала и восстановление ОПФ за счет амортизационных отчислений:

$$I = \frac{dK}{dt} + \mu K,$$

где μ – коэффициент амортизации.

Тогда

$$\frac{dK}{dt} = I - \mu K,$$

или

$$\frac{dK}{dt} = (1-a)(1-u)X - \mu K. \qquad (5.8)$$

где $u = \frac{C}{Y}$ – доля непроизводственного потребления:

$$0 \le u \le 1. \qquad (5.9)$$

Будем считать, что размеры валового продукта определяются заданной ПФ, характеризующей возможности производства в зависимости от величины капитала K, трудовых ресурсов L и времени t:

$$0 \le X \le F(K, L, t). \qquad (5.10)$$

Предполагается, что ПФ $F(K, L, t)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем выполняются все условия (5.1) – (5.9).

Решение будем искать при условии

$$K \ge K_3, \qquad (5.11)$$

где K_3 – заданный уровень ОПФ.

Пусть заданы ОПФ в начальный и в конечный моменты времени:

$$K(0) = K_0; \; K(T) = K_1. \qquad (5.12)$$

Допустимое множество M в рассматриваемой задаче описывается условиями (5.8) – (5.12). Допустимый процесс представлен совокупностью функций

$$v = (K(t), X(t), u(t)),$$

удовлетворяющей этим условиям. Здесь X – состояние экономической системы, u – управление. Очевидно, что такой процесс не единственный.

Задача управления данной системой состоит в том, чтобы найти такой процесс $v = (K(t), X(t), u(t))$, который обеспечивал бы наибольшее среднедушевое потребление на исследуемом интервале времени [0; T] с учетом дисконтированного (приведенного к начальному моменту) потребления:

$$J = \int_0^T \frac{C}{L} e^{-\delta t} dt \to \max, \qquad (5.13)$$

где $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования.

Сделаем замену переменных, приведя их к удельным показателям на душу населения. Это позволяет сопоставлять однородные показатели больших и малых экономических систем. Введем в дифференциальное уравнение (5.8) относительные переменные:

- $k = K/L$ – капиталовооруженность;
- $c = C/L$ – среднедушевое потребление;
- $x = X/L$ – производительность труда.

Так как $K = kL$, $X = xL$, то уравнение (5.8) примет вид

$$\frac{dk}{dt}L + k\frac{dL}{dt} = (1-a)(1-u)xL - \mu kL.$$

Согласно правилу дифференцирования произведения получим

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dk}{dt}L + k\frac{dL}{dt}.$$

Будем считать, что прирост трудовых ресурсов осуществляется с постоянным темпом (на не слишком продолжительном отрезке времени это реально):

$$\frac{dL}{dt} = nL.$$

Тогда

$$\frac{dK}{dt} = (\frac{dk}{dt} + kn)L.$$

Окончательно дифференциальное уравнение связи в относительных переменных с учетом формулы (5.8) примет вид

$$\frac{dk}{dt} = (1-a)(1-u)x - (\mu + n)k. \qquad (5.14)$$

Ограничение на управление u остается тем же (5.9):

$$0 \le u \le 1,$$

а ограничение на производительность труда x примет вид

$$0 \le x = f(k, t); \qquad (5.15)$$

$$f(k,t) = \frac{1}{L} F(K, L, t).$$

Ограничения на капитал (ОПФ) заменим ограничениями на капиталовооруженность:

$$k(t) \ge k_3(t). \qquad (5.16)$$

Вытекающие из краевых условий (5.12) начальное и конечное значения капиталовооруженности имеют вид:

$$k(0) = k_0, \quad k(T) = k_1. \qquad (5.17)$$

Преобразование функционала (5.13) к относительным переменным дает

$$J = -\int_0^T (1-a)ux e^{-\delta t} dt \to \min. \qquad (5.18)$$

В задаче (5.9), (5.14) – (5.18) требуется определить процесс $v=(k(t), x(t), u(t))$, обращающий в минимум функционал (5.18) на множестве (5.9), (5.14) – (5.17).

Таким образом, в редуцированной задаче состоянием системы является капиталовооруженность k (в уравнение процесса (5.14) входит под знаком производной и сама по себе), а управлением – доля потребления u (в уравнение процесса (5.14) входит только сама по себе). Производительность труда x определяется по формуле (5.15).

Уравнение процесса (5.14) – дифференциальное уравнение роста капиталовооруженности.

Построенная задача – линейная по управлению u с ограничением на управление (5.9). Действуя согласно описанию этого типа задач в разд. 4.5.2, получаем функцию $R(t, k)$, не зависящую от x:

$$R(t, k) = e^{-\delta t}[(1-a) f(k, t) - (\mu + n + \delta) k].$$

Введем обозначение $r(t, k) = (1-a) f(k, t) - (\mu + n + \delta) k$. Тогда, учитывая, что $e^{-\delta t} > 0$, можно записать

$$k^*(t) = \arg\max_k r(t,k), \qquad \forall t \in [0;T].$$

Проанализируем поведение функции $r(t, k)$ по k. Эта функция является суммой двух слагаемых: производственной функции с точностью до постоянного положительного множителя $(1-a)$ и линейного выражения. График $r(t, k)$ и его составляющие при фиксированном значении t показаны на рис. 5.2.

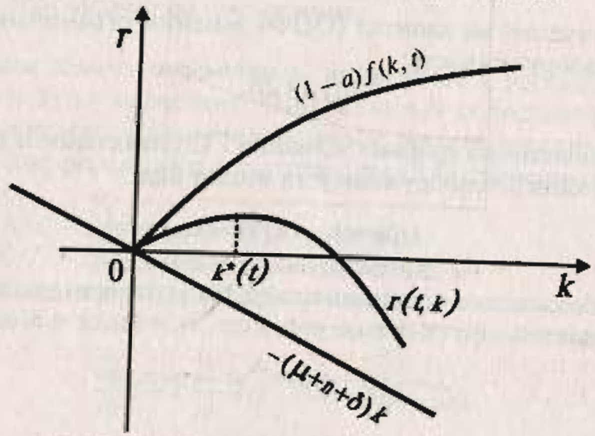

Рис. 5.2. Функция $r(t, k)$ и ее составляющие

Функция $r(t, k)$ строго вогнута по k: $\frac{\partial^2 r}{\partial k^2} < 0$ при $\forall t, k(t) > 0$. График $r(t, k)$ в окрестности нуля близок к $(1-a)\, r(t, k)$, так как при $k \to 0$ $\frac{\partial r}{\partial k} \to \infty$, а на бесконечности близок к $-(\mu + n + \delta)\, k$, так как при $k \to \infty$ $\frac{\partial r}{\partial k} \to -(\mu + n + \delta)k < 0$. Поэтому функция $r(t, k)$ имеет единственный максимум по k, который достигается в точке $k^*(t) > 0$.

Необходимым условием максимума $r(t, k)$ по k является $\frac{\partial r}{\partial k} = 0$. Учитывая, что $f(k, t) = b\, k^{\alpha} e^{\rho t}$, имеем

$$(1 - a)\, b\alpha e^{\rho t} k^{\alpha-1} - (\mu + n + \delta) = 0.$$

Так как $0 < \alpha < 1$ и $1 - \alpha = \beta$, то

$$k^*(t) = [\frac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}]^{1/\beta} e^{\rho t/\beta}. \qquad (5.19)$$

График функции $k^1(t)$ представлен на рис. 5.3. Назовем эту функцию магистралью данной динамической модели экономики. Ниже будет предложено образное пояснение этого названия.

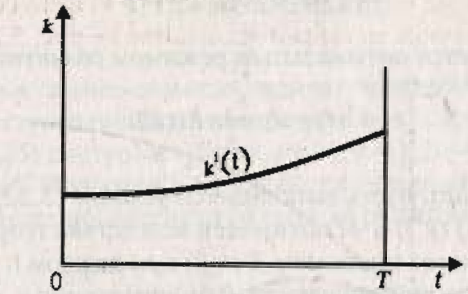

Рис. 5.3. Функция магистрали $k^1(t)$

Управление, отвечающее магистрали, определяется подстановкой функции $k^1(t)$ в дифференциальное уравнение развития системы (5.14):

$$u^1(t) = 1 - \frac{\frac{dk^1}{dt} - (\mu + n)k^1(t)}{(1-a)be^{\rho t}(k^1)^{\alpha}}. \qquad (5.20)$$

Из формулы (5.19) найдем

$$\frac{dk^1}{dt} = k^1(t)\frac{\rho}{\beta}.$$

Тогда

$$u^1(t) = 1 - \frac{\mu + n + \frac{\rho}{\beta}}{(1-a)be^{\rho t}(k^1)^{\alpha-1}}.$$

Так как

$$(k^1)^{\alpha-1} = (k^1)^{-\beta} = [\frac{\mu+n+\delta}{(1-a)b\alpha}e^{-\rho t}]^{-1}e^{-\rho t},$$

то получим оптимальное управление

$$u^1(t) = 1 - \alpha\frac{\mu+n+\frac{\rho}{\beta}}{\mu+n+\delta}$$

в предположении, что $0 \le u^1 \le 1$.

Нетрудно показать, что для специально подобранных краевых условий, когда они лежат на магистрали

$$k_0 = k_1(0) \text{ и } k_1 = k^1(T), \tag{5.21}$$

последняя является оптимальным режимом развития экономики

$$k^1(t) = \arg\max_k R(t,k). \tag{5.22}$$

Действительно, пусть выполняется условие (5.22), тогда процесс $v^1 = (k^1, u^1, f(k^1)) \in M$ оптимален вследствие теоремы 4.2, так как он обеспечивает максимум $R(t, k)$ при каждом t:

- по u – в силу независимости R от управления u, что достигается выбором функции $\varphi(k, t)$;
- условие 2 теоремы 4.2 по k и x выполняется по построению.

С другой стороны, процесс v^1 является допустимым, поскольку выполняются следующие условия:

- u найдено подстановкой k^1 в уравнение процесса;
- $0 \le u \le 1$;
- граничные условия подобраны специальным образом.

Отметим, что условие реализуемости $0 \le u \le 1$ в данной задаче выполняется. Это можно проверить. Для функции Кобба–Дугласа экономической магистралью является кривая постоянного роста капиталовооруженности, пропорционального темпу роста НТП ρ, а оптимальное управление, реализующее эту магистраль, – постоянная величина. Итак, для специально подобранных краевых условий (5.21) магистраль представляет оптимальный режим развития экономики

$$k^1(t) = \arg\max_{-\infty<k<\infty} R(t,k). \tag{5.23}$$

В других же случаях магистрали в структуре решения отводится более существенная роль.

В действительности очень редко краевые условия принадлежат магистрали. Рассмотрим *общий случай*.

Пусть вместо выражения (5.21) имеем

$$k_0 \ne k^1(0) \text{ и } k_1 \ne k^1(T). \tag{5.24}$$

Для решения этой задачи применим прием, отвечающий оптимизации процессов, линейных относительно управления, с ограничениями на управление (*см.* разд. 4.5.2). В результате найдем

$$k^*(t) = \arg\max_{k \in \hat{V}_k^t} R(t,k). \tag{5.25}$$

В реальных экономических задачах минимальный уровень потребления строго положителен: $0 < u_1 \le u_2 \le 1$. В соответствии с формулой (5.25) построим границы $\gamma_{ij}(t)$, $i = 1,2$, $j = 0,1$, допустимой области $\hat{V}_k^t$. Функции $\gamma_{ij}(t)$ являются решениями дифференциального уравнения процесса (о технике решения *см.* в разд. 1.5)

$$\frac{dk}{dt} = (1-a)(1-u)f(t,k) - (\mu + n)k \tag{5.26}$$

при соответствующих краевых условиях (если $j = 0$, то берется $k(0) = k_0$; если $j = 1$, то используется $k(T) = k_1$) и ограничениях на управление (если $i = 1$, то берется нижний предел $u = u_1$; если $i = 2$, то $u = 1$).

Рассмотрим пример, когда $k_0 < k^1(0)$, $k_1 > k^1(T)$, т.е. магистраль $k_1(t)$ проходит так, как показано на рис. 5.4. Тогда оптимальная траектория будет состоять из трех участков с моментами переключения τ_1 и τ_2, где τ_1 является точкой пересечения границы γ_{10} с магистралью $k^1(t)$, а τ_2 – точкой пересечения магистрали $k^1(t)$ с границей γ_{11}.

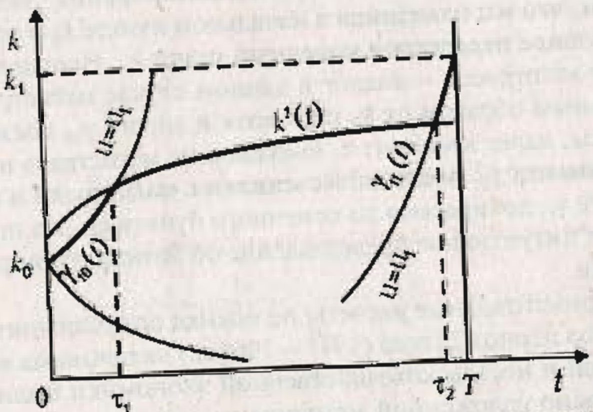

Рис. 5.4. Графическая интерпретация решения задачи магистрального типа

7-2597

Как видим, вначале на временном интервале $(0, \tau_1)$ почти все вкладывается в накопление (потребление в этот период на минимальном уровне u_1). Начиная с τ_1 развитие идет по магистрали $k^1(t)$ вплоть до момента τ_2, с которого опять почти все вкладывается в экономику (потребление вновь находится на нижнем уровне u_1).

При решении дифференциального уравнения (5.26) следует учитывать наличие в его правой части нелинейности $f(t, k) = b\,e^{\rho t}k^{\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$, поэтому уравнение (5.26) оказывается нелинейным. Линеаризация проводится путем замены переменных $z = k^{\beta}$, где $\beta = 1 - \alpha$. В результате указанной замены приходим к линейному относительно z неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого осуществляется в полном соответствии с изложенным в разд. 1.5. Проводим необходимые вычисления и определяем произвольные постоянные интегрирования, отвечающие краевым условиям (5.24). В результате получаются аналитические выражения для магистрали, ограничивающих функций $\gamma_{ij}(t)$, $i = 1,2, j = 0,1$, точек переключения τ_1 и τ_2, т.е. все необходимое для построения графика (*см.* рис. 5.4). В настоящем тексте указанные аналитические выражения опущены по причине их технической громоздкости и одновременно принципиальной ясности действий. Подробно данная техника вычислений изложена в [9, разд. 6.2, с. 150, 151].

Глядя на рис. 5.4, можно представить такую картину сути магистрали и магистрального функционирования экономики. Допустим, что мы находимся в начальном пункте k_0 и нам нужно на автомобиле переехать в конечный пункт k_1. Неподалеку от k_0 проходит автотрасса – аналог в данном случае магистрали. Мы оптимальным образом от k_0 по местной дороге γ_{10} доезжаем до автотрассы, далее в момент τ_1 въезжаем на магистраль и едем по ней до момента τ_2, после чего съезжаем с магистрали и по местной дороге γ_{11} добираемся до конечного пункта k_1. Эта интерпретация дает интуитивное представление об оптимальном развитии экономики.

Экспериментальные расчеты по оценке оптимального развития США за период 22 года (1947 – 1968 гг.) на примерах внутренней частной и несельскохозяйственной экономики были проведены согласно изложенной методике и отражены в [9, разд. 6.3, с. 151 – 159].

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется производственная функция (ПФ)?
2. Какие свойства имеет ПФ? Объясните их экономический смысл.
3. Что такое автономный научно-технический прогресс (НТП) и как он отражается в ПФ?
4. Каковы достоинства и недостатки автономного НТП?
5. В чем проявляется нелинейность рассмотренной в настоящем разделе задачи? Как она преодолевается?
6. Как определяется магистраль? Почему она так называется?
7. Каковы свойства развития экономики на магистрали?
8. Как представляется качественное развитие экономики при переключении режимов с ограничения на магистраль и обратно?
9. В чем, по Вашему мнению, заключаются трудности использования на практике моделей магистрального типа?
10. По каким исходным данным строятся ПФ?

ГЛАВА 6. МЕТОД ЛАГРАНЖА–ПОНТРЯГИНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Уравнения метода

Как отмечалось в предисловии, теоретической основой всех рассматриваемых в настоящем учебном пособии вычислительных методов ТОУ являются достаточные условия оптимальности В. Ф. Кротова. Эти условия проявляются как признак оптимальности применительно к непрерывным и дискретным управляемым процессам (x^*, u^*) в общем виде. Ставя при формулировке задач ТОУ ряд дополнительных ограничений на постановку задачи, получаем соотношения в форме Лагранжа–Понтрягина как необходимые условия оптимальности. Последние вытекают из теорем о достаточных условиях оптимальности, отвечая необходимым условиям выполнения этих достаточных условий*. Применительно к непрерывным управляемым процессам (двухточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений) они известны в виде принципа максимума Понтрягина. Говорят и о дискретном принципе максимума [1], однако со школой Л. С. Понтрягина он не связан, и мы в главах 7 и 8 будем называть его методом Лагранжа.

Рассмотрим следующую задачу ТОУ для непрерывной системы: пусть заданы дифференциальные уравнения процесса

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x,u), \quad i = 1,2,\dots,n; \qquad (6.1)$$

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n);$$

$$u = (u^1, u^2, \dots, u^r),$$

где x – n-мерный вектор ее состояния;

u – r-мерный вектор управления.

* Напомним, что условие A необходимо для выполнения условия B, если из ложности A (обозначается $\bar{A}$ – не A) следует $\bar{B}$. Из истинности A может следовать $A \vee \bar{A}$.

На управление может быть наложено ограничение

$$u \in U^t, \qquad (6.2)$$

где $U^t \in R^r$ – некоторая область возможных значений управления (R – множество действительных чисел, векторов), которая может изменяться во времени.

Для дифференциальных уравнений (6.1) будем считать заданным начальное состояние системы в виде совокупности условий:

$$x^i(0) = x_{i0}, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (6.3)$$

Кроме того, может быть задано состояние системы в конечный момент времени $t = T$:

$$x^i(T) = x_{i1}, \ i = 1,2,\dots,m, \ m \le n, \qquad (6.4)$$

представляющее дополнительное ограничение на протекающий в ней процесс ($x(t)$, $u(t)$). Ограничения (6.4) могут быть заданы не по всем переменным, а лишь по некоторой их части, в данном случае – по первым m.

Будем считать, что качество процесса оценивается функционалом

$$J = \int_0^T f^0(t,x,u)dt + F(x(T))dt \to \min. \qquad (6.5)$$

Если правый конец траектории процесса зафиксирован с помощью соотношений (6.4), то второе слагаемое в (6.5) является постоянной величиной и не влияет на нахождение оптимального решения.

Требуется определить процесс ($x^*(t)$, $u^*(t)$), удовлетворяющий ограничениям (6.1) – (6.4) и минимизирующий функционал (6.5). Такой процесс, как уже известно, называют оптимальным.

Рассматриваемая задача – частный случай общей задачи ТОУ, поставленной в разд. 4.2; в ней по сравнению с общим случаем отсутствуют ограничения на состояние системы, множество допустимых управлений U^t не зависит от состояния x. Все это будет использоваться в дальнейшем.

Пусть ($x^*(t)$, $u^*(t)$) – допустимый процесс, удовлетворяющий теореме 4.2 о достаточных условиях оптимальности (*см.* разд. 4.2). Это означает, что существует функция $\varphi(t, x)$, обладающая тем свойством, что выражение

$$R(t,x,u)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}f^i(t,x,u)-f^0(t,x,u) \qquad (6.6)$$

достигает при $\forall t\in[0;T]$ максимума по переменным x, u в точке $(x^*(t), u^*(t))$, а функция

$$\Phi(x)=\varphi(T,x)+F(x) \qquad (6.7)$$

принимает минимальное значение при $x = x^*(T)$. Если условия (6.4) на правом конце траектории заданы для всех $m = n$, то требование минимума выражения (6.7) превращается в тривиальное, так как множество, на котором определена функция $\Phi(x)$, вырождается в единственную точку.

Рассматриваемый процесс $(x^*(t), u^*(t))$, удовлетворяя достаточным условиям оптимальности (*см.* теорему 4.2), является оптимальным. С учетом отмеченных выше частных особенностей системы (6.1) – (6.5) выведем из нее некоторые следствия.

Принимая во внимание свойства функции $\varphi(t,x)$ (*см.* разд. 4.2), введем в рассмотрение переменные

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\Big|_{x^*(t)}=\psi_i(t), \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (6.8)$$

Вектор-функция $x^*(t)$ справа от вертикальной черты в соотношении (6.8) означает, что после вычисления градиента по x $\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}$ вектор x должен принять значение $x^*(t)$. Аналогичные обозначения будут использоваться и в последующем. Вектор-функция $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\ldots,\psi_n(t))$ при каждом фиксированном значении t – градиент функции $\varphi(t,x)$ в точках оптимальной траектории $x=x^*(t)$.

Введем в рассмотрение так называемую функцию Гамильтона (другое название – гамильтониан):

$$H(t,x,\psi,u)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t,x,u)-f^0(t,x,u). \qquad (6.9)$$

С ее помощью функция $R(t,x,u)$ может быть записана в виде

$$R(t,x,u)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u\right). \qquad (6.10)$$

Так как процесс $(x^*(t), u^*(T))$ удовлетворяет достаточным условиям оптимальности, то согласно условию 1 теоремы 4.2 при $\forall t\in[0;T]$

$$R(t,x^*(t),u^*(t))\ge R(t,x,u) \qquad (6.11)$$

для всех $(x,u)\in V^t$. Отсюда, в частности, вытекает, что неравенство

$$R(t,x^*(t),u^*(t))\ge R(t,x(t),u)$$

выполняется для всех допустимых значений управления $u\in V^t$.

Сравнивая последнее неравенство с (6.10), получаем в качестве следствия (так как слагаемое $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ не зависит от u), что

$$H(t,x^*(t),\psi(t),u^*(t))\ge H(t,x^*(t),\psi(t),u).$$

Это неравенство говорит о том, что выражение $H(t,x^*(t),\psi(t),u)$, рассматриваемое при каждом фиксированном значении $t\in[0;T]$ как функция от u, достигает максимального значения при $u=u^*(t)$. Это обстоятельство может быть выражено в следующей форме:

$$H(t,x^*(t),\psi(t),u^*(t))=\max_{u\in U^t}H(t,x^*(t),\psi(t),u(t)) \qquad (6.12)$$

или, что то же самое,

$$u^*(t,x^*(t),\psi(t))=\arg\max_{u\in U^t}H(t,x^*(t),\psi(t),u).$$

Таким образом, в качестве следствия из существования функции $\varphi(t,x)$ установлено, что существуют такие функции $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\ldots,\psi_n(t))$, при которых выражение $H(t,x(t),\psi(t),u(t))$ при $x=x^*(t)$ и $\psi=\psi(t)$ удовлетворяет условию максимума (6.12).

Из неравенства (6.11) при произвольных значениях t, x и $u=u^*(t)$ следует, что функция $R(t,x,u^*(t))$ при $x=x^*(t)$ достигает максимального значения. Так как в рассматриваемой задаче ТОУ ограничений на вектор состояния системы не накладывается, то в точке максимума $x=x^*(t)$ частные производные функции $R(t,x,u)|_{x^*(t),\,u^*(t)}$:

$$\frac{\partial R(t,x,u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)}=0, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Преобразуем полученное соотношение. Подставляя в него (6.6), получаем, что при $x = x^*(t)$ должно выполняться равенство

$$\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t\partial x^i}\Big|_{x^*(t)} + \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x^*(t)} f^j(t,x,u^*(t))\big|_{x^*(t)} + \right.$$

$$\left.+\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x^j}\Big|_{x^*(t)} \frac{\partial f^j(t,x,u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)}\right\} - \frac{\partial f^0(t,x,u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)} = 0,$$

$$i = 1,2,\dots,n. \tag{6.13}$$

Левую часть выражения (6.13) представим в виде двух слагаемых:

$$S_i^1 = \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t\partial x^i}\Big|_{x^*(t)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x^*(t)} f^j(t,x,u^*(t))\big|_{x^*(t)},$$

$$i = 1,2,\dots,n; \tag{6.14}$$

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x^j}\Big|_{x^*(t)} \frac{\partial f^j(t,x,u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)} - \frac{\partial f^0(t,x,u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)},$$

$$i=1,2,\dots,n. \tag{6.15}$$

Для преобразования выражения (6.14) вычислим производную $d\Psi_i(t)/dt$.

Согласно формуле (6.8) будем иметь

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x^i}\right)\Big|_{x^*(t)}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Используя правило вычисления производной сложной функции, получим

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t\partial x^i})\Big|_{x^*(t)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{x^*(t)}\frac{dx^j(t)}{dt}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Так как $x^*(t)$ удовлетворяет вместе с $u^*(t)$ уравнениям процесса (6.1), то

$$\frac{dx^j(t)}{dt} = f^j(t,x(t),u(t))\big|_{x^*(t),u^*(t)}, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Сопоставляя теперь последние два равенства с условием (6.14), получим

$$S_i^1 = \frac{d\psi_i(t)}{dt}, \qquad i=1,2,\dots,n.$$

Заменив теперь в выражении (6.15) $\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x^j}\Big|_{x^*(t)}$ на $\psi_j(t)$, с учетом формулы (6.9) можем получить, что

$$S_i^2 = \frac{\partial H(t,x,\psi(t),u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)}, \qquad i=1,2,\dots,n.$$

Теперь соотношение (6.13) можно с учетом условий (6.14) и (6.15) и полученных выражений для S_i^1 и S_i^2 записать в виде

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t,x,\psi(t),u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)}, \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{6.16}$$

Следовательно, из существования $\varphi(t, x)$ вытекает, что задаваемая равенством (6.8) функция $\psi(t)$ удовлетворяет вместе с $x^*(t)$ и $u^*(t)$ системе уравнений (6.16).

Как следует из условия 2 теоремы 4.2 и соотношения (4.11), в конечный момент времени $t = T$ для состояния $x^*(t)$ справедливо неравенство

$$\varphi(T, x^*(T)) + F(x^*(T)) \le \psi(T, x) + F(x) \tag{6.17}$$

для $\forall x \in V_x^t$ возможных состояний системы при $t = T$. В рассматриваемой задаче множество V_x^t задается условием (6.4), согласно которому первые m координат $x_{11}, x_{21},\dots, x_{m1}$ вектора $x(T)$ заданы, остальные же могут принимать произвольные значения. Тогда функция $\Phi(T, x) = \varphi(T, x) + F(x)$ будет зависеть от $n - m$ переменных $x_{m+1}, x_{m+2},\dots, x_n$. Так как на эти переменные никаких ограничений не накладывается вследствие необходимого условия оптимальности

$$\frac{\partial\Phi(T,x)}{\partial x^i} = 0, \qquad i=m+1,\ m+2,\dots,n,$$

получаем с учетом равенства (6.7)

$$\frac{\partial\varphi(T,x)}{\partial x^i}\Big|_{x^*(T)} = -\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}\Big|_{x^*(T)}, \qquad i=m+1,\ m+2,\dots,n.$$

Но левая часть последнего соотношения есть согласно определению (6.8) $\psi_i(T)$.

Следовательно, это соотношение принимает вид

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}\Big|_{x^*(T)}, \quad i = m+1,\ m+2,\dots,n. \tag{6.18}$$

Соотношения (6.18) называются условиями трансверсальности.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом. Пусть функция $\varphi(t, x)$ и процесс $(x^*(t), u^*(t))$ удовлетворяют теореме 4.2. Тогда существуют такие значения вектор-функции $\psi = \psi(t)$, которые вместе с $(x^*(t), u^*(t))$ удовлетворяют условию (6.12) максимума функции $H(t, x, \psi, u)$ и системе дифференциальных уравнений (6.1) и (6.16). Кроме того, в начальный момент времени $t = 0$ для состояния $x(t)$ выполнены начальные условия (6.3), а в конечный момент $t = T$ переменные $x(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям (6.4) и (6.18). Перечисленные условия (6.1), (6.3), (6.4) (6.12), (6.16) и (6.18) представляют собой соотношения метода Лагранжа–Понтрягина, позволяющего получить решения задач ТОУ.

6.2. Принцип максимума Понтрягина

Соотношения (*см.* разд. 6.1), выполняющиеся на оптимальном процессе, с учетом ограничений в постановке задачи (нет ограничений на состояние, независимость множества допустимых управлений от состояния) позволили определить необходимые условия оптимальности процесса $(x^*(t), u^*(t))$. Полученные соотношения могут быть использованы для «сужения» исходного множества M допустимых процессов путем выделения из него только тех процессов, которые удовлетворяют необходимым условиям. Совокупность приведенных условий, как правило, дает возможность выделить единственную траекторию $x^*(t)$ из множества допустимых. Если при этом еще известно (например, из содержательной постановки задачи) о существовании оптимальной траектории, то тем самым $x^*(t)$ и отвечающее ему управление $u^*(t)$ и есть решение задачи оптимального управления.

Комплекс условий, которому должен удовлетворять оптимальный процесс, называется принципом максимума Понтрягина (ниже поясним суть названия). Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 6.1 (принцип максимума Понтрягина). Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ – оптимальный процесс в задаче оптимального управления (6.1) – (6.5). Тогда существует вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t),\dots, \psi_n(t))$, удовлетворяющая вместе с данным процессом следующим условиям:

1. Функция $H(t, x, \psi, u)$ (*см.* определение 6.9) достигает максимального значения по u при $x = x^*(t)$, $\psi = \psi(t)$ на значении $u = u^*(t)$ при всех $t \in [0; T]$ (*см.* соотношение (6.12)).
2. Переменные $\psi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (6.16).
3. В конечный момент времени $t = T$ оптимальная траектория удовлетворяет условиям трансверсальности (6.18).

Таким образом, система уравнений (6.1) и (6.17) может быть записана в следующей форме:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x,u);$$
$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(t,x,\psi(t),u^*(t))}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)}, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{6.19}$$

Пример 6.1. Проиллюстрируем применение алгоритма принципа максимума на простейшей задаче оптимального управления – линейной со свободным правым концом, когда при $t = T$ конечные условия не заданы. Рассмотрим функционал

$$J = \int_0^3 (x_1 + 2x_2 - 3u)dt + x_1(3) \to \min \tag{6.20}$$

при условиях:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2;$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u;$$
$$0 \le u \le 1;$$
$$x_1(0) = 1;\ x_2(0) = 0. \tag{6.21}$$

Решение. По формуле (6.9) строим функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi_1(x_1 + x_2) + \psi_2 u - x_1 - 2x_2 + 3u = \tag{6.22}$$
$$= u(\psi_2 + 3) + \psi_1(x_1 + x_2) - x_1 - 2x_2.$$

При фиксированных значениях ψ_1, ψ_2, x_1, x_2 в силу линейности по управлению u (*см.* разд. 1.2) функция Гамильтона примет максимальное значение в случаях:

$$u^*(t,x,\psi)=\begin{cases}1, & \psi_2+3>0;\\ 0, & \psi_2+3<0;\\ \forall u\in[0;1], & \psi_2+3=0.\end{cases} \qquad (6.23)$$

Полученным по формуле (6.23) значением $u^*(t, x, \psi)$ замыкается система дифференциальных уравнений (6.21). Сопряженная система в соответствии с формулой (6.16) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dt}&=-\psi_1+1;\\ \frac{d\psi_2}{dt}&=-\psi_1+2.\end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

В общем случае для системы уравнений (6.21) и (6.24) с подстановкой в нее выражения (6.23) краевая задача должна решаться совместно. В данном случае, в частности вследствие линейности процесса, сопряженная система (6.24) интегрируется независимо от исходной (6.21). Это облегчает процесс решения краевой задачи.

Первая формула (6.24) – это уравнение с разделяющимися переменными. Читателю предлагается, опираясь на разд. 1.4, самостоятельно найти его общее решение. В силу отсутствия ограничений при $t = 3$ сопутствующая общему решению произвольная постоянная C_1 легко определяется из условия трансверсальности (6.18). Последнее в данном случае имеет вид $\psi_1(3) = -1$. Из него определяется произвольная постоянная интегрирования $C_1 = -2e^3$, в результате чего получаем частное решение первого уравнения (6.24):

$$\psi_1(t) = 1 - 2\,e^{3-t}. \qquad (6.25)$$

Подставляем решение (6.25) в правую часть второго уравнения (6.24) и интегрируем его, определяя произвольную постоянную C_2 из условия трансверсальности $\psi_2(3) = 0$. В результате получаем

$$\psi_2(3) = t - 2e^{3-t} - 1.$$

Согласно формуле (6.23) знак выражения $\psi_2(t) + 3$, равного $t - 2\,e^{3-t} + 2$, определяет в каждый момент t значение оптимального управления $u^*(t)$. Нетрудно убедиться, что эта функция монотонно возрастающая, так как $\dfrac{d(\psi_2+3)}{dt}=1+2e^{3-t}>0.$

С учетом всех этих обстоятельств строим график (рис. 6.1).

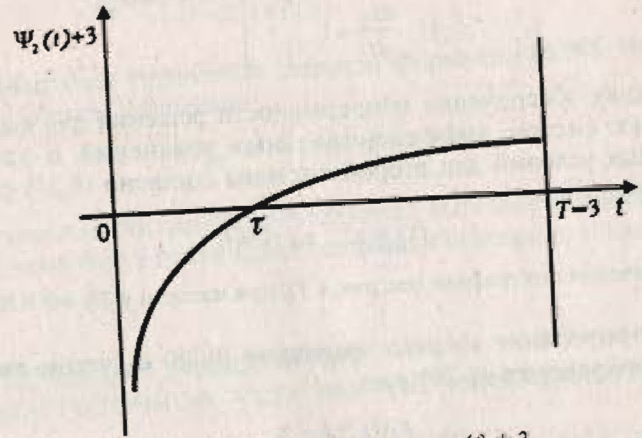

Рис. 6.1. График функции $\psi_2(t) + 3$

В соответствии с графиком (*см.* рис. 6.1) и с учетом формулы (6.23) получаем аналитическую зависимость

$$u^*(t)=\begin{cases}0, & t\in[0;\tau),\\ 1, & t\in(\tau;3],\\ \forall u\in[0;1], & t=\tau.\end{cases} \qquad (6.26)$$

Подставив значение $u^*(t)$ из формулы (6.26) в систему дифференциальных уравнений (6.21), получим две системы:

1) при $t \in [0; \tau)$

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1+x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt}=0;$$

$$x_1(0) = 1;\quad x_2(0) = 0.$$

Интегрирование этой системы с учетом начальных условий дает

$$x_1(t) = e^t; \quad x_2(t) = 0; \tag{6.27}$$

2) при $t \in (\tau; 3]$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

В целях обеспечения непрерывности решения для выделенных двух систем дифференциальных уравнений в качестве начальных условий для второй системы согласно (6.27) следует принять

$$x_1(\tau) = e^\tau; \quad x_2(\tau) = 0, \tag{6.29}$$

где τ – значение t на графике (*см.* рис. 6.1), при котором $\psi_2(t) + 3 = 0$.

Интегрирование второго уравнения (6.28) с учетом второго начального условия (6.29) дает

$$x_2(t) = t - \tau. \tag{6.30}$$

Подставив значение функций (6.30) в первое уравнение (6.28), получаем

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + t - \tau. \tag{6.31}$$

Проинтегрируем уравнение (6.31) как линейное неоднородное, только вместо квадратного характеристического уравнения типа (1.7) будет линейное с одним корнем (*см.* разд. 1.5, формулу (1.11)). В итоге имеем общее решение неоднородного уравнения:

$$x_1(t) = C_3 e^t + \tau - t - 1,$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Определим C_3 из первого начального условия (6.29): $e^\tau = C_3 e^\tau - 1$, откуда $C_3 = 1 + e^{-\tau}$.

Окончательно с учетом первого начального условия (6.29) находим

$$x_1(t) = e^t + e^{t-\tau} + \tau - t - 1. \tag{6.32}$$

Объединяя результаты (6.27), (6.30) и (6.32) в одну формулу, получаем выражения оптимального состояния системы:

$$x_1^*(t) = \begin{cases} e^t, & t \in [0;\tau]; \\ e^t + e^{t-\tau} + \tau - t - 1, & t \in [\tau;3], \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;\tau]; \\ t - \tau, & t \in [\tau;3]. \end{cases}$$

Оптимальное управление задается формулой (6.26). Число τ является корнем уравнения

$$\tau - 2e^{3-\tau} + 2 = 0; \quad 0 < \tau < 3.$$

Оптимальность найденного процесса вытекает из линейности задачи, чему будут посвящены специальная теорема и следствие из нее в разд. 6.3.

6.3. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности

Рассмотрим, чем обусловлено название «принцип максимума» и к чему оно относится, если функционал в форме интеграла, оценивающий качество управляемого процесса ($x^*(t)$, $u^*(t)$) (*см.* разд. 6.1, формулу (6.5)), устремляется к минимуму. Можно, конечно, подынтегральную функцию брать со знаком минус, и тогда на том же оптимальном процессе ($x^*(t)$, $u^*(t)$) интеграл (6.5) будет достигать максимума. Однако этот искусственный прием вряд ли служит основанием для названия метода.

Суть дела в том, что из всех операций метода, изложенных в разд. 6.2, максимизация функции Гамильтона (*см.* условие 1 теоремы 6.1) при большой размерности векторов состояния x и управления u – наиболее трудоемкий процесс. Эта самая сложная операция и дала название методу.

Принцип максимума как необходимое условие оптимизации управляемых процессов не гарантирует оптимальности. Он только позволяет отсекать из множества допустимых заведомо неоптимальные процессы, когда его условия не выполняются, а остальные процессы, удовлетворяющие принципу максимума, следует воспринимать лишь как кандидаты в оптимальные. Даже если такой кандидат один, из содержательных условий задачи должно вытекать знание о наличии оптимального процесса. Тогда этот процесс и будет оптимальным. Однако при строгих рассуждениях это неубедительно, нужны более точные аналитические оценки. Они существуют и формулируются в виде следующей теоремы.

Теорема 6.2. Для задачи

$$J = \int_0^T f^0(t,x,u)dt + F(x(T))dt \to \min;$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u);$$

$$u(t) \in U^t;$$

$$x(0) = x_0, x(T) \in V_x^t$$

принцип максимума обеспечивает оптимальность найденного процесса, если:

а) подынтегральная функция $f^0(t, x, u)$ выпукла по x и u в каждый момент времени $t \in (0; T)$;

б) терминальный член $F(x(T))$ – также выпуклая по x функция;

в) дифференциальные уравнения процесса линейны, т.е. имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}(t); \quad i = 1,...n;$$

г) множества U^t и V_x^T выпуклы, при этом множество V_x^T может вырождаться в одну конечную точку $x(T) \in V_x^T$.

В этом случае имеем задачу с обоими закрепленными концами.

Поскольку в разд. 6.2 рассмотрено решение линейного примера 6.1, а он выпуклый и вогнутый одновременно (в данном случае нам нужна только выпуклость), то было получено оптимальное решение.

Доказательство. Проведем те же операции, с помощью которых были выведены уравнения принципа максимума, но при этом покажем, что при сделанных в условиях теоремы 6.1 предположениях они обеспечивают не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности процесса.

В теореме о достаточных условиях оптимальности необходимо найти такую допустимую векторную пару (x^*, u^*), чтобы выполнялись два условия:

1) $R(t,x^*,u^*) = \max\limits_{(x,u)\in V^t} R(t,x,u), \quad \forall t \in (0;t);$

$$R(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

2) $\Phi(x^*(T)) = \min\limits_{x \in V_x^T} \Phi(x);$

$$\Phi(x) = \varphi(T,x) + F(x).$$

При выводе уравнений принципа максимума (*см.* формулу (6.10)) было показано, что

$$R(t,x^*,u^*) = \max_{u\in V_u} R(t,x^*,u) = \max_{u\in V_u} H(t,x^*,\psi,u) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{6.33}$$

$$\psi(t) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}\Big|_{x^*(t)}.$$

В результате этого имеем

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in V_u} R(t,x^*(t),u(t)) = \arg\max_{u\in V_u} H(t,x^*(t),\psi,u).$$

Далее при фиксированном $u = u^*(t)$ максимизация функции $R(t, x, u)$ была заменена лишь необходимыми условиями максимизации $\frac{\partial R(t,x,u^*(t))}{\partial x_j}\Big|_{x^*(t)} = 0$, $j = 1, 2,..., n$, откуда получили сопряженную систему уравнений

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H(t,x,\psi(t),u)}{\partial x_j}\Big|_{x^*(t),u^*(t)}.$$

Покажем, что для рассматриваемого в этой теореме класса процессов операция

$$\frac{\partial R(t,x,u)}{\partial x_j}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} = 0, \quad j = 1, 2,...,n, \tag{6.34}$$

эквивалентна $\max\limits_x R(t,x,u^*)$ при $t \in (0;T)$.

В данном случае

$$R(t,x,u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)-f^0(t,x,u)+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+\sum_{k=1}^{r}b_{ik}(t)u_k\right]-f^0(t,x,u)+\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Функции $\psi_i(t)$ задаются формулой (6.33). Поскольку фигурирующая в теореме о достаточных условиях оптимальности функция $\varphi(t, x)$ в некоторой степени произвольная, зададим ее в виде

$$\varphi(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)x_i.$$

В результате получаем

$$R(t,x,u)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+\sum_{k=1}^{r}b_{ik}(t)u_k\right]-$$
$$-f^0(t,x,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d\psi_i(t)}{dt}x_i. \qquad (6.35)$$

Кроме функции $f^0(t, x, u)$, во все остальные слагаемые выражения (6.35) все переменные входят линейно. Функция $f^0(t, x, u)$ по условию теоремы выпукла по x и u. Следовательно, функция $-f^0(t, x, u)$ вогнута, т.е. имеет вид параболоида («колокола») ветвями вниз. Остальные слагаемые в функции (6.35) линейные и, как известно из теории математического программирования, не изменяют характер вогнутости. Поэтому функция $R(t, x, u)$ вогнута по x и u и ее максимум по x при фиксированном $u = u^*$ достигается в стационарной точке, исходя из условия $\frac{\partial R(t,x,u^*(t))}{\partial x_j}\Big|_{x^*(t)}=0$, $j=1, 2,..., n$. Таким образом, в данном случае условие (6.34) является не только необходимым, но и достаточным для максимизации функции $R(t, x, u^*)$ по x.

Остается доказать, что условия трансверсальности (6.18) в рассматриваемом случае эквивалентны удовлетворению второго требования (4.11) теоремы 4.2 о достаточных условиях оптимальности.

В данном случае

$$\Phi(x)=\varphi(T,x)+F(x)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(T)x_i+F(x).$$

Первое слагаемое $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(T)x_i$ линейно по x, второе – по условию теоремы выпукло. Следовательно, $\Phi(x)$ – выпуклая функция. Поскольку рассматривается только случай неограниченных значений x при $t = T$ (это оговорено при выводе условий трансверсальности), то минимум функции $\Phi(x)$ достигается в стационарной точке $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=0$, $i = 1,..., n$, откуда $\psi_i(T)=-\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\Big|_{x^*(T)}$.

Таким образом, если в общем случае условия трансверсальности являются только необходимыми условиями оптимальности процесса, то в данном случае они и достаточные.

Теорема 6.2 полностью доказана.

Следствие. Для линейных задач оптимального управления принцип максимума обеспечивает необходимые и достаточные условия оптимальности. Действительно, в данном случае подынтегральная функция $f^0(t, x, u)$ и терминальный член $F(x)$ – линейные функции своих аргументов. Поскольку линейная функция одновременно и выпуклая, и вогнутая, то требование выпуклости удовлетворяется.

Множество допустимых управлений V_u образовано линейными ограничениями, если задача линейная. А это, как известно из теории линейного программирования, – выпуклое многогранное множество [2]. Следовательно, для линейных задач ТОУ все условия доказанной теоремы выполняются.

Заметим, что принципиально таким же по своим условиям и ограничениям, по общей идее доказательства является суть аналогичной теоремы для многошаговых (дискретных) процессов. Поэтому в главе 7, посвященной методу Лагранжа для многошаговых процессов управления, ее доказывать не будем.

Пример 6.2. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J=\int_0^T(x^2+u^2)dt+\frac{1}{2}x^2(T)\to\min;$$

$$\frac{dx}{dt}=x+u,\quad x(0)=x_0.$$

Построим, как и в примере 6.1, функцию Гамильтона $H(t, x, \psi, u)$ и воспользуемся соотношениями принципа максимума. Согласно формуле (6.9) имеем

$$H(t, x, \psi, u) = \psi(x+u) - u^2 - x^2,$$

откуда из необходимого условия максимума функции $H(t, x, \psi, u)$ по u $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ (максимум действительно имеет место, так как ограничений на u нет и $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$) получаем выражение через сопряженную переменную

$$u^* = \frac{\psi}{2}. \tag{6.36}$$

Если теперь, как и в примере 6.1, составить сопряженную систему, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + \frac{\psi}{2}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2x - \psi. \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

Условие трансверсальности (6.18) дает соотношение

$$\psi(T) = -x(T). \tag{6.38}$$

Таким образом, если учесть начальное условие $x(0) = x_0$, то для нахождения оптимальной траектории $x^*(t)$ получаем краевую задачу для системы (6.37). Для отыскания решения краевой задачи найдем общее решение системы (6.37). Его можно получить, исключив в системе дифференциальных уравнений (6.37) одну из переменных x или ψ и сведя эту систему к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами (*см.* разд. 1.5).

Исключив из второго дифференциального уравнения системы (6.37) величину x, получим

$$x = \frac{1}{2}\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2}\psi. \tag{6.39}$$

Далее в первое уравнение системы (6.37) нужно подставить значения x и $\frac{dx}{dt}$. Поэтому продифференцируем обе части соотношения (6.39), вследствие чего будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d\psi}{dt}. \tag{6.40}$$

Подставляя выражения (6.39) и (6.40) в первое уравнение системы (6.37), находим

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\psi = 0. \tag{6.41}$$

Составляем согласно разд. 1.5 характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (6.41):

$$p_2 - 2 = 0,$$

его корни будут $p_1, p_2 = \pm\sqrt{2}$.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (6.41) будет иметь вид

$$\psi(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}. \tag{6.42}$$

Для определения функции $x(t)$ во втором уравнении (6.37) потребуется вычислить $\frac{d\psi}{dt}$, что согласно формуле (6.42) дает

$$\frac{d\psi}{dt} = C_1 e^{\sqrt{2}t}\sqrt{2} - C_2 e^{-\sqrt{2}t}\sqrt{2}. \tag{6.43}$$

Подставляя соотношения (6.42) и (6.43) во второе уравнение системы (6.37) и разрешая ее относительно $x(t)$, получим

$$x(t) = \frac{C_1}{2} e^{\sqrt{2}t}(1+\sqrt{2}) - \frac{C_2}{2} e^{-\sqrt{2}t}(\sqrt{2}-1). \tag{6.44}$$

Произвольные постоянные C_1 C_2 (в общем решении (6.44)) определяем из начального условия $x(0) = x_0$ и условия трансверсальности (6.38).

Опуская промежуточные трудоемкие, но тривиальные вычисления, будем иметь

$$C_2 = \frac{-x_0\left(e^{\sqrt{2}T} + \frac{2e^{\sqrt{2}T}}{1+\sqrt{2}}\right.}{\frac{(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}T} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}T}}{1+\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2}-1)(e^{\sqrt{2}T} + e^{-\sqrt{2}T})}{2}}; \quad (6.45)$$

$$C_1 = \frac{2x_0 + C_2(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{2}}. \quad (6.46)$$

Величина C_2 в формуле (6.46) определяется по формуле (6.45). В результате оптимальные значения состояния $x^*(t)$ и управления $u^*(t)$ согласно формулам (6.44) и (6.36) имеют вид

$$x^*(t) = \frac{C_1}{2}e^{\sqrt{2}t}(1+\sqrt{2}) - \frac{C_2}{2}e^{-\sqrt{2}t}(\sqrt{2}-1); \quad (6.47)$$

$$u^*(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}). \quad (6.48)$$

Значения C_1 и C_2 в формулах (6.47) и (6.48) определяются соотношениями (6.45) и (6.46).

Полученное решение не требует доказательства оптимальности, так как все условия теоремы 6.2 выполнены.

То, что данное решение удалось получить в аналитической форме, – далеко не правило, а скорее «счастливое исключение». В главе 8 мы встретимся с экономическими задачами, где численное решение неизбежно.

6.4. Задача Эйлера вариационного исчисления

Излагаемая задача пока не имеет известных экономических приложений, и поэтому может возникнуть вопрос, для чего она нужна в настоящем учебном пособии? Ответ следующий: эта задача первая в так называемом вариационном исчислении, методы и алгоритмы решения которой впоследствии способствовали созданию теории оптимального управления. По крайней мере

она имеет историческую значимость и должна быть известна учащимся.

Задачей Эйлера в современном изложении называют задачу о минимуме функционала

$$J = \int_0^T f^0(t,x,u)dt \to \min \quad (6.49)$$

при наличии ограничений

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (6.50)$$

и граничных условий

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \quad (6.51)$$

где $x \in R^n$ – n-мерный вектор состояния;
$u \in R^n$ – n-мерный вектор управления (в данном случае размерность векторов состояния и управления одинакова);
x_0, x_1 – заданные n-мерные векторы начального и конечного состояния системы;
R^n – символ n-мерного действительного эвклидова пространства.

Помимо векторных уравнений процесса (6.50) на элементы $v(t) = (x(t), u(t))$ допустимого множества M наложены ограничения теоретико-множественного характера: $x(t)$ – непрерывная и кусочно-дифференцируемая, $u(t)$ – кусочно-непрерывная вектор-функции. Скалярная функция $f^0(t, x, u)$ – непрерывная и дифференцируемая по всем аргументам. Ограничимся частным случаем $n = 1$, на состояние и управление ограничений нет, т.е. V_x^t и V^{tx} совпадают соответственно с числовыми осями X и U, а при $t = 0$ и $t = T$ представляют собой заданные точки x_0 и x_1.

Свойства решения задачи Эйлера в значительной мере определяются характером индикатрисы, т.е. зависимости подынтегрального выражения $f^0(t, x, u)$ от управления u при фиксированных значениях t и x. Именно эту зависимость удобно положить в основу классификации решений. В [9] рассмотрены четыре случая:

1) постоянная индикатриса, т.е. $f^0(t, x, u) = f^0(t, x)$;

2) индикатриса с ограниченной нелинейностью по управлению

$$f^0(t, x, u) = g^0(t, x, u) + h^0(t, x)\, u;$$

3) линейная индикатриса, этот случай рассматривался в разд. 4.5.1;

4) выпуклая индикатриса, когда $\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2} > 0$.

Ограничимся изучением последнего, четвертого случая, так как его исследование может быть проведено с помощью принципа максимума Понтрягина. В соответствии с этим принципом построим функцию Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = \psi u - f^0(t, x, u). \qquad (6.52)$$

Поскольку ограничений на состояние x и управление u нет, то применим необходимое условие максимума функции Гамильтона (6.52)

$$\frac{\partial H(t,x,\psi,u)}{\partial u} = 0,$$

откуда получаем

$$u^*(t,x,\psi) = \arg\max\left(\frac{\partial H}{\partial u} = 0\right). \qquad (6.53)$$

Записываем систему: уравнение процесса и сопряженное уравнение, используя ограничение (6.50):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u^*; \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\partial H(t,x,\psi(t),u^*)}{\partial x}\Big|_{x^*}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.54)$$

Решая систему двух дифференциальных уравнений (6.50) и (6.54) относительно искомых переменных x и ψ, с учетом выражения (6.53) получаем процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности.

Пример 6.3. Имеем задачу Эйлера в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &J = \int_0^{\pi} (x^2 + u^2)dt \to \min; \\ &\frac{dx}{dt} = u; \\ &x(0) = 0, \quad x(\pi) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.55)$$

Поступаем согласно изложенному выше алгоритму решения задачи Эйлера. Вычислим функцию Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = \psi u - x^2 - u^2.$$

Максимизируем функцию Гамильтона по u:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

откуда получаем

$$\psi - 2u = 0, \text{ или } u^* = \frac{\psi}{2}.$$

Составляем систему сопряженных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\psi}{2}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2x. \end{aligned}\right\}$$

Чтобы исключить $\psi(t)$, дифференцируем первое из двух уравнений системы по t и получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\frac{d^2x}{dt^2},$$

откуда находим

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0. \qquad (6.56)$$

Уравнение (6.56) называют уравнением Эйлера.

Корни характеристического уравнения (1.7) для уравнения Эйлера (6.56) $p_1 = 1$, $p_2 = -1$. Отсюда его общее решение:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \qquad (6.57)$$

Определяя произвольные постоянные C_1 и C_2 из краевых условий (6.55), получаем оптимальное состояние:

$$x^*(t) = \frac{\pi}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}(e^t - e^{-t}).$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x^*(t)} = \frac{\pi}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}(e^{t} + e^{-t}).$$

Пара $v^*(t) = (x^*(t), u^*(t))$ обладает свойством оптимальности, так как условия теоремы 6.2 выполняются.

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1 – 8 найти управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности. Установить, является ли найденный процесс оптимальным. Решение изобразить графически.

1. $J = \int_0^4 (2u + u^2 - x)dt + 2x(4) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2u; \quad x(0) = 0.$$

2. $J = \int_0^4 (u + u^2 + 2x^2)dt \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = x + 2u; \quad x(0) = 0.$$

3. $J = \int_0^{10} (u^2 + x)dt \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = x - u; \quad 0 \le u \le 4; \quad x(0) = 1.$$

4. $J = \int_0^4 (x + 5u)dt - 2x(4) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + u; \quad |u| \le 1; \quad x(0) = 1.$$

5. $J = \int_0^3 (x - 6u)dt + 2x(3) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = x + 2u; \quad 0 \le u \le 1; \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

6. $J = \int_0^3 (2u^2 - 4x)dt + x(3) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = x + u; \quad |u| \le 1; \quad x(0) = 1.$$

7. $J = \int_0^{10} (2u + u^2 + x)dt - 3x(10) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = x + u; \quad |u| \le 2; \quad x(0) = 1.$$

8. $J = \int_0^3 (x_1 + x_2 + 2u)dt - x_2(3) \to \min;$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - u; \quad x_1(0) = 2.$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + u; \quad x_2(0) = 0; \quad |u| \le 2.$$

При решении задач 9 – 11 следует иметь в виду, что условие трансверсальности использовать нельзя, так как задано правое граничное значение функции состояния. Решения изобразить графически.

9. $J = \int_0^{10} (2x - u)dt \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = -2x + u; \quad |u| \le 1; \quad x(0) = 1; \quad x(10) = \frac{1}{2}.$$

10. $J = \int_0^5 (u^2 - x)dt \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = -(x + u); \quad u \in [0;10]; \quad x(0) = 1; \quad x(5) = -2.$$

11. $J = \int_0^{10} (x + u)dt \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2u; \quad u \in [0;1]; \quad x(0) = 1; \quad x(10) = 2.$$

В задачах 12 и 13, имеющих квадратичный терминальный член, отыскать решение, анализируя поведение сопряженной функции $\psi(t)$.

12. $$J=\int_0^{10}(2x-u)dt+2x^2\to\min;$$

$$\frac{dx}{dt}=-2x+u;\quad |u|\le 1;\quad x(0)=1.$$

13. $$J=\int_0^{10}(-3x+3u)dt+x^2\to\min;$$

$$\frac{dx}{dt}=-x+u;\quad |u|\le 1;\quad x(0)=2.$$

14. Задача о линии наименьшей длины [9, с. 173]:

Пусть на плоскости (t, y) заданы точки $A(t_1, y_1)$ и $B(t_2, y_2)$. Среди всех линий, соединяющих эти точки на плоскости, выбрать линию наименьшей длины. Из элементарной геометрии известно, что это прямая. Самостоятельно с использованием указанного источника показать этот результат, обращаясь к изученным методам оптимизации в форме задачи Эйлера:

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+u^2}\,dt\to\min;$$

$$\frac{dy}{dt}=u;$$

$$y(t_1)=y_1,\quad y(t_2)=y_2.$$

Обосновать оптимальность полученного решения.

15. Самостоятельно рассмотреть негативный пример [9, с. 175] для задачи Эйлера, где удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности процесс может быть оптимальным или неоптимальным в зависимости от исходных параметров:

$$J=\int_0^T(u^2-x^2)dt\to\min;$$

$$\frac{dx}{dt}=u;$$

$$x(0)=x(T)=0.$$

Величину T считать заданной, но заранее не фиксированной.

ГЛАВА 7 МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Уравнения метода. Условия оптимальности для многошагового процесса с неограниченным управлением

Выше уже давался комментарий, почему для дискретных (многошаговых) процессов некорректно применение термина «принцип максимума» (хотя на практике его пусть с долей условности, но используют [1]). Мы, однако, будем называть его методом Лагранжа, поскольку последнему принадлежат соответствующие идеи.

Конкретизируем общую постановку задачи без ограничений на управление.

Пусть заданы уравнения процесса

$$x^i(t+1)=f^i(t, x(t), u(t)),\ t=0, 1,\dots, T\text{-}1,\ i=1, 2,\dots, n, \tag{7.1}$$

краевые условия

$$x^i(0)=x^i_0,\ i=1, 2,\dots, k,\quad x^i(T)=x^i_1,\ i=k+1,\dots, n, \tag{7.2}$$

и ограничения

$$u^*(t)\in V^t_u, \tag{7.3}$$

причем $u^*(t)$ – внутренняя точка множества V^t_u при всех $t=0, 1,\dots, T\text{-}1$.

Обозначим через M множество допустимых пар $v=(x(t), u(t))$, т.е. пар, удовлетворяющих условиям (7.1) и (7.2). Поставим задачу об отыскании пары $v=(x(t), u(t))\in M$, на которой

$$J=\sum_{t=0}^{t-1}f^0(t,x(t),u(t))+F(x(T))\to\min. \tag{7.4}$$

Выведем уравнения метода Лагранжа аналогично непрерывному варианту, опираясь на достаточные условия оптимальности. Согласно последним (*см.* главу 4), если допустимый процесс ($x^*(t)$, $u^*(t)$) и функция $\varphi(t, x)$ такие, что выполняются условия

$$R(t,x^*(t),u^*(t)) = \max_{(x,u)\in V^t} R(t,x(t),u(t)), \quad \forall t = 0,1,...,T-1; \tag{7.5}$$

$$\Phi(x^*(T)) = \min_{x\in V_x^t} \Phi(x) \text{ при } t = T, \tag{7.6}$$

то процесс $x^*(t)$, $u^*(t)$ оптимален, т.е.

$$J(x^*,u^*) = \min_{(x,u)\in M} J(x,u).$$

Для задачи с закрепленным правым концом условие (7.6) удовлетворяется тривиально, так как при $t = T$ множество V_x^t состоит только из одной точки.

Согласно формуле (4.25) для задачи (7.1) – (7.4) функция $R(t, x, u)$ имеет следующий вид:

$$R(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) - f^0(t, x, u) \tag{7.7}$$

$$f(t, x, u) = \{f^i(t, x, u)\}, \quad i = 1,..., n.$$

Так как в модели (7.1) – (7.4) других ограничений, кроме краевых условий на состояние, нет, то множество V_x^t совпадает со всем пространством X. Пусть функция $\varphi(t, x)$ – дифференцируемая по x, функции $f^i(t, x, u)$, $i = 1,..., n$, $f^0(t, x, u)$ – дифференцируемые по x, u в точках $x^*(t)$, $u^*(t)$. Тогда необходимыми условиями максимума функции $R(t, x, u)$ по x (поскольку на x нет ограничений) и u являются следующие:

$$\frac{\partial R}{\partial x^i}\Big|_{x^*,u^*} = 0, \quad i = 1,...,n; \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u^j}\Big|_{x^*,u^*} = 0, \quad j = 1,...,r. \tag{7.9}$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\psi(t) = (\psi_1(t),..., \psi_n(t))$, где

$$\psi_i(t) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x^i}\Big|_{x^*,t}, \quad i = 1,...,n, \tag{7.10}$$

и гамильтониан

$$H(t,x,\psi,u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \ f(t,x,u) - f^0(t,x,u). \tag{7.11}$$

Представим в более удобном для приложений виде условия (7.9). С учетом выражений (7.7) и (7.10) левая часть в формуле (7.9) принимает вид

$$\frac{\partial R}{\partial u^j}\Big|_{x^*,u^*} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(t+1, f(t,x,u))\right]\frac{\partial f^i(t,x^*,u^*)}{\partial u^j}\Big|_{u^*} - \frac{\partial f^0}{\partial u^j}\Big|_{x^*,u^*},$$

$$i = 1,..., r,$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial u^j}\Big|_{x^*,u^*} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t+1)\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\Big|_{x^*,u^*} - \frac{\partial f^0}{\partial u^j}\Big|_{x^*,u^*}, \tag{7.12}$$

$$j = 1,..., r.$$

А с учетом соотношений (7.11) и (7.12) окончательно получаем

$$\frac{\partial R}{\partial u^j}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} = \frac{\partial}{\partial u^j} H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)\Big|_{u^*(t)} = 0, \tag{7.13}$$

$$j = 1,..., r.$$

Теперь расшифруем другое необходимое условие (7.8). Учитывая выражение (7.7), найдем

$$\frac{\partial R}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi(t+1, f(t,x,u))\right)\frac{\partial f^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial f^0}{\partial x^i}\right]_{x^*(t),u^*(t)} = 0,$$

$$i = 1,..., n.$$

Далее с учетом выражения (7.10) будем иметь

$$\frac{\partial R}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t)u^*(t)} = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t+1)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} - \psi_i(t) - \frac{\partial f^0}{\partial x^i}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} = 0, \tag{7.14}$$

$$i = 1,..., n,$$

а с учетом функции Гамильтона (7.11) окончательно получаем

$$\frac{\partial R}{\partial x^i}|_{x^*(t),u^*(t)} = \frac{\partial}{\partial x^i} H(t,x,\psi(t+1),u^*(t))|_{x^*(t)} - \psi_i(t) = 0,$$

$$j = 1,..., n, \tag{7.15}$$

откуда выводим сопряженную систему конечно-разностных уравнений:

$$\psi_i(t) = \frac{\partial}{\partial x^i} H(t,x,\psi(t+1),u^*(t))|_{x^*(t)},$$

$$i=1,..., n. \tag{7.16}$$

Итак, в результате представленных преобразований получены необходимые условия оптимальности (7.13) и (7.16) многошаговых управляемых процессов. Неизвестными здесь являются n-мерный вектор оптимального состояния $x^*(t)$, r-мерный вектор оптимального управления $u^*(t)$ и сопряженная n-мерная вектор-функция $\psi(t)$. Таким образом, число неизвестных будет равно $2n + r$, а условия (7.13) и (7.16) задают всего $n + r$ уравнений. Недостающие n условий дают уравнения процесса (7.1) с учетом краевых условий (7.2). Следовательно, система уравнений для определения $2n + r$ неизвестных полностью определена.

Необходимые условия оптимальности воплощаются в следующей системе уравнений метода Лагранжа. Последовательность действий:

1) решаем систему r уравнений относительно компонент вектора $u^*(t)$ при фиксированных значениях остальных компонент:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t,x^*(t),\psi(t+1),u^*)|_{u^*(t)} = 0,$$

в результате получаем $u^*(t)$ с параметрами $x^*(t)$, $\psi(t + 1)$,

где $H(t,x, \psi, u)$ – функция Гамильтона (гамильтониан);

2) составляем и решаем сопряженную систему и систему уравнений процесса:

$$\psi(t) = \frac{\partial H(t,x,\psi(t+1),u^*(t))}{\partial x}|_{x^*(t)};$$

$$x^*(t + 1) = f(t, x^*(t), u^*(t));$$

3) удовлетворяем краевым условиям

$$x^*(0) = x_0, \quad x^*(T) = x_1$$

или, если правый конец свободен, применяем условие трансверсальности

$$\psi(T) = -\frac{\partial F(x)}{\partial x}|_{x^*(T)}.$$

Пример 7.1. Рассмотрим управляемую систему с квадратичным функционалом и линейными ограничениями. Решение, как следует из разд. 6.3, будет оптимальным. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\left.\begin{aligned} &J = \sum_{t=0}^{3} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)] \to \min; \\ &x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t); \\ &x_2(t+1) = x_1(t) + u_1(t); \\ &x_1(0) = -1; \ \ x_2(0) = 1; \ \ x_1(4) = 4; \ \ x_2(4) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

1. Составляем функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi_1(x_1 + x_2 + u_2) + \psi_2(x_1 + u_1) - x_1^2 - x_2^2 - u_1^2 - u_2^2.$$

2. Вычисляем ее частные производные по u_1 и u_2:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}|_{\psi(t+1),x^*(t),u^*(t)} = \psi_2(t+1) - 2u_1^*(t) = 0 \Rightarrow u_1^*(t) = \frac{\psi_2(t+1)}{2}; \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2}|_{\psi(t+1)x^*(t),u^*(t)} = \psi_1(t+1) - 2u_2^*(t) = 0 \Rightarrow u_2^*(t) = \frac{\psi_1(t+1)}{2}. \tag{7.19}$$

3. Строим сопряженную систему уравнений:

$$\psi_1(t) = \frac{\partial H(t,x,\psi(t+1),u(t))}{\partial x_1}|_{x^*(t)} = \psi_1(t+1) + \psi_2(t+1) - 2x_1^*(t);$$

$$\psi_2(t) = \frac{\partial H(t,x,\psi(t+1),u(t))}{\partial x_2}|_{x^*(t)} = \psi_1(t+1) - 2x_2^*(t).$$

4. К заданной выше системе присоединяем уравнение процесса:

$$x_1^*(t+1) = x_1^*(t) + x_2^*(t) + \frac{\psi_1(t+1)}{2};$$

$$x_2^*(t+1) = x_1^*(t) + \frac{\psi_2(t+1)}{2}.$$

Для удобства последующих расчетов в системе уравнений 3 и 4 проведем некоторые преобразования, так чтобы в конечном счете в уравнениях слева иметь зависимости от t, а справа – от $t+1$ (или наоборот). Получаем:

$$x_1^*(t) = x_2^*(t+1) - \frac{1}{2}\psi_2(t+1);$$

$$x_2^*(t) = x_1^*(t+1) - x_2^*(t+1) - \frac{1}{2}\psi_1(t+1) + \frac{1}{2}\psi_2(t+1);$$

$$\psi_1(t) = \psi_1(t+1) + 2\psi_2(t+1) - 2x_2(t+1);$$

$$\psi_2(t) = 2\psi_1(t+1) - 2x_1^*(t+1) + 2x_2(t+1) - \psi_2(t+1).$$

Это позволяет удобным образом вести итеративный процесс, последовательно понижая значения t от 4 до 0.

Исходя из последних четырех формул, с учетом граничных условий (7.17) получаем

при $t = 3$:

$$x_1^*(3) = -\frac{1}{2}\psi_2(4);$$

$$x_2^*(3) = 4 - \frac{1}{2}\psi_1(4) + \frac{1}{2}\psi_2(4);$$

$$\psi_1(3) = \psi_1(4) + 2\psi_2(4);$$

$$\psi_2(3) = 2\psi_1(4) - 8 - \psi_2(4);$$

при $t = 2$:

$$x_1^*(2) = x_2^*(3) - \frac{1}{2}\psi_2(3) = 4 - \frac{1}{2}\psi_1(4) + \frac{1}{2}\psi_2(4) - \psi_1(4) + {}$$
$$+ 4 + \frac{1}{2}\psi_1(4) = 8 - \frac{3}{2}\psi_1(4) + \psi_2(4);$$

$$x_2^*(2) = x_1^*(3) - x_2^*(3) - \frac{1}{2}\psi_1(3) + \frac{1}{2}\psi_2(3) = -\frac{1}{2}\psi_2(4) - 4 + {}$$
$$\frac{1}{2}\psi_1(4) + \frac{1}{2}\psi_1(4) - \frac{1}{2}\psi_2(4) - \frac{1}{2}\psi_1(4) - \psi_2(4) = 4 - 2\psi_2(4);$$

$$\psi_1(2) = \psi_1(3) + 2\psi_2(3) - 2x_2^*(3) =$$
$$= \psi_1(4) + 2\psi_2(4) + 4\psi_1(4) - 16 - 2\psi_2(4) = -16 + 5\psi_1(4);$$

$$\psi_2(2) = 2\psi_1(3) - 2x_1^*(3) + 2x_2^*(3) - \psi_2(3) = 2\psi_1(4) + 4\psi_2(4) + \psi_2(4) + {}$$
$$+ 8 - \psi_1(4) + \psi_2(4) - 2\psi_1(4) + 8 + \psi_2(4) = 8 - \psi_1(4) + 7\psi_2(4);$$

при $t = 1$:

$$x_1^*(1) = -x_2^*(2) - \frac{1}{2}\psi_2(2) = -4 - 2\psi_2(4) - 4 + \frac{1}{2}\psi_1(4) - \frac{7}{2}\psi_2(4) =$$
$$= -8 + \frac{1}{2}\psi_1(4) - \frac{11}{2}\psi_2(4);$$

$$x_2^*(1) = x_1^*(2) - x_2^*(2) - \frac{1}{2}\psi_2(2) + \frac{1}{2}\psi_2(2) = 8 - \frac{3}{2}\psi_1(4) + {}$$
$$+ \psi_2(4) + 4 + 2\psi_2(4) + 8 - \frac{5}{2}\psi_1(4) + 4 - \frac{1}{2}\psi_1(4) + \frac{7}{2}\psi_2(4) =$$
$$= 24 - 4\psi_1(4) + \frac{13}{2}\psi_2(4);$$

$$\psi_1(1) = \psi_1(2) + 2\psi_2(2) - 2x_2^*(2) = -16 + 5\psi_1(4) + 16 - {}$$
$$- 2\psi_1(4) + 14\psi_2(4) + 8 + 4\psi_2(4) = 8 + 3\psi_1(4) + 18\psi_2(4);$$

$$\psi_2(1) = 2\psi_1(2) - 2x_1^*(2) + 2x_2^*(2) - \psi_2(2) =$$
$$= -32 + 10\psi_1(4) - 16 + 3\psi_1(4) - \psi_2(4) - 8 - 4\psi_2(4) - 8 + {}$$
$$+ \psi_1(4) - 7\psi_2(4) = -64 + 14\psi_1(4) - 12\psi_2(4);$$

при $t = 0$ с учетом начальных условий (7.17) $x_1(0) = -1$; $x_2(0) = 1$:

$$x_1^*(0) = x_2^*(0) - \frac{1}{2}\psi_2(1) = 24 - 4\psi_1(4) + \frac{13}{2}\psi_2(4) - 4 - {}$$
$$- \frac{3}{2}\psi_1(4) - 9\psi_2(4) = 20 - \frac{11}{2}\psi_1(4) - \frac{5}{2}\psi_2(4) = -1;$$

$$x_2^*(0) = x_1^*(1) - x_2^*(1) - \frac{1}{2}\psi_1(1) + \frac{1}{2}\psi_2(1) =$$
$$= -8 + \frac{1}{2}\psi_1(4) - \frac{11}{2}\psi_2(4) - 24 + 4\psi_1(4) - \frac{13}{2}\psi_2(4) - 4 - \frac{3}{2}\psi_1(4) -$$
$$-9\psi_2(4) - 32 + 7\psi_1(4) - 6\psi_2(4) = -68 + 10\psi_1(4) - 27\psi_2(4) = 1.$$

На последней, нулевой итерации значения $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$ даже не обязательно вычислять, так как уже имеется возможность удовлетворить начальным условиям (7.17). Последняя итерация приводит к двум линейным алгебраическим уравнениям с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} 11\psi_1(4)+5\psi_2(4)&=42; \\ 10\psi_1(4)-27\psi_2(4)&=69. \end{aligned}\right\} \qquad (7.20)$$

Решая эти уравнения, получаем: $\psi_1(4) = 4{,}262$; $\psi_2(4) = -0{,}9769$. Если теперь подставить найденные значения $\psi_1(4)$ и $\psi_2(4)$ в правые части проведенных выше итераций, то можно вычислить искомые функции оптимального состояния $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, сопряженные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и согласно формулам (7.18) и (7.19) – функции оптимального управления $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$. Обоснованность оптимального решения обсуждалась в разд. 6.3.

В рассмотренном случае решение краевой задачи и точное оптимальное решение задачи ТОУ удалось получить в аналитической форме. Это следствие ее относительной простоты: выпуклый квадратичный функционал и линейные ограничения. В результате система конечно-разностных уравнений оказалась линейной, что позволило в аналитическом виде «протащить» до конца (до нулевой итерации) неизвестные значения $\psi_1(4)$ и $\psi_2(4)$, а затем точно определить их, решая систему (7.20). В более сложных случаях аналитические прогонки затруднительны, а порой и просто невозможны. Нужно сразу задавать конечные значения $\psi_1(4)$ и $\psi_2(4)$ в числовом виде, а дойдя до конца итераций, менять их, если не выполняются условия типа (7.20). Такие прогонки необходимо повторить многократно, и реализация процедуры итеративных расчетов до приемлемой точности возможна только с применением ЭВМ. Эта проблема уже обсуждалась в разд. 1.6. На практике мы столкнемся с ней в главе 8.

7.2. Условия оптимальности для многошагового процесса при наличии ограничений на управление

Рассмотрим задачу (7.1) – (7.4), в которой множество V_x^t по-прежнему совпадает со всем пространством X (т.е. других ограничений, кроме краевых условий (7.2), на состояние системы нет), а $u^*(t)$ не обязательно является внутренней точкой множества V_u^t. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t, x)$ дифференцируема по x, а функции $f^i(t, x, u)$, $i = 1, 2,..., n$, $f^0(t, x, u)$ дифференцируемы по x, u в точках $x^*(t)$, $u^*(t)$.

Для представленной задачи нельзя использовать необходимое условие (7.9), выведенное в предположении, что $u^*(t)$ – внутренняя точка множества V_u^t.

Для решения воспользуемся теоремой о достаточных условиях оптимальности, согласно которой следует обеспечить выполнение условий (7.5) и (7.6).

Условие (7.6) выполняется тривиально, поскольку правый конец траектории закреплен (*см.* соотношение (7.2)). Рассмотрим выполнение условий (7.5). Условия (7.8), (7.14) – (7.16) имеют место на основании совпадения множества V_x^t со всем пространством X. Обеспечим выполнение условия $\max R(t, x, u)$ при фиксированном x, т.е.

$$R(t,x^*(t),u^*(t)) = \max_{u\in V_u^t} R(t,x^*(t),u(t)), \quad t=0,1,...,T-1.$$

Рассмотрим, как связан факт максимизации функции $R(t, x, u)$ по $u \in V_u^t$ со свойствами градиента этой функции по управлению.

Пусть u – скаляр. Тогда множество V_u^t – отрезок: $V_u^t = \{u: a(t) \le \le u \le b(t)\}$, $t = 0, 1,..., T$-1; момент времени t фиксирован.

Конкретизируем необходимые условия $\max\limits_{u\in V_u^t} R(t,x,u)$ при фиксированном x в зависимости от расположения u^* внутри отрезка или на его границах. Рассмотрим три случая (рис. 7.1):

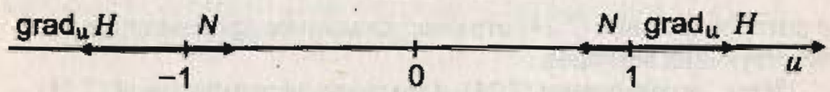

Рис. 7.1. Условия оптимальности для $\frac{\partial H}{\partial u} \le 0$ и $\frac{\partial H}{\partial u} \ge 0$

а) если $u^* \in (a, b)$, т.е. u^* – внутренняя точка отрезка, то

$$\frac{\partial R}{\partial u}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} = \frac{\partial H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)}{\partial u}\Big|_{u^*(t)} = 0; \qquad (7.21)$$

б) если $u^*=a$, то необходимым условием $\max\limits_{u\in V_u^t} R(t,x,u)$ при фиксированном x будет следующее ограничение на градиент функции

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t,x^*(t),\psi(t+1),u))\big|_{u^*=a} \le 0; \qquad (7.22)$$

в) если $u^*=b$, то необходимым условием $\max\limits_{u\in V_u^t} R(t,x,u)$ при фиксированном x будет следующее ограничение на градиент функции $H(t, x, \psi, u)$:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)\big|_{u^*=b} \ge 0. \qquad (7.23)$$

Пусть u – вектор, а V_u^t – множество допустимых значений u с гладкой границей S. В каждой точке границы S можно построить к ней внешнюю нормаль N. Для наглядности примем $r = 2$, тогда V_u^t – плоскость. Рассмотрим два случая:

а) если u^* – внутренняя точка множества V_u^t, тогда необходимое условие $\max\limits_{u\in V_u^t} R(t,x,u)$ при фиксированном $x(t)$ будет

$$\frac{\partial R}{\partial u}\Big|_{x^*(t),u^*(t)} = \frac{\partial H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)}{\partial u}\Big|_{u^*(t)} = 0, \quad j = 1,2;$$

б) если u^* лежит на границе области S, проведем внешнюю нормаль N к границе S множества V_u^t (рис. 7.2).

Тогда необходимым условием $\max\limits_{u\in V_u^t} R(t,x,u)$ при фиксированном $x(t)$ будет ограничение на градиент функции

$$(N, \operatorname{grad}_u H(t, x^*(t), \psi(t+1), u)\big|_{u^*(t)}) \ge 0, \qquad (7.24)$$

в котором условие (7.24) отражает скалярное произведение соответствующих векторов.

Итак, ограничения (7.24), а также их частный случай (7.21) – (7.23) являются только необходимыми условиями оптимальности, а состояние $x^*(t)$ и управление $u^*(t)$, полученные из них, – не

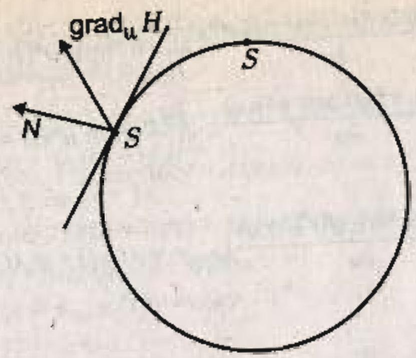

Рис. 7.2. Внешняя нормаль и grad$_u$ $H(t, x\, \psi, u)$

более как подозрительные на оптимум, для которых может потребоваться проведение дополнительного исследования, аналогичного непрерывному варианту. В частности, если правые части уравнений процесса (7.1) линейны по u, то полученные с помощью сформулированных выше необходимых условий оптимальности состояние и управление являются оптимальными, т.е. эти необходимые условия оптимальности оказываются достаточными.

Существенная трудность метода (7.24), как видно из рис. 7.2, заключается в необходимости проверки ограничений (7.24) в каждой граничной точке области S. Уже для двумерной области таких точек бесконечное множество. Принятие для расчетов конечного числа точек чревато ошибками, хотя с использованием ЭВМ таких точек может быть взято достаточно много. Рассмотрим пример, на котором могут проясниться вычислительные аспекты.

Пример 7.2. В стандартной записи многошагового процесса (7.1) – (7.4) заданы: $f^0 = x_1^2, f^1 = x_1 + 2x_2 + u, f^2 = u, F(x(T)) = 0$, $n = 2, r = 1, |u| \le 1, x(0) = x_0$.

Так как на u есть ограничение, то быть уверенным в том, что $u^*(t)$ – внутренняя точка допустимой области V_u^t, нельзя. Поэтому будем исходить из дополнительного ограничения (7.24).

Строим функцию Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = \psi_1(x_1 + 2x_2 + u) + \psi_2 u - x_1^2.$$

Из ограничения (7.24) (см. рис. 7.1) имеем:

$$\frac{\partial H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)}{\partial u}\Big|_{u^*(t)}>0 \quad \text{при } u^*(t)=1;$$

$$\frac{\partial H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)}{\partial u}\Big|_{u^*(t)}<0 \quad \text{при } u^*(t)=-1.$$

Вычисляем

$$\frac{\partial H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)}{\partial u}\Big|_{u^*(t)}=\psi_1(t+1)+\psi_2(t+1),$$

следовательно,

$$u^*(t)=\begin{cases}1; & \psi_1(t+1)+\psi_2(t+1)>0;\\ -1; & \psi_1(t+1)+\psi_2(t+1)<0;\\ \forall u\in[-1;1]; & \psi_1(t+1)+\psi_2(t+1)=0.\end{cases} \qquad (7.25)$$

Остальные уравнения метода Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(t)=\frac{\partial H}{\partial x_1}\Big|_{x^*(t),u^*(t),\psi(t+1)}=\psi_1(t+1)-2x^*(t);\\
&\psi_2(t)=\frac{\partial H}{\partial x_2}\Big|_{x^*(t),u^*(t),\psi(t+1)}=2\psi_1(t+1).\\
&x_1^*(t+1)=x_1^*(t)+2x_2^*(t)+u^*(t);\\
&x_2^*(t+1)=u^*(t).
\end{aligned}\right\}$$

Начальные условия:

$$x_1^*(0)=x_{01},\ x_2^*(0)=x_{02}.$$

Условия трансверсальности:

$$\psi_1(T)=\psi_2(T)=0. \qquad (7.26)$$

Постановка задачи метода Лагранжа закончена. Теперь приступаем к ее решению. Из условий трансверсальности (7.26) имеем

$$\psi_1(T)+\psi_2(T)=0,$$

откуда, используя выражение (7.25) для $u^*(t)$, получаем

$$u^*(T-1)=\forall\, u\in[-1,1].$$

Для удобства вычислений постараемся выразить зависимости от t через зависимости от $t+1$:

$$\begin{aligned}
&u^*(t)=x_2^*(t+1)=\operatorname{sign}(\psi_1(t+1)+\psi_2(t+1));\\
&2x_1^*(t)+\psi_1(t)=\psi_1(t+1);\\
&\psi_2(t)=2\psi_1(t+1);\\
&x_1^*(t)+2x_2^*(t)=x_1^*(t+1)-x_2^*(t+1);\\
&x_2^*(t)=\operatorname{sign}(\psi_1(t)+\psi_2(t));\\
&x_1^*(0)=x_{01};\ x_2^*(0)=x_{02};\\
&\psi_1(T)=0;\ \psi_2(T)=0.
\end{aligned}$$

Вследствие наличия операции

$$\operatorname{sign} z=\begin{cases}1; & z>0\\ -1; & z<0\\ \forall\in[-1;1]; & z=0\end{cases}$$

краевая задача нелинейная.

Проведем две смежные итерации, они должны прояснить ситуацию в направлении решения.

Первая итерация:

$$t+1=T;\ t=T-1.$$

Из условий трансверсальности (7.26) имеем $\psi_1(T)+\psi_2(T)=0$. Положим $x_2^*(T)=\alpha$, где α – пока неопределенное число, $|\alpha|\le 1$. Принимаем произвольное значение $x^*(T)=\beta$. Значения α и β должны быть определены, как мы уже знаем, на последней итерации, исходя из требования, чтобы имело место $x_1^*(0)=x_{01}$, $x_2^*=x_{02}$.

Из краевой задачи после простых преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
&2x_1^*(T-1)+\psi_1(T-1)=0;\\
&\psi_2(T-1)=0;\\
&x_1^*(T-1)+2x_2^*(T-1)=\beta-\alpha;\\
&x_2^*(T-1)=\operatorname{sign}(\psi_1(T-1)+\psi_2(T-1)).
\end{aligned}$$

После исключения неизвестных и ряда упрощений приходим к решению нелинейного уравнения:

$$x_2^*(T-1)=\operatorname{sign}(x_2^*(T-1)+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)).$$

Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться посредством прямой подстановки, имеет следующий вид:

$$x_2^*(T-1)=\begin{cases}1; & \alpha-\beta>2;\\ -1; & \alpha-\beta<-2;\\ \pm 1;\ -\frac{1}{2}; & |\alpha-\beta<2|;\\ \pm 1; & |\alpha-\beta=2|.\end{cases}$$

Рассматривать нужно все варианты полученного решения, так как α и β пока не определены. Известно только, что $|\alpha|\le 1$, а β – произвольное число. Последовательно определяем $x_1^*(T-1)$, $\psi_1(T-1)$, $\psi_2(T-1)$. Здесь $x_2^*(T-1)$ – различные варианты представленного выше решения.

Вторая итерация:

$$t+1=T-1;\ t=T-2.$$

Выполняя действия, аналогичные первой итерации, и исключая все переменные, кроме $x_2^*(T-2)$, получим нелинейное уравнение:

$$x_2^*(T-2)=\operatorname{sign}(4x_2^*(T-2)+3\psi_1(T-1)-2x_1^*(T-1)+2x_2^*(T-1)).$$

Здесь $\psi_1(T-1)$, $x_1^*(T-1)$, $x_2^*(T-1)$ – определенные выше функции неизвестных величин α и β.

Таким образом, на n-й итерации получим уравнение

$$x_2^*(T-n)=\operatorname{sign}(A_n x_2^*(T-n)+F_n(\alpha,\beta)),$$

где A_n – рассчитанный коэффициент;
F_n – заданная функция α и β.

Аналитическое решение такого уравнения, как видим, оказывается трудоемким и громоздким. Проще на первой итерации задавать численные значения α и β, с помощью ЭВМ доводить решение до конца, т.е. до начальных значений, сравнивать полученные $x_1^*(0)$ с заданными. При несовпадении заданных и полученных значений изменять α и β и вновь повторять серии расчетов до приемлемой близости начальных условий. Подобная вычислительная процедура уже упоминалась в разд. 1.6. Полная ее демонстрация будет представлена в главе 8.

Задачи для самостоятельной работы

В следующих задачах найти процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности Лагранжа. Выделить случаи достаточности.

1. $\sum_{t=0}^{4}[x^2(t)+u^2(t)]+2x(5)\to\min;$

$x(t+1)=-x(t)+u(t);$
$x(0)=0.$

2. $\sum_{t=0}^{4}[x(t)+2u(t)+u^2(t)]\to\min;$

$x(t+1)=-x(t)+2u(t);$
$x(0)=1,\ x(5)=1.$

3. $\sum_{t=0}^{3}[4x^2(t)-x(t)]-x^2(4)\to\min;$

$x(t+1)=2x(t)-u(t);$
$x(0)=2.$

4. $\sum_{t=0}^{3}[x^2(t)+u^2(t)]+3x^2(4)\to\min;$

$x(t+1)=-x(t)+2u(t);$
$x(0)=1.$

5. $\sum_{t=0}^{4}[x(t)+2u^2(t)]-x(5)+2x^2(5)\to\min;$

$x(t+1)=-x(t)+2u(t);$
$x(0)=1.$

6. $\sum_{t=0}^{3}[x_1^2(t)-x_2(t)+u_1^2(t)+u_2^2(t)]+x_2(4)\to\min;$

$x_1(t+1)=2x_1(t)-x_2(t)+u_1(t);$
$x_2(t+1)=-x_1(t)+x_2(t)-u_2(t);$
$x_1(0)=1,\ x_2(0)=1.$

ГЛАВА 8

ПРИМЕНЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА–ПОНТРЯГИНА

8.1. Цели исследования. Оптимальное управление движущимся объектом

Рассмотрим постановки и решения ряда задач оптимального управления для непрерывных и многошаговых (дискретных) процессов. Необходимые условия оптимизации в форме Лагранжа–Понтрягина являются аппаратом оптимизации процесса. В соответствии с теоремой 6.2 дополнительного доказательства оптимальности во всех рассматриваемых случаях не требуется, так как в разд. 8.1 решается линейная задача, а в разд. 8.2 и 8.3 – две содержательно сходные задачи соответственно для многошаговых и непрерывных процессов с выпуклыми функционалами и линейными ограничениями.

Для линейной задачи краевая задача решается точно и оказывается возможным провести некоторый качественный анализ еще до получения решения; для многошаговых и непрерывных процессов краевые задачи решаются приближенно численным методом прямой прогонки (*см.* разд. 1.6).

Две последние задачи, содержательно между собой очень близкие, приводятся вместе для сопоставления техники математических выкладок и расчетных схем. Это дает возможность увидеть сходство и различие в однотипных постановках задач и подходах к их решению.

Последний раздел 8.4 этой главы можно рассматривать как завершение магистральной теории, представленной в разд. 5.2.

В предисловии говорилось об инвариантном в известной мере характере ТОУ и ее прикладных возможностях в различных направлениях. На представленных в данной главе задачах имеется возможность в этом убедиться: первая задача относится к механике как к разделу физики, остальные три – к экономике. Последнее неслучайно, так как учебное пособие ориентировано

прежде всего на экономистов. Важно, чтобы они знали об универсальности методов изучаемой ими теории.

Пример 8.1. Рассмотрим прямолинейное движение некоторого объекта с двигателем (например, автомобиля). Объект имеет массу m, а двигатель обеспечивает воздействие на него силы F, не превышающей по абсолютной величине значения γ, $|F| \le \gamma$. Если приложенная сила разгоняет объект, то ее значение принимается положительным, если тормозит – отрицательным.

Пусть в момент $t = 0$ начальные путь и скорость нулевые, т.е. объект находится в покое: $s(0) = v(0) = 0$; $s(t)$ и $v(t)$ – соответственно пройденный путь и скорость в произвольный момент t.

Требуется найти такой оптимальный режим управления (разгона и торможения), чтобы объект прошел заданный путь L в минимальное время и остановился.

Построим математическую модель движения объекта. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона, в соответствии с которым произведение массы объекта на ускорение его движения равно приложенной силе F. Ускорение равно производной от скорости по времени. Скорость движения – это, в свою очередь, производная от пройденного пути по времени.

На основе сказанного запишем дифференциальные уравнения:

$$m\frac{dv}{dt} = F; \quad \frac{ds}{dt} = v, \tag{8.1}$$

ограничения для рассматриваемого процесса:

$$|F| \le \gamma; \tag{8.2}$$

$$s(0) = 0,\ v(0) = 0; \tag{8.3}$$

$$s(T) = L,\ v(T) = 0 \tag{8.4}$$

и функционал

$$T \to \min, \tag{8.5}$$

который отражает достижение конечной цели (8.4) за минимальное время.

Итак, математическая модель движения управляемого объекта построена. Дифференциальные уравнения (8.1) – это уравнения процесса, причем скорость v и путь s – компоненты вектора состояния, сила F – параметр управления. Это вытекает из общей постановки задач оптимального управления и отвечает формальным признакам, позволяющим отличить параметры состояния системы (входят в уравнения процесса как сами по себе, так и со своими производными) от параметра управления (сила F входит в одно из уравнений процесса (8.1) только сама по себе, без производной).

Неравенство (8.2) задает ограничение на управление, условия (8.3) и (8.4) – соответственно начальное и конечное состояния системы, (8.5) – функционал, характеризующий задачу о быстродействии. Так называют задачи ТОУ, в которых функционал отражает цель оптимизации управления – достижение некоторого предусмотренного результата за минимальное время.

До сих пор рассматривались управляемые процессы, для которых время T считалось заданным. При этом система дифференциальных уравнений метода Лагранжа–Понтрягина включала $2n$ уравнений с $2n$ искомыми функциями. Соответственно было $2n$ граничных условий, включая, если необходимо, условия трансверсальности (6.18). В данном случае при тех же $2n$ дифференциальных уравнениях и $2n$ искомых функциях появляется еще одна неизвестная – величина T. Для однозначного решения системы с $2n+1$ уравнениями и с таким же количеством неизвестных требуется дополнительное условие трансверсальности. Оно имеет вид

$$H(T,x^*(T),\psi(T),u^*(T))=\frac{\partial F(x)}{\partial T}\Big|_{x^*(T)}, \qquad (8.6)$$

вывод приведен в [9, с. 190, формула (8.30)]. Условием трансверсальности (8.6) воспользуемся ниже в процессе решения задачи.

Последовательность решения задачи (8.1) – (8.5) в целом соответствует процедуре реализации принципа максимума, только лишь следует дополнительно использовать формулу (8.6) для определения времени движения объекта T. В рассматриваемой задаче, учитывая, что в функционале (8.5) подынтегральная функция $f^0(t, x, u) = 0$, а терминальный член $F(x(t)) = T$, на основе формулы (8.6) получаем

$$H(T, x^*(T), \psi(T), u^*(T)) = 1. \qquad (8.7)$$

В соответствии с постановкой задачи (8.1) – (8.5) функция Гамильтона будет иметь вид

$$H(t,x,\psi,u)=\psi_1\frac{F}{m}+\psi_2 v, \qquad (8.8)$$

где $x = (v, s)$; $u = F$.

Максимизация функции (8.8) по управлению F дает

$$F(\psi_1)=\arg\max_{|F|\le\gamma} H(t,x,\psi,u)=\begin{cases}\gamma & \psi_1>0;\\ -\gamma; & \psi_1<0;\\ \forall F\in[-\gamma;\gamma]; & \psi_1=0.\end{cases} \qquad (8.9)$$

Теперь составим систему уравнений принципа максимума:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt}&=F(\psi_1);\\ \frac{ds}{dt}&=v;\end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1(t)}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial v}=-\psi_2;\\ \frac{\partial\psi_2(t)}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial s}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

Здесь краевые условия задаются равенствами (8.3) и (8.4).

Сопряженные уравнения (8.11), как и должно быть в линейных задачах, интегрируются независимо от исходных уравнений процесса (8.10). Решение второго уравнения (8.11) сразу дает $\psi_2 = C_1$. Интегрируя затем первое уравнение (8.11), получаем

$$\psi_1 = -C_1 t + C_2, \qquad (8.12)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Из формул (8.9) и (8.12) еще до получения оптимального решения можно сделать вывод: так как линейная функция (8.12) может иметь не более одной перемены знака, то оптимальный режим управления будет заключаться не более чем в одном переключении двигателя рассматриваемого объекта.

При этом одно переключение двигателя должно быть обязательным, ибо в противном случае функция $\psi_1(t)$ не будет менять при $t \in [0; T]$ знака. Следовательно, согласно формуле (8.9) действующая сила будет максимальной по абсолютной величине и равной $\pm\gamma$, т.е. объект будет двигаться под действием максимальной силы тяги двигателя в нужном или противоположном направлении и никогда не остановится. Переключение двигателя может иметь место, но при этом величина $\psi_1(t)$ при $\forall t \in [0, T]$ не будет менять знак. Этот случай, по существу, оказывается аналогичным предыдущему, и его также следует исключить из рассмотрения. Если при изменении знака функции $\psi_1(t)$ при $t \in [0; T]$ она сначала будет отрицательной, а после переключения знака – положительной, то объект вначале поедет в противоположную от необходимого направления сторону, а затем – в нужную. Ясно, что при этом длина общего проезда увеличится, и минимальным время движения T быть не может. Остается один вариант: сначала объект разгоняется под действием силы тяги двигателя γ, а затем тормозится с силой торможения $-\gamma$ и в результате останавливается, пройдя путь s за минимальное время. Итак, выбрав на качественном уровне стратегию управления (сначала разгон, затем торможение), продолжим необходимые расчеты. В этом случае на первом этапе разгона получаем систему уравнений:

$$m\frac{dv}{dt} = \gamma; \quad \frac{ds}{dt} = v; \tag{8.13}$$

$$s(0) = 0; \; v(0) = 0; \; t \in [0; \tau], \tag{8.14}$$

где $\tau < T$ – момент переключения двигателя с разгона на торможение.

Уравнения (8.13) без труда интегрируются:

$$v(t) = \frac{\gamma}{m}t + C_3;$$

$$s(t) = \frac{\gamma}{m}\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Учитывая начальные условия (8.14), получаем $C_3 = C_4 = 0$. В результате решение дифференциальных уравнений (8.13), удовлетворяющее начальным условиям (8.14), имеет вид

$$v(t) = \frac{\gamma}{m}t; \quad s(t) = \frac{\gamma}{2m}t^2. \tag{8.15}$$

Момент $t = \tau$, соответствующий переключению двигателя с разгона на торможение, с учетом формулы (8.12), отвечает условию

$$\psi_1(\tau) = -C_1\tau + C_2 = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{C_2}{C_1}. \tag{8.16}$$

На временном отрезке $t \in (\tau; T)$ функция $\psi_1(T) < 0$, $F = -\gamma$ и уравнения (8.1) примут вид

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma, \quad \frac{ds}{dt} = v. \tag{8.17}$$

Начальным условием для уравнений (8.17) будет состояние системы в момент $t = \tau$, отвечающее формулам (8.15) и (8.16). С учетом этого для двух дифференциальных уравнений (8.17) получаем начальные условия

$$v(\tau) = \frac{\gamma}{m}\frac{C_2}{C_1}; \quad s(\tau) = \frac{\gamma}{2m}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2. \tag{8.18}$$

Интегрируя уравнения (8.17) с учетом начальных условий (8.18), получим при $t \in [\tau; T]$

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= -\frac{\gamma}{m}t + \frac{2\gamma C_2}{mC_1}; \\ s(t) &= -\frac{\gamma}{m}\left[\frac{t^2}{2} + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\right] + \frac{2\gamma C_2}{mC_1}t. \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

Чтобы определить произвольные постоянные C_1 и C_2, необходимо удовлетворить в решении (8.19) двум граничным условиям (8.4). Но при этом появится третья неизвестная величина T. Для определения трех искомых величин C_1, C_2, T воспользуемся, кроме двух соотношений (8.19), третьим условием трансверсальности (8.7).

Итак, получены три алгебраических уравнения:

$$\left.\begin{aligned} v(T) &= -\frac{\gamma}{m}T + \frac{2\gamma}{m}\frac{C_2}{C_1} = 0; \\ s(T) &= -\frac{\gamma}{m}\left[\frac{T^2}{2} + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\right] + \frac{2\gamma}{m}\frac{C_2}{C_1}T = L; \\ (-C_1 T &+ C_2)\left(-\frac{\gamma}{m}\right) + C_1 v(T) = 1. \end{aligned}\right| \tag{8.20}$$

10–2597

Решение системы уравнений (8.20) имеет следующий вид:

$$C_1 = \sqrt{\frac{m}{L\gamma}};\quad C_2 = \frac{m}{\gamma};\quad T = 2\sqrt{\frac{Lm}{\gamma}}. \tag{8.21}$$

При этом оказывается, что $T = 2\frac{C_2}{C_1}$ или $\tau = \frac{T}{2}$, т.е. переключение двигателя с разгона на торможение в оптимальном режиме должно осуществляться посередине интервала движения. Пройденный путь с учетом второй формулы (8.15) и третьей (8.21) также будет равен половине необходимого для прохождения пути:

$$s(\tau) = s\frac{T}{2} = \frac{L}{2}.$$

Итак, рассмотрен режим, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности, при этом поставленную краевую задачу (8.10), (8.11), (8.3), (8.4) удалось решить в аналитической форме.

Вследствие линейности задачи доказательства оптимальности полученного решения не требуется (*см.* разд. 6.3).

8.2. Календарное планирование поставки продукции. Дискретный вариант. Численное решение

От технической задачи перейдем к экономическим. Исследуем некоторый процесс производства и поставки продукции, не допускающей длительного хранения. Перепроизводство и необходимость хранения продукции приводят к очевидным убыткам, дефицит – возможно, даже к большим убыткам, имея в виду потерю репутации фирмы. Сопоставление этих двух обстоятельств порождает задачу сглаживания.

Итак, рассмотрим процесс производства и поставки в дискретные моменты времени $t = 0, 1,..., T$, где T – плановый период. Спрос на продукцию в эти моменты определяется по предположению заданной функцией $r(t)$.

Будем считать, что при несовпадении поставки $x(t)$ и потребности $r(t)$ имеют место потери народного хозяйства. При дефиците, когда $\xi(t) = x(t) - r(t) < 0$, потери обусловливаются неудовле-

творенностью спроса и недополучением прибыли производителем. В случае превышения поставки над спросом, когда $\xi(t) > 0$, потери вызваны необходимостью поиска новых потребителей или других условий реализации продукции.

Если предположить, что потери от превышения объема поставки продукции над спросом ($\xi > 0$) меньше, чем потери от дефицита ($\xi < 0$) при одинаковом абсолютном значении в обоих случаях разности $|\xi|$, то график функции потерь $f_1(\xi)$ будет иметь вид, показанный на рис. 8.1.

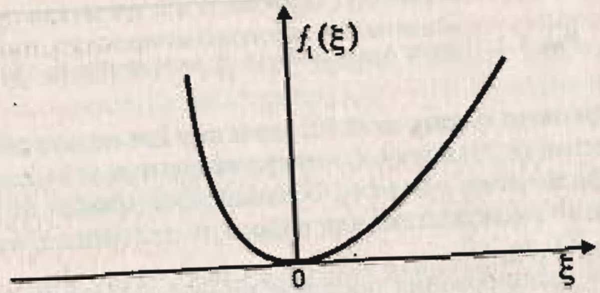

Рис. 8.1. График потерь в зависимости от дефицита ($\xi > 0$)

Функциональную зависимость (*см.* рис. 8.1) аппроксимируем следующим образом:

$$f_1(\xi) = \begin{cases} a_1\xi^2; & \xi \ge 0; \\ b_1\xi^2; & \xi \le 0; \end{cases} \quad b_1 > a_1 > 0. \tag{8.22}$$

Для производителей продукции наиболее предпочтительным является уровень постоянной интенсивности производства, т.е. когда $x(t) = \text{const}$, или, другими словами, $u(t) = 0$, где $u(t) = x(t+1) - x(t)$. И в случае увеличения выпуска продукции ($u(t) > 0$), и в случае его уменьшения ($u(t) < 0$) производители несут потери, вызванные необходимостью перестройки производства. Функция потерь производителя $f_2(u)$, по аналогии с рис. 8.1, качественно предполагается такой, как показана на рис. 8.2, или в аналитической форме:

$$f_2(u) = \begin{cases} a_2u^2; & u \ge 0; \\ b_2u^2; & u \le 0. \end{cases} \tag{8.23}$$

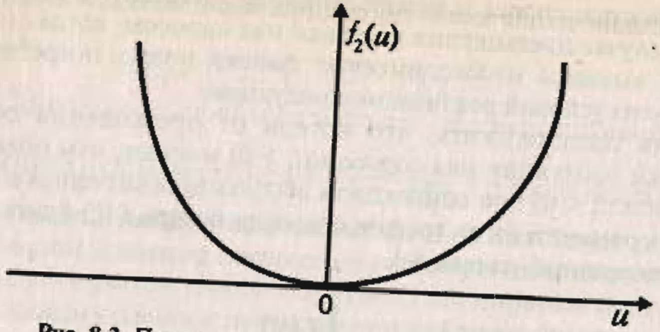

Рис. 8.2. Потери в зависимости от расширения ($u > 0$)

В отличие от формулы (8.22) здесь заранее нельзя сказать, какая из ветвей (8.23) круче. Соответственно нельзя сказать, какой из коэффициентов, a_2 или b_2, больший. Все зависит от конкретных условий производства или спроса на продукцию, ясно только, что $a_2 > 0$, $b_2 > 0$.

Задача планирования поставки продукции формулируется в данном случае следующим образом: найти функцию объема поставки продукции $x(t)$, $t=1,2,\ldots,T$, и динамику необходимого изменения этого объема, выражаемую функцией $u(t)$, $t = 1, 2,\ldots, T-1$, чтобы свести к минимуму суммарные потери потребителей от возможного несовпадения спроса и поставки, а также производителей – от возможных перестроек производства в течение планового периода T.

Это условие записывается в виде функционала

$$J=\sum_{t=0}^{T-1}[f_1(x(t)-r(t))+f_2(u(t))]+f_1(x(T)-r(T))\to \min. \qquad (8.24)$$

Терминальный член в функционале (8.24), казалось бы, по аналогии с выражением под знаком суммы должен включать слагаемое $f_2(u(T))$, чтобы отражать совокупные затраты в момент T, так же как под знаком суммы это делается в предшествующие периоды вплоть до $T-1$. Однако $u(T)$ не определено, так как согласно приведенному выше определению $u(T) = x(T+1) - x(T)$. Величина $x(T+1)$ выходит за пределы планового периода. Кроме того, как будет показано далее, $x(T+1)$ в расчетах участвовать не будет, посему и нет необходимости включать $f_2(u(T))$ в терминальный член.

Исходное количество продукции задает начальное условие

$$x(0) = x_0. \qquad (8.25)$$

Уравнение процесса запишем в канонической форме:

$$x(t+1) = x(t) + u(t). \qquad (8.26)$$

В соответствии с общей постановкой задачи ТОУ для многошаговых процессов (*см.* главу 7) соотношение (8.26) определяет в качестве состояния системы $x(t)$, в качестве управления – $u(t)$. Кроме того, очевидным является условие $x(t) \ge 0$ – поставка продукции не может быть отрицательной. Однако, для того чтобы иметь возможность решать задачу (8.24) – (8.26) методом Лагранжа, необходимо освободиться от ограничения на состояние $x(t) \ge 0$, $t=1, 2,\ldots, T$. Это можно сделать с использованием так называемого «метода штрафных функций» путем прибавления к функционалу (8.24) «штрафа» за нарушение условий $x(t) \ge 0$, т.е. дополнительно включить в функционал (8.24) сумму $M\sum_{t=1}^{T}[|x(t)|-x(t)]$, $M > 0$ – произвольное сколько угодно большое число. Действительно, при $x(t) \ge 0$ выражение в квадратных скобках под знаком суммы обращается в нуль и «штраф» не накладывается. Если же $x(t) < 0$, то выражение в квадратных скобках оказывается равным $2|x(t)| > 0$ и в функционале (8.24) появляется произвольно большой положительный прирост, что противоречит его стремлению к минимизации.

Имея в виду такую возможность ликвидации отдельных ограничений с включением в функционал «штрафа» за их нарушение, мы тем не менее оставим функционал (8.24) без изменений. Вместо явного учета ограничений $x(t) \ge 0$, $t = 1, 2,\ldots, T$, воспользуемся численным методом прямой прогонки при решении краевой задачи (*см.* разд. 1.6). При этом на каждой итерации, если окажется, что $x(t) < 0$ при первом же t, будем прекращать вычисления и переходить к новой итерации. Таким образом, мы ограничиваемся более простой постановкой задачи в отличие от использования метода «штрафных функций», а неучтенные ограничения на состояние $x(t) \ge 0$ будем учитывать непосредственно в процессе вычислений.

Задача (8.24) – (8.26) относится к классу многошаговых управляемых процессов. Необходимые условия оптимальности имеют следующий вид (*см.* формулу (7.13)):

$$\frac{\partial H(t,x^*(t),\psi(t+1),u)}{\partial u}\Big|_{u^*(t)}=0; \tag{8.27}$$

$$H(t, x, \psi, u) = \psi f(t, x, u) - f^0(t, x, u);$$

$$\psi(t)=\frac{\partial H(t,x^*,\psi(t+1),u^*(t))}{\partial x}\Big|_{x^*(t)}; \tag{8.28}$$

$$x^*(t+1)=f(t, x^*(t), u^*(t)); \tag{8.29}$$

$$x^*(0)=x_0, \quad \psi(T)=-\frac{\partial F(x)}{\partial x}\Big|_{x^*(T)}. \tag{8.30}$$

Применительно к рассматриваемой задаче (8.24) – (8.26)

$$H(t, x, \psi, u) = \psi(x + u) - f_1(x - r(t)) - f_2(u). \tag{8.31}$$

Из условия (8.27) находим

$$\psi(t+1)-\frac{df_2}{du}\Big|_{u^*(t)}=0,$$

откуда с учетом формулы (8.23) имеем

$$\psi(t+1)=\begin{cases}2a_2u^*(t); & u^*(t)\ge 0;\\ 2b_2u^*(t); & u^*(t)\le 0.\end{cases} \tag{8.32}$$

Из условия (8.28) получаем

$$\psi(t)=\psi(t+1)-\frac{df_1}{dx}\Big|_{\xi=x^*(t)-r(t)}$$

или с учетом функции (8.22) определяем

$$\psi(t)=\psi(t+1)-2\begin{cases}a_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\ge r(t),\\ b_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\le r(t).\end{cases} \tag{8.33}$$

Условие (8.29) задается непосредственно уравнением процесса (8.26). Так как $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, то знак $\psi(t + 1)$ в формуле (8.32) будет совпадать со знаком $u^*(t)$. Это позволяет, исходя из формулы (8.32), выразить

$$u^*(t)=\begin{cases}\psi(t+1)/2a_2; & \psi(t+1)\ge 0;\\ \psi(t+1)/2b_2; & \psi(t+1)\le 0.\end{cases} \tag{8.34}$$

Полученное по формуле (8.34) значение $u^*(t)$ можно подставить в уравнение процесса (8.26), после чего будем иметь

$$x^*(t)=x^*(t+1)-\begin{cases}\psi(t+1)/2a_2; & \psi(t+1)\ge 0;\\ \psi(t+1)/2b_2; & \psi(t+1)\le 0.\end{cases} \tag{8.35}$$

Если заданы значения $x^*(t+1)$, $\psi(t + 1)$, то формулы (8.33) – (8.35) позволяют определить $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\psi(t)$. Действительно, в этом случае по формуле (8.35) вычисляется $x^*(t)$, а по формуле (8.34) – $u^*(t)$. Так как $x^*(t)$ уже известно, а функция потребности в продукции $r(t)$ задана по условию задачи, то по формуле (8.33) вычисляем $\psi(t)$. Продолжая итеративный процесс, перейдем от $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\psi(t)$ к $x^*(t-1)$, $u^*(t-1)$, $\psi(t-1)$ и т.д. Расчеты будут продолжаться до тех пор, пока не будет определено значение $x^*(0)$. По условию должно быть $x^*(0) = x_0$. Каким параметром имеется возможность управлять, чтобы этого добиться? Для ответа обратимся к условию трансверсальности – второй формуле (8.30). Согласно (8.22) и с учетом того, что $\xi(T) = x(T) - r(T)$, получаем

$$\psi(T)=-\frac{df_1}{dx}\Big|_{x^*(T)}=-2\begin{cases}a_1[x^*(T)-r(T)]; & x^*(T)\ge r(T);\\ b_1[x^*(T)-r(T)]; & x^*(T)\le r(T).\end{cases} \tag{8.36}$$

Из формулы (8.36) видно, что, если бы в терминальном члене в функционале (8.24) присутствовало слагаемое $f_2(u^*(T))$, производная по x от него все равно была бы равна нулю, а больше в алгоритме терминальный член нигде не представлен.

Если, приняв $t + 1 = T$, зададим необходимым нам образом $x^*(T)$ (как именно, будет показано ниже) и по формуле (8.36) вычислим $\psi(T)$, то сможем указанным выше способом вычислить значения функций $x^*(t) = x^*(T-1)$, $u^*(t) = u^*(T-1)$, $\psi(t) = \psi(t-1)$. Продолжая итеративный процесс, дойдем до значения $x^*(0)$, которое будет зависеть от принятого значения $x^*(T)$. Последнее должно быть таким, чтобы выполнялось начальное условие (8.25).

Если бы данный вычислительный процесс можно было провести в аналитической форме, мы бы получили явно выраженную функциональную зависимость $x^*(0, x^*(T)) = x_0$. Рассматривая эту зависимость как уравнение относительно искомой величины $x^*(T)$ и решая его, нашли бы необходимое значение $x^*(T)$. Однако уже условие трансверсальности (8.36) требует числового задания $x^*(T)$, так как в зависимости от соотношения $x^*(T) \ge r(T)$ или

$x^*(T) \le r(T)$ применяется первый или второй вариант формулы (8.36). Подобная ситуация возникает и при использовании формул (8.34) и (8.35). Таким образом, с помощью метода прямой прогонки будем подбирать необходимое числовое значение величины $x^*(T)$, чтобы добиться выполнения начального условия (8.25) с заданной ε-точностью:

$$|x^* (0), x^* (T)) - x_0| \le \varepsilon. \qquad (8.37)$$

Если на некотором шаге t (при принятом значении $x^*(T)$) окажется $x^*(t) < 0$, то с учетом сказанного выше итерация прекращается, изменяется значение $x^*(T)$ и осуществляется переход к новой итерации.

Изложенный метод решения проиллюстрируем на конкретном примере.

Пример 8.2. Дано:

$$T = 5,\ x_0 = 1,\ a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_2 = b_2 = 3.$$

Значения функции $r(t)$ приведены в табл. 8.1.

Точность расчетов оценивается величиной $\varepsilon = 0{,}1$.

Таблица 8.1

t	0	1	2	3	4	5
$r(t)$	1	2	1	5	4	8

Первая итерация. Так как по смыслу задачи искомая функция $x^*(t)$ не должна сильно отличаться от заданной функции $r(t)$, примем это в качестве ориентира и зададим $x^*(t) = r(5) = 8$. В этом случае по формуле (8.36) получаем $\psi(5) = 0$. По формулам (8.33) – (8.35) определяем $x^*(4) = 8$, $u^*(4) = 0$, $\psi(4) = -8$, при этом полагаем $t + 1 = 5$, $t = 4$.

Приняв $t + 1 = 4$, $t = 3$, вычислим $x^*(3)$, $u^*(3)$, $\psi(3)$ и т.д. Выполнив все необходимые действия, получим $x^*(0) = 30{,}58$.

Вторая итерация. Полученное на первой итерации значение $x^*(0) = 30{,}58$ чрезмерно большое (необходимое по условию задачи $x^*(0) = 1$). Чтобы его уменьшить, нужно изменить ранее принятое значение $x^*(5)$. Сначала уменьшим его, а после проведения расчетов увидим, справедливым ли оказался выбор. Примем $x^*(5) = 6{,}125$. Выполняя указанным выше способом все необходимые вычисления, получим $x^*(5) = 3{,}923$. Видим, что уменьшение значения $x^*(5)$ оказалось оправданным.

Третья итерация. Продолжим уменьшать $x^*(5)$ и примем $x^*(5) = 6{,}02$. В результате расчетов находим $x^*(0) = 2{,}253$. Вновь убеждаемся, что динамика уменьшения значения $x^*(5)$ правильная, но пока еще решение с необходимой точностью не получено.

Четвертая итерация. Принимая $x^*(5) = 5{,}95$ и осуществляя расчеты, получаем $x^*(0) = 1{,}053$, что удовлетворяет заданной точности $|1 - 1{,}053| = 0{,}053 < 0{,}1$.

Полученные результаты (табл. 8.2) будем считать приближенно оптимальным решением. Функции выпуска продукции $x^*(t)$ и спроса на нее $r(t)$ представлены на графике (рис. 8.3).

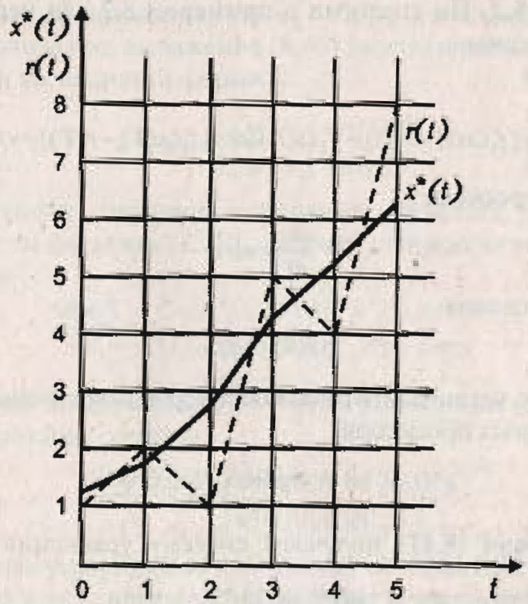

Рис. 8.3. Приближенно оптимальное построение календарного плана поставки продукции

Таблица 8.2

t	0	1	2	3	4	5
$x^*(t)$	1,053	1,783	2,365	3,405	4,58	5,95
$\psi(t)$	4,35	4,37	3,5	6,23	7,04	8,2
$u^*(t)$	0,73	0,582	1,04	1,175	1,37	1,37

Примечание. На рис. 8.3 дискретные зависимости условно показаны как непрерывные функции.

8.3. Оптимальное планирование поставки продукции. Непрерывный вариант. Численное решение

Продолжим исследование дискретной экономической задачи (*см.* разд. 8.2), поставив ее в режиме непрерывного управляемого процесса. Различия в математической модели и в применении принципа максимума Понтрягина (здесь это уже звучит точно) продемонстрируют на практике различия в технике реализации соответствующих вычислительных методов.

Пример 8.3. По аналогии с примером 8.2 для непрерывного процесса заданы:

функционал

$$J=\int_0^T [f_1(x(t)-r(t))+f_2(u(t))]dt+f_1(x(T)-r(T))\to\min, \qquad (8.38)$$

уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt}=u(t), \qquad (8.39)$$

начальное условие

$$x(0)=x_0, \qquad (8.40)$$

необходимое условие оптимальности (сравните с формулой (8.27) для дискретных процессов)

$$u^*(t,x,\psi)=\arg\max_u H(t,x,\psi,u). \qquad (8.41)$$

Из условия (8.41) получаем систему уравнений принципа максимума

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H(t,\psi(t),u^*)}{\partial x}\Big|_{u^*(t,\psi(t),x^*(t))}; \qquad (8.42)$$

$$\frac{dx}{dt}=u(t,x(t),\psi(t))\big|_{x^*(t)}; \qquad (8.43)$$

$$x^*(0)=x_0, \quad \psi(T)=-\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}\Big|_{x^*(T)}. \qquad (8.44)$$

Функция Гамильтона для задачи (8.38) – (8.40) имеет вид, несколько отличающийся от многошагового варианта (формула (8.31)):

$$H(t,x,\psi,u)=\psi u-f_1(x-r(t))-f_2(u). \qquad (8.45)$$

Так как на управление u нет ограничений, оно должно удовлетворять требованию стационарности $\frac{\partial H}{\partial u}=0$. С учетом формулы (8.23) в этом случае получаем

$$\psi-\frac{df_2}{du}=\psi-2\begin{cases}a_2u^*; & u^*\ge 0,\\ b_2u^*; & u^*\le 0,\end{cases}=0,$$

откуда

$$u^*(\psi)=\frac{1}{2}\begin{cases}\psi/a_2; & u^*\ge 0;\\ \psi/b_2; & u^*\le 0.\end{cases} \qquad (8.46)$$

Принимая во внимание, что $a_2>0$, $b_2>0$ и знаки функций $u^*(\psi)$ и ψ совпадают, выражение (8.46) можно переписать в более удобной для вычислений форме:

$$u^*(\psi)=\frac{1}{2}\begin{cases}\psi/a_2; & \psi(t)\ge 0;\\ \psi/b_2; & \psi(t)\le 0.\end{cases} \qquad (8.47)$$

Осуществляя дифференцирование функции Гамильтона (8.45) с учетом формулы (8.22), получим сопряженное уравнение (8.42) в виде

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=2\begin{cases}a_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\ge r(t);\\ b_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\le r(t).\end{cases} \qquad (8.48)$$

Уравнение процесса (8.43) с учетом выражения (8.47) преобразуем следующим образом:

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=\frac{1}{2}\begin{cases}\psi(t)/a_2; & \psi(t)\ge 0;\\ \psi(t)/b_2; & \psi(t)\le 0.\end{cases} \qquad (8.49)$$

Граничные условия (8.44) не зависят от характера процесса – дискретного или непрерывного, поэтому воспользуемся формулами (8.25) и (8.36) и получим:

$$x^*(0)=x_0; \qquad (8.50)$$

$$\psi(T)=-2\begin{cases}a_1[x^*(T)-r(T)]; & x^*(T)\ge r(T);\\ b_1[x^*(T)-r(T)]; & x^*(T)\le r(T).\end{cases} \qquad (8.51)$$

Таким образом, процесс оптимизации сводится к решению двухточечной краевой задачи (8.48) – (8.51) для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (8.48) и (8.49).

Аналитическое решение этой системы невозможно по тем же причинам, что и решение системы конечно-разностных уравнений (8.33) и (8.35).

Используя метод численного интегрирования Эйлера для систем дифференциальных уравнений (*см.* главу 1, разд. 1.6), запишем уравнения (8.48) и (8.49) в виде системы конечно-разностных уравнений с шагом численного интегрирования Δt:

$$\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}\approx 2\begin{cases} a_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\geq r(t); \\ b_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\leq r(t); \end{cases} \tag{8.52}$$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\approx \frac{1}{2}\begin{cases} \psi(t)/a_2; & \psi(t)\geq 0; \\ \psi(t)/b_2; & \psi(t)\leq 0. \end{cases} \tag{8.53}$$

Отсюда при достаточно малом значении Δt получаем:

$$\psi(t+\Delta t)=\psi(t)+2\Delta t\begin{cases} a_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\geq r(t); \\ b_1[x^*(t)-r(t)]; & x^*(t)\leq r(t); \end{cases} \tag{8.54}$$

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\frac{\Delta t}{2}\begin{cases} \psi(t)/a_2; & \psi(t)\geq 0; \\ \psi(t)/b_2; & \psi(t)\leq 0. \end{cases} \tag{8.55}$$

Соотношения(8.54) и (8.55) с точностью до перестановки в левой и правой частях отдельных слагаемых совпадают с содержательно эквивалентными формулами (8.33) и (8.35) для многошаговых процессов с той лишь разницей, что в этих формулах шаг вычислений составляет единицу, а в выражениях (8.54) и (8.55) шаг численного интегрирования равен Δt. Формулы (8.54) и (8.55) при любом сколько угодно малом, но конечном значении Δt имеют приближенный характер, вытекающий из замены производных $\frac{d\psi}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$ отношением конечных приращений $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Формулы (8.33) и (8.35) точные.

Для непрерывного варианта рассматриваемой задачи приближенный характер решения определяется численным интегрированием системы дифференциальных уравнений методом Эйлера и приближенностью выбора значения $x(T)$. Для дискретного варианта (*см.* разд. 8.2) приближенный характер решения определяется только приближенностью выбора $x(T)$.

8.4. Оптимальное потребление в однопродуктовой макроэкономической модели

Пример 8.4. Применим принцип максимума Понтрягина к экономической задаче оптимального управления, представляющей модификацию задачи, рассмотренной в главе 5.

Пусть управляемая система представляет экономику страны или региона, моделируемую с помощью однопродуктовой модели валового выпуска продукции, т.е. процесс экономического роста задается уравнением

$$\frac{dk}{dt}=-(\mu+n)k+s(1-a)f(k), \tag{8.56}$$

где k – фондовооруженность труда;
s – доля произведенного конечного продукта, идущая на накопление;
μ – коэффициент выбытия основных производственных фондов (капитала);
n – темп роста трудовых ресурсов;
a – коэффициент материальных затрат;
$f(k)$ – производственная функция в зависимости от фондовооруженности при единичных затратах труда.

Обратим внимание, что здесь по сравнению с [9, формула (6.12)] изменено обозначение доли произведенного конечного продукта $(1-u=s)$.

Так как доля произведенного продукта, идущая на потребление, равна $1-s$, то величина c потребления на единицу рабочей силы может быть выражена следующим образом:

$$c=(1-s)(1-a)f(k).$$

С учетом данного соотношения уравнение (8.56) перепишем так:

$$\frac{dk}{dt}=-(\mu+n)k+(1-a)f(k)-c. \tag{8.57}$$

Выражение (8.57) и будем рассматривать как уравнение управляемого процесса. Управлением в данном случае является потребление $c\geq 0$, ибо оно влияет на значение функционала качества управления и в уравнение процесса входит только само по себе, без производной. Чтобы сформулировать задачу оптимального управления, введем упомянутый функционал

$$J = \int_0^T e^{-\delta t} g(c)dt \to \max. \quad (8.58)$$

Здесь $g(c)$ – некоторая зависящая от величины c функция, называемая в теории потребления функцией полезности. Эта функция дает оценку «полезности», т.е. эффективности потребления при различных его значениях.

Относительно функции полезности принято считать, что они обладают следующими свойствами:

1) если $c_1 > c_2$ ($>$ – знак предпочтения), то $g(c_1) > g(c_2)$;

2) $\frac{dg}{dc} > 0$, если $c + \Delta c > c(\Delta c > 0)$; $\frac{dg}{dc} \to \infty$ при $c \to c_{\min}$;

$\frac{dg}{dc} \to 0$ при $c \to \infty$;

3) $\frac{d^2 g}{dc^2} < 0$ при $c + \Delta c > c$ $(\Delta c > 0)$.

Полезность измеряется неоднозначно – с точностью до монотонно возрастающего преобразования. Перечисленные условия характеризуют такие свойства полезности, как неотрицательное монотонное возрастание с ростом потребления (свойство 2) и происходящее при этом насыщение (свойство 3).

Будем считать, что наряду с состоянием системы в начальный момент времени $t_0 = 0$ задано и ее конечное состояние при $t = T$:

$$k(0) = k_0,\ k(T) = k_1. \quad (8.59)$$

Задача оптимального управления состоит в том, что требуется отыскать такое потребление $c(t)$, чтобы при выполнении ограничений (8.57) и (8.59) функционал (8.58) достигал максимального значения. Данная постановка является обобщением рассмотренной в главе 5 задачи, где в качестве функции полезности выступало дисконтированное среднедушевое потребление, хотя термин «полезность» не употреблялся (*см.* формулу (5.13)).

Условие максимума функции H с учетом вида функционала (8.58) примет вид

$$H = \psi[-(\mu + n)k + (1-a)f(k) - c] + e^{-\delta t} g(c) \to \max_c, \quad (8.60)$$

где ψ – сопряженная переменная, определяемая уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{dH}{dk} = [\mu + n - (1-a)\frac{df}{dk}]\psi. \quad (8.61)$$

Проанализируем гамильтониан (8.60). В нем от c зависит лишь часть слагаемых:

$$H_c = -\psi c + e^{-\delta t} g(c). \quad (8.62)$$

График функции H_c при фиксированном t, исходя из свойств 1 – 3 функции полезности $g(c)$, представлен на рис. 8.4.

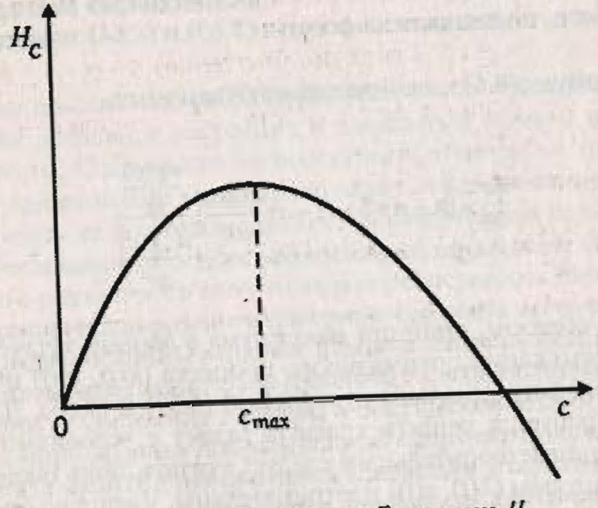

Рис. 8.4. График функции Гамильтона H_c

Нетрудно видеть, что с учетом свойства 3 функций полезности $\frac{\partial^2 H_c}{\partial c^2} = e^{-\delta t}\frac{d^2 g}{dc^2} < 0$. Следовательно, в точке обращения в нуль $\frac{\partial H_c}{\partial c}$ выражение (8.62) (а вместе с ним и (8.60)) будет достигать максимального значения.

Приравнивая нулю производную $\frac{\partial H_c}{\partial c}$, получим

$$\frac{dg}{dc} = \psi e^{\delta t}. \quad (8.63)$$

Из свойств 2 и 3 функции полезности следует, что уравнение (8.63) при положительных $\psi(t)$ имеет решение, причем единственное. На рис. 8.4 оно обозначено $c_{\max}$.

Уравнение (8.63) можно использовать для того, чтобы выразить сопряженную переменную через управление c. Находя из формулы (8.63) значение ψ и дифференцируя по t, получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = e^{-\delta t}\left(\frac{d^2 g}{dc^2}\frac{dc}{dt} - \delta\frac{dg}{dc}\right). \qquad (8.64)$$

Наконец, подставляя из формул (8.63) и (8.64) значения $\psi(t)$ и $\frac{d\psi}{dt}$ в формулу (8.61), окончательно будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = [\mu + n + \delta - (1-a)\frac{df(k)}{dk}]\frac{\frac{dg(c)}{dc}}{\frac{d^2 g(c)}{dc^2}}. \qquad (8.65)$$

Таким образом, принцип максимума в данной задаче позволяет для отыскания оптимального процесса $(k(t), c(t))$ получить систему дифференциальных уравнений (8.57) и (8.65). Для этой системы требуется решить краевую задачу с условиями (8.59). При этом удовлетворительным следует считать лишь такое решение, при котором $(k(t), c(t))$ неотрицательны. Читателю предлагается самостоятельно проанализировать возможность получения оптимальности решения, исходя из теоремы 6.2.

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. На каких этапах развития экономики Вы видите возможность применять модели магистрального типа?
2. Что понимается под магистралью в экономике?
3. Как можно доказать аналитически единственность решения о движущемся объекте?
4. Какие нужны исходные данные для задачи о календарном планировании поставки продукции? Что на практике сложнее: подготовка исходных данных или техника решения задачи?
5. Разработайте структурную схему программы для непрерывного варианта оптимального планирования поставки продукции.

ГЛАВА 9

МЕТОД ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА

9.1. Идея и основные элементы

При постановке задачи ТОУ предполагалось, что такие ее элементы, как начальное состояние и начальный момент времени, фиксированы. Однако это не всегда выполняется на практике. Поэтому при решении конкретной задачи оказывается удобным рассматривать ее в составе множества качественно однотипных задач, описываемых теми же уравнениями процесса и функционалом, но с различными значениями перечисленных параметров.

Определяя оптимальное управление сразу для всего множества таких задач, получим решение в форме синтеза, которое будет представлять зависимость качественных свойств оптимального управления от состояния системы и текущего момента времени. Имея решение задачи в подобном виде, нетрудно получить ее решение и для любых фиксированных начальных условий в обычной форме, т.е. найти оптимальное управление как функцию времени. Решение подобных задач обладает рядом преимуществ. Главное из них состоит в том, что имеется полная информация об оптимальном управлении. Если при этом реализовались заранее не известные значения состояния системы, а на практике это типичная ситуация, то значение синтеза оптимального управления позволяет принять оптимальное решение и в данной ситуации.

Однако поиск синтеза оптимального управления, т.е. совокупности качественно однородных свойств системы, – это закономерно значительно более трудоемкая процедура по сравнению с решением обычной задачи оптимального управления. С математической точки зрения отыскание синтеза оптимального управления сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения с частными производными, называемого уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана (для непрерывных процессов). Сложность численного решения этого уравнения чрезвычайно сильно возрастает с увеличением размерности решаемой задачи.

Для дискретных процессов в подобной ситуации получаем функциональное конечно-разностное уравнение, несколько менее сложное. В учебной литературе по исследованию операций это, по-видимому, породило представление о приемлемости практического применения метода Гамильтона–Якоби–Беллмана (другое название – динамическое программирование) лишь к дискретным (многошаговым) процессам. Покажем, что по крайней мере теория развита для непрерывных и дискретных управляемых систем. С вычислительной точки зрения действительно многошаговые процессы проще.

9.1.1. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана. Непрерывный вариант

Рассмотрим задачу оптимального управления, заданную следующими условиями:

$$J=\int_0^T f^0(t,x,u)dt+F(x(T))\to\min; \tag{9.1}$$

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u); \tag{9.2}$$

$$x(0)=x_0,\ u\in V^{\alpha}. \tag{9.3}$$

Как видно из постановки задачи (9.1) – (9.3), в ней отсутствуют ограничения на состояние, а множество допустимых управлений V^{α}, в отличие от принципа максимума (*см.* формулу (6.2)), не зависит от состояния x. Другими словами, множество V_x^t при всех $t\in(0;T)$ совпадает со всем пространством X, а при $t=0$ задано начальное условие – фиксированная точка x_0. Ограничения на состояние x в момент $t=T$ не заданы, т.е. рассматривается задача со свободным правым концом на траектории состояний. Как увидим далее, если в реальной задаче присутствует условие на правом конце, от него нетрудно избавиться, модифицируя терминальный член в формуле (9.1) с использованием метода «штрафных функций» (другое название M-метод [2]). В случае наличия ограничений на состояние системы x можно рискнуть, проигнорировав их и решив при этом задачу. Затем следует проверить: если полученное решение при $\forall t$ находится внутри допустимой по x области, риск оказался оправданным и полученное решение – оптимальное; если же хотя бы при одном значении t оптимальное решение без учета ограничений на x выйдет за пределы этих ограничений, настоящее оптимальное решение не получено, а затраченные усилия – напрасные.

Для получения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана воспользуемся теоремой 4.2 о достаточных условиях оптимальности, согласно которой если есть допустимый процесс $v^*=(x^*(t),u^*(t))\in M$ и непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t,x)$ такие, что при всех t, x

$$R(t,x^*(t),u^*(t))=\max_{(x,u)\in V^t} R(t,x,u),\quad \forall t\in[0;T];$$

$$\Phi(x^*(T))=\min_{x\in V_x^t}\Phi(x)\quad \text{при } t=T,$$

то процесс $(x^*(t),u^*(t))$ оптимален, т.е.

$$J(x^*,u^*)=\inf_{v\in M}J(x,u).$$

Известно, что

$$R(t,x,u)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,u)-f^0(t,x,u)+\frac{\partial\varphi(t,x)}{dt};$$

$$\Phi(x)=\varphi(T,x)+F(x).$$

Введем функцию

$$P(t,x)=\max_u R(t,x,u).$$

Предположим, что удалось так определить функцию $\varphi(t,x)$, что

$$P(t,x)=c(t); \tag{9.4}$$

$$\Phi(x)=c_1. \tag{9.5}$$

Так как функция $\varphi(t,x)$ задана, следовательно, задана и функция $R(t,x,u)$, максимизируя которую по управлению $u\in V^{\alpha}$, найдем $u^*(t,x)$:

$$u^*(t,x)=\arg\max_{u\in V^{\alpha}}R(t,x,u)\quad \forall t.$$

Как будет показано ниже, $u^*(t,x)$ является синтезом оптимального управления, решением рассматриваемой оптимизационной задачи.

Для определения оптимального состояния – вектора $x^*(t)$ подставим синтез оптимальных управлений $u^*(t, x)$ в уравнение процесса:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u^*(t,x)), \quad x(0) = x_0. \tag{9.6}$$

Итак, определение оптимального состояния $x^*(t)$ сводится к решению задачи Коши (9.6) для уравнения процесса, замкнутого синтезом оптимальных управлений с начальными условиями $x(0) = x_0$. В отличие от синтеза оптимального управления $u^*(t, x)$ функцию

$$u(t) = u^*(t, x)|_{x^*(t)} \tag{9.7}$$

называют оптимальной программой управления. Данное определение отражает тот факт, что оптимальная программа управления, определяемая формулой (9.7), отвечает уже не произвольному состоянию x, а конкретному оптимальному $x^*(t)$. Здесь можно провести такую аналогию: синтез оптимальных управлений – это, например, Конституция страны, которая в целом предопределяет общественное поведение ее граждан, а оптимальная программа управления – это обусловленное законом наиболее целесообразное поведение человека в конкретных условиях.

Изложенный метод нахождения процесса $(x^*(t), u^*(t))$ при априорных ограничениях, наложенных на функцию $\varphi(t, x)$, называется методом Гамильтона–Якоби–Беллмана. В этом случае процесс $(x^*(t), u^*(t))$ является оптимальным. Для доказательства данного положения покажем, что рассматриваемый процесс допустим и удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 4.2. Это означает, что состояние $x^*(t)$ и управление $u^*(t)$ удовлетворяют уравнению процесса (9.2), начальному условию и априорным ограничениям (9.3).

Нахождение процесса $(x^*(t), u^*(t))$ мы начинали с определения синтеза оптимальных управлений $u^*(t, x)$. В свою очередь, $u^*(t, x)$ находили из условия 1 теоремы 4.2, т.е. из условия

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u \in V^\alpha} R(t,x,u), \quad \forall t.$$

А это значит, что управление $u^*(t, x)$ за пределы области V^α не выходит и, следовательно, допустимо. Состояние $x^*(t)$ находится подстановкой $u^*(t, x)$ в уравнение процесса (9.2). Следовательно,

пары функций $(x^*(t), u^*(t))$ удовлетворяют уравнению процесса. Кроме того, состояние $x^*(t)$ удовлетворяет начальным условиям. Область V_x^t совпадает со всем пространством X.

Итак, процесс $(x^*(t), u^*(t))$ допустим, так как все условия его принадлежности области M выполнены.

Покажем, что при наложении на функцию $\varphi(t, x)$ формальных требований условия 1 и 2 теоремы 4.2 выполнены. Для этого представим максимум по совокупности переменных как последовательность максимумов по отдельным переменным:

$$\max_{(x,u) \in V^t} R(t,x,u) = \max_x [\max_{u \in V^\alpha} R(t,x,u)] = \max_x P(t,x).$$

Функция $u^*(t, x)$ обеспечивает $\max_{u \in V^\alpha} R(t,x,u)$, а $P(t, x)$ согласно формуле (9.4) не зависит от x. Это обеспечивает выполнение условия $\max_{(x,u)} R(t,x^*(t))$, т.е. условия 1 теоремы 4.2. Для выполнения условия 2 теоремы 4.2 рассмотрим соотношение (9.5), выполненное согласно заданию функции $\varphi(t, x)$.

Так как функция $\Phi(x)$ постоянна, то ее минимум достигается при любом значении аргумента, в частности при $x^*(t)$. Следовательно, условие 2 выполнено.

Таким образом, выбранная функция $\varphi(t, x)$ и построенный процесс $(x^*(t), u^*(t))$ допустимы и удовлетворяют теореме 4.2. Следовательно, процесс $(x^*(t), u^*(t))$ оптимален.

Еще раз отметим, что метод Гамильтона–Якоби–Беллмана применим только к задачам оптимального управления, в которых отсутствуют ограничения на состояние, в том числе и при $t = T$. Высказанная в начале настоящего раздела реплика относительно возможного риска, разумеется, к строгим методам последующего изложения не относится.

9.1.2. Синтез оптимального управления

Остановимся подробнее на введенном выше очень важном понятии синтеза оптимальных управлений. Вновь обратимся к задаче (9.1) – (9.3). В ней ограничения на состояние x отсутствуют. Множество M допустимых процессов — это множество пар вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих условиям задачи и накладывающих на них соответствующие ограничения. Необходимо подчеркнуть, что множество M зависит от t_0 и x_0, т.е. $M = M(t_0, x_0)$. При изменении аргументов t_0 и x_0 на t_0^*, x_0^* получим новое допустимое множество $M(t_0, x_0)$. Если решать задачу при различных параметрах (t_0, x_0), оставляя без изменения другие условия задачи, то получим семейство оптимизационных задач, которое назовем A.

Зададим управление в виде функции

$$u = u^*(t, x),\ u^*(t, x) \in V^{\alpha}. \tag{9.8}$$

Задав начальное состояние (t_0, x_0) и подставляя выражение (9.8) в уравнение (9.2), получим, решая задачу Коши (*см.* формулу (1.1)), вектор состояния $x^*(t, t_0, x_0)$, отвечающий заданному закону управления. Это решение является допустимым, так как отсутствует ограничение на состояние системы. Подставляя его в выражение (9.8), получим соответствующее ему управление в виде функции времени:

$$u^*(t, t_0, x_0) = u^*(t, x)|_{x = x^*(t, t_0, x_0)},$$

т.е. значение u вдоль траектории – функции состояния. Как уже говорилось, вектор-функция $u^*(t, x)$ является синтезом оптимального управления, если процесс

$$v^*(t, t_0, x_0) = (x^*(t, t_0, x_0), u^*(t, t_0, x_0))$$

есть решение задачи A для любых t_0, x_0. На формальном уровне это означает, что, как только получена вектор-функция $u^*(t, x)$ и подставлена в уравнение процесса при любых t_0, x_0, найденный процесс становится оптимальным.

Таким образом, зная оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t, x)$, получаем решение не одной оптимизационной задачи, а семейства задач A при различных начальных условиях, наложенных на время и состояние системы, (t_0, x_0). В этом состоит отличие от метода Лагранжа–Понтрягина, где оптимальное решение отыскивается не в форме синтеза оптимального управления $u^*(t, x)$, а в виде программы $u^*(t)$.

В теории автоматического регулирования $u(t, x)$ называют управлением с обратной связью, а $u(t)$ – программой управления. На содержательном уровне эти вопросы более подробно рассматривались в разд. 2.2.

В экономических задачах программа управления $u(t)$ соответствует принятию решений на перспективу, а синтеза $u(t, x)$ – регулированию (отслеживанию плана и принятию оперативных решений). Синтез оптимальных управлений $u^*(t, x)$ в случае отклонения состояния системы от планового значения дает оптимальное решение и при новом ее состоянии, характеризующемся начальным уровнем x_0. Программное же управление, не зависящее от текущего состояния x, при этом теряет свойство оптимальности.

9.2. Алгоритм Гамильтона–Якоби–Беллмана (для непрерывных процессов)

В разд. 9.1 решение задачи (9.1) – (9.3) методом Гамильтона–Якоби–Беллмана просмотрено практически до конца. Осталось лишь ответить на вопрос, как определять функцию $\varphi(t, x)$, и теория будет завершена.

Итак, начинаем с отыскания функции $\varphi(t, x)$, которая должна удовлетворять двум априорным требованиям: (9.4) и (9.5).

Функцию

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} f(t,x,u) - f^0(t,x,u) + \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

учитывая, что правая часть этого равенства согласно формуле (6.10) равна

$$H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u) + \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

перепишем в виде

$$R(t,x,u) = H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Так как $\varphi(t, x)$ не зависит от u, то выражение

$$P(t,x) = \max_{u\in V^{\alpha}} R(t,x,u)$$

примет вид

$$P(t,x) = \max_{u\in V^{\alpha}} H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{9.9}$$

т.е. максимизация касается только гамильтониана $H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u)$.

Таким образом, равенство (9.9) с учетом (9.4) примет вид

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=-\max_{u\in V^{\alpha}}H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u)+c(t). \qquad (9.10)$$

Уравнение (9.10) называется уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. При $c(t) = 0$ оно называется уравнением Беллмана:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=-\max_{u\in V^{\alpha}}H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u). \qquad (9.11)$$

Уравнения (9.10) и (9.11) являются уравнениями в частных производных первого порядка, разрешенными относительно $\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}$. Из формулы (6.7) с учетом условия (9.5) получаем для уравнения Беллмана (9.11) граничное условие

$$\varphi(T, x) = -F(x) + c_1. \qquad (9.12)$$

Таким образом, чтобы найти функцию $\varphi(t, x)$, удовлетворяющую априорным ограничениям (9.4) и (9.5), нужно решить уравнение в частных производных (9.10) с граничным условием (9.12). Подобная задача называется задачей Коши в отличие от краевой, когда часть граничных условий задается на одном конце, а часть – на другом. Поскольку на функцию $c(t)$ и на константу c_1 никаких дополнительных условий не накладывается, их обе можно принимать равными нулю.

Принципиальная схема решения задачи Коши для уравнений в частных производных представлена на рис. 9.1.

При $t = T$ функция $\varphi(t, x)$ задана: $\varphi(T, x) = -F(x)$. Учитывая сказанное выше, принимаем $c_1 = 0$.

Через точки $t_1, t_2,..., T-1$ проводим сечения. Обозначим $\varphi(t_k, x) = \varphi_k(x)$ и будем искать

$$\varphi_{k-1}(x)=\varphi_k(x)-\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}(t_k-t_{k-1}).$$

Учитывая уравнение (9.11) при $c(t) = 0$, получим, обозначая $N=\max_{u\in V^{\alpha}}H(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},u)$,

$$\varphi_{k-1}(x) = \varphi_k(x) + N(t_k - t_{k-1}).$$

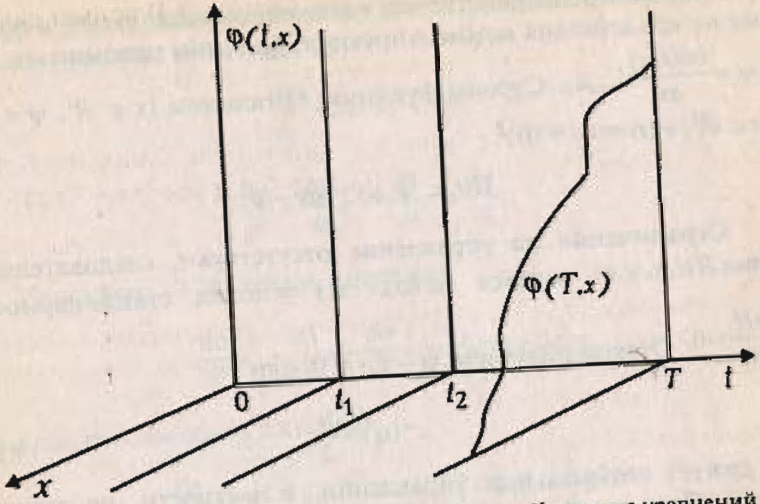

Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация задачи Коши для уравнений в частных производных

Это соотношение позволяет вычислить $\varphi_{k-1}(x)$, зная $\varphi_k(x)$. При $t = T$ значение φ известно.

Найденная таким образом функция $\varphi(t, x)$ и соответствующая ей функция $u^*(t, x)$ уже решают поставленную задачу. Остается только подставить в уравнение процесса (9.2) $u^*(t, x)$ и проинтегрировать его при заданных начальных условиях (9.3).

В целом изложенный выше метод численного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана весьма трудоемкий и реализуем при достаточно малом шаге интегрирования только с помощью ЭВМ. Тем не менее для отдельных задач специальной структуры удается получить точное решение в аналитической форме, в чем мы убедимся на предлагаемом ниже примере.

Пример 9.1. Найти решение задачи оптимального управления. Задан функционал

$$J=\int_0^T u^2dt+\lambda x^2(T)\to\min.$$

Уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt}=u;\quad x(0)=x_0;\quad \lambda>0.$$

Искомое решение отвечает изложенной выше схеме, и поэтому не все действия комментируются, при этом напоминаем, что $\psi = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\big|_{x=x^*(t)}$. Строим функцию Гамильтона ($x \in R^1$, $\psi \in R^1$, $u \in R^1$, $c(t) = c_1 = 0$):

$$H(t, x, \psi, u) = \psi u - u^2.$$

Ограничения на управление отсутствуют, следовательно, $\max\limits_u H(t,x,\psi,u)$ ищется исходя из условия стационарности $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Отсюда получаем: $\psi - 2u = 0$, или

$$u^*(\psi) = \frac{\psi}{2} \tag{9.13}$$

– синтез оптимальных управлений, в частности, не зависит от x. При этом значении $u^*(\psi)$ действительно достигается $\max\limits_u H(t,x,\psi,u)$, так как $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$. Введя обозначение $\max H(t, x, \psi, u^*) = N(t, x, \psi)$, вычисляем

$$N(t,x,\psi) = \frac{\psi^2}{2} - \frac{\psi^2}{4} = \frac{\psi^2}{4}.$$

Уравнение Беллмана с краевым условием согласно формулам (9.11) и (9.12) имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right]^2; \tag{9.14}$$

$$\varphi(T, x) = -\lambda x^2. \tag{9.15}$$

Поскольку функция $\varphi(T, x)$ относительно x – многочлен второй степени, попытаемся отыскать в такой же форме функцию $\varphi(t, x)$:

$$\varphi(t, x) = \alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \sigma(t). \tag{9.16}$$

Здесь функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\sigma(t)$ подлежат определению.

Учитывая краевое условие (9.15), находим

$$\alpha(T) = -\lambda; \quad \beta(T) = \sigma(T) = 0. \tag{9.17}$$

Для подстановки условия (9.15) в выражение (9.14) потребуются следующие соотношения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\alpha(t)x + \beta(t);$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\alpha}{dt}x^2 + \frac{d\beta}{dt}x + \frac{d\sigma}{dt}.$$

Уравнение (9.14) теперь имеет вид

$$\frac{d\alpha}{dt}x^2 + \frac{d\beta}{dt}x + \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{4}(2\alpha x + \beta)^2$$

или после возведения в квадрат

$$\frac{d\alpha}{dt}x^2 + \frac{d\beta}{dt}x + \frac{d\sigma}{dt} = -\alpha^2 x^2 - \alpha\beta x - \frac{1}{4}\beta^2. \tag{9.18}$$

Уравнение (9.18) должно удовлетворяться для любых x. Поэтому, приравнивая в соотношении (9.18) слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha^2; \quad \frac{d\beta}{dt} = -\alpha\beta; \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{4}\beta^2. \tag{9.19}$$

Таким образом, для определения функции $\varphi(t, x)$ получена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (9.19) с конечными условиями (9.17). Это – задача Коши. В системе (9.19) первое уравнение решается независимо от второго и третьего, это уравнение с разделяющимися переменными (*см.* разд. 1.4). С учетом первого конечного условия (9.17) его решение имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{1}{t - T - \frac{1}{\lambda}}.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что второе и третье уравнения системы (9.19) с нулевыми конечными условиями (второе соотношение (9.17)) имеют тривиальные решения $\beta(t) = \sigma(t) = 0$.

Окончательное решение уравнения Беллмана (9.14) с краевым условием (9.15) примет вид

$$\varphi(t,x)=\frac{x^2}{t-T-\frac{1}{\lambda}}.$$

Синтез оптимальных управлений определяется по формуле (9.13):

$$u^*(t,x)=\frac{\psi}{2}\Big|_{\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{x}{t-T-\frac{1}{\lambda}},$$

что позволяет находить оптимальное управление в каждый момент t при каждом значении состояния x.

Оптимальное состояние системы может быть найдено как решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t-T-\frac{1}{\lambda}}; \qquad (9.20)$$

$$x(0)=x_0. \qquad (9.21)$$

Решая дифференциальное уравнение (9.20) с разделяющимися переменными и удовлетворяя начальному условию (9.21), получим

$$x^*(t)=-\frac{x_0}{T+\frac{1}{\lambda}}\left(t-T-\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (9.22)$$

Программа оптимального управления

$$u^*(t)=u^*(t,x)\big|_{x^*(t)}=-\frac{x_0}{T+\frac{1}{\lambda}}. \qquad (9.23)$$

Как видно из итоговых результатов решения задачи – формул (9.22) и (9.23), оптимальное состояние системы $x^*(t)$ является линейной функцией времени t, а оптимальное управление $u^*(t)$ – постоянная величина.

В данном примере решение уравнения Беллмана (9.14) с краевым условием (9.15) оказалось легко реализуемой процедурой, не выходящей за рамки обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. В общем случае, как отмечалось выше (*см.* рис. 9.1), это довольно трудная задача.

При изучении метода и алгоритма Гамильтона–Якоби–Беллмана для непрерывных процессов был приведен условный пример 9.1, не относящийся к сфере экономических приложений. То же будет и с задачами для самостоятельной работы. Причина в том, что в непрерывном времени рассматривается обычно относительно небольшой класс задач в основном среднесрочного или долгосрочного прогнозирования, для которых разработаны более простые методы. Применительно к постановкам таких задач эти методы одновременно и более естественны. Примером тому служит представленная в главе 5 однопродуктовая макроэкономическая модель оптимального развития экономики, лежащая в основе так называемого магистрального ее развития. Тем не менее для полноты методологии раскрытия идеи о достаточных условиях оптимальности и ее практической работоспособности, теоретической полноты мы включаем в настоящий курс метод Гамильтона–Якоби–Беллмана в обоих вариантах – для непрерывных и дискретных процессов. В последнем случае известны многочисленные практические задачи при исследовании операций в экономике и других приложениях. Одна из них – об оптимальном распределении инвестиций между проектами – будет предметом нашего последующего изложения.

9.3. Метод Гамильтона–Якоби–Беллмана. Многошаговый вариант

Рассмотрим следующую задачу:

$$J=\sum_{t=0}^{T-1} f^0(t,x(t),u(t))+F(x(T))\to\min;$$

$$x(t+1)=f(t,x(t),u(t)),\ t=0,1,\ldots,T-1;$$

$$u(t)\in V^m,$$

$$x(0)=x_0.$$

В данной постановке задачи, так же как и для непрерывного варианта (*см.* разд. 9.1), отсутствуют ограничения на состояние, в том числе не задано и $x(T)$.

Воспользуемся теоремой о достаточных условиях оптимальности в многошаговом варианте, согласно которой если есть процесс $(x^*(t),u^*(t)) \in M$ и некоторая функция $\varphi(t, x)$ такие, что выполняются условия

1) $R(t,x^*u^*) = \max\limits_{(x,u)\in V_t^x} R(t,x,x), \quad t = 0,1,...T-1;$

$$R(t, x, u) = \varphi[t+1, f(t, x, u)] - \varphi(t, x) - f^0(t, x, u). \qquad (9.24)$$

2) $\Phi(x^*(T)) = \min\limits_{x\in V_t^x} \Phi(x), \quad t = T;$

$$\Phi(x) = F(x) + \varphi(T, x), \qquad (9.25)$$

то пара $(x^*(t),u^*(t))$ – оптимальный процесс.

Введем в рассмотрение функцию $P(t, x)$:

$$P(t,x) = \max_{u\in V^\alpha} R(t,x,u) = R(t,x,u^*(t,x)). \qquad (9.26)$$

Подставляя в формулу (9.26) функцию $R(t, x, u)$, согласно условию (9.24) получим

$$P(t,x) = \max_{u\in V^\alpha}[\varphi(t+1, f(t,x,u)) - f^0(t,x,u)] - \varphi(t,x).$$

Здесь функция $\varphi(t, x)$ вынесена из-под знака max, так как она не зависит от u. Будем стремиться задавать $\varphi(t, x)$ так, чтобы:

1) при всех $t = 1, 2,..., T-1$ функция $P(t, x)$ не зависела от x:

$$P(t, x) = c(t); \qquad (9.27)$$

2) при $t = T$

$$\Phi(x) = c_1, \qquad (9.28)$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Предположим, что функция $\varphi(t, x)$ задана так, что она удовлетворяет этим условиям. Тогда этой функции отвечает некоторое управление $u^*(t, x)$. Введем в рассмотрение вектор состояния $x^*(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$x(t+1) = f(t, x(t), u^*(t, x(t))) \qquad (9.29)$$

при начальном условии $x(0) = x_0$. Определим

$$u^*(t) = u^*(t, x^*(t)). \qquad (9.30)$$

Рассмотрим теорему.

Теорема 9.1. Пусть функция $\varphi(t, x)$ обеспечивает выполнение условий (9.27) и (9.28), а функция $u^*(t, x)$ соответствует данной функции $\varphi(t, x)$ на основании условия

$$P(t,x,u^*(t,x)) = \max_{u\in V^\alpha} R(t,x,u) = P(t,x).$$

Функции $x^*(t)$, $u^*(t)$ заданы условиями (9.29) и (9.30). Тогда пара вектор-функций $x^*(t)$, $u^*(t)$ является оптимальным процессом.

Доказательство. Условие (7.6) (*см.* разд. 7.1) теоремы 4.2 о достаточных условиях оптимальности выполняется тривиально благодаря заданию $\Phi(x)$ (*см.* формулу (9.28)).

Функция $u^*(t, x)$ строится так, что при каждом фиксированном наборе аргументов t, x она обеспечивает $\max\limits_{u\in V^\alpha} R(t,x,u)$. Функция $\varphi(t, x)$ согласно условию (9.27) выбрана так, что $\max\limits_{u\in V^\alpha} R = P(t,x)$ не зависит от x. При таком выборе $\varphi(t, x)$ значение x, в том числе и значение $x^*(t)$, в паре с $u^*(t)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 4.2 о достаточных условиях оптимальности для многошаговых процессов (*см.* формулу (7.5)). Согласно условию $u \in V^\alpha$, использованному при построении $u(t, x)$, и условию (9.29) пара $(x^*(t), u^*(t))$ допустима.

Проведем анализ условий (9.27) и (9.28), которым должна удовлетворять функция $\varphi(t, x)$.

Так как имеет место равенство (9.25), то, учитывая условие (9.28), получаем

$$\varphi(T, x) = c_1 - F(x), \qquad (9.31)$$

т.е. функция $\varphi(t, x)$ в момент $t = T$ должна с точностью до постоянного слагаемого совпадать с функцией $F(x)$.

С учетом условия (9.29)

$$P(t,x) = \max_{u\in V^\alpha}\{\varphi(t+1, f(t,x,u)) - f^0(t,x,u)\} - \varphi(t,x) = c(t),$$

откуда

$$\varphi(t,x) = \max_{u\in V^\alpha}\{\varphi(t+1, f(t,x,u)) - f^0(t,x,u)\} + c(t). \qquad (9.32)$$

Полученное выражение (9.32) является дискретным аналогом уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для непрерывных процессов (9.10). Здесь мы имеем не дифференциальное уравнение в частных производных, а более простое функциональное конечно-разностное уравнение.

Поскольку второе условие в теоремах о достаточных условиях оптимальности для непрерывных и многошаговых процессов одинаково, то и краевое условие для функционального уравнения (9.32) будет таким же, как для непрерывных процессов:

$$\varphi(T, x) = -F(x) + c_1. \qquad (9.33)$$

Решая функциональное уравнение (9.32) совместно с краевым условием (9.33), определим синтез оптимальных управлений $u^*(t, x)$. Подстановка $u^*(t, x)$ в уравнение процесса (9.29) при заданных начальных условиях $x(0) = x_0$ дает возможность определить вектор оптимального состояния $x^*(t)$. Теорема доказана. Подробнее техника расчетов будет уточнена ниже.

Пример 9.2. Решить задачу оптимального управления методом динамического программирования

$$\sum_{t=0}^{3}[x(t)+u^2(t)]+x(4)\to\min$$

при ограничениях

$$x(t+1) = x(t) - u(t);$$

$$u(t) \in [1; 2]$$

и начальном условии

$$x(0) = 0.$$

В соответствии с приведенной схемой решения запишем уравнение Беллмана с краевым условием (при отсутствии дополнительных требований к функции $c(t)$ и константе c_1 они принимаются равными нулю):

$$\varphi(t,x)=\max_{u\in[1;2]}[\varphi(t+1,x-u)-x-u^2]; \quad t=0,1,2,3,$$

$$\varphi(4, x) = -x.$$

Поскольку уравнение Беллмана связывает значение функции φ в момент времени t с ее значением в последующий момент времени $t+1$, а значение этой функции в момент $T = 4$ известно,

можно построить функцию $\varphi(t, x)$, описывая ее значение «справа налево» – от момента времени $t = T = 4$ до момента $t = 0$.

Первая итерация ($t = 3$). В этом случае уравнение Беллмана имеет вид

$$\varphi(3,x)=\max_{u\in[1;2]}[\varphi(4,x-u)-x-u^2].$$

Пользуясь краевым условием $\varphi(4, x) = -x$, функцию Беллмана можно переписать:

$$\varphi(3,x)=\max_{u\in[1;2]}(-x+u-x-u^2)=\max_{u\in[1;2]}(-2x+u-u^2).$$

Максимизируя функцию в скобках по $u \in [1; 2]$ (см. разд. 1.2), получим $u^* = 1$. Подставляем полученное значение $u^* = 1$ в выражение для $\varphi(3, x)$ и получаем

$$\varphi(3, x) = -2x.$$

На второй и последующих итерациях порядок вычислений повторяется, только изменяется значение t в функции $\varphi(t, x)$.

Вторая итерация ($t = 2$):

$$\varphi(2,x)=\max_{u\in[1;2]}[\varphi(3,x-u)-x-u^2]=\max_{u\in[1;2]}(-2x+2u-u^2)=$$

$$=\max_{u\in[1;2]}(-3x+2u-u^2).$$

Максимизация по u последнего выражения приводит к тому, что u^* совпадает с левой границей: $u^* = 1$, при этом

$$\varphi(2, x) = -3x + 1.$$

Третья итерация ($t = 1$):

$$\varphi(1,x)=\max_{u\in[1;2]}[\varphi(2,x-u)-x-u^2]=\max_{u\in[1;2]}(-3x+3u+1-x-u^2)=$$

$$=\max_{u\in[1;2]}(-4x+3u-u^2+1).$$

В результате максимизации получаем $u^*=\frac{3}{2}$, откуда

$$\varphi(1,x)=-4x+\frac{9}{2}-\frac{9}{4}+1=-4x+\frac{13}{4}.$$

Четвертая итерация ($t = 0$):

$$\varphi(0,x) = \max_{u\in[1;2]}[\varphi(1,x-u) - x - u^2] = \max_{u\in[1;2]}(-4x + 4u - x - u^2 + \frac{13}{4}) =$$

$$= \max_{u\in[1;2]}(-5x + 4u - u^2 + \frac{13}{4}).$$

Максимизация дает $u^* = 2$.

Итак, полностью определен синтез оптимального управления $u^*(t, x)$, который в данном примере, не завися от состояния x, сразу дает программу управления (табл. 9.1).

Таблица 9.1

t	0	1	2	3
$u^*(t)$	2	$\frac{3}{2}$	1	1

Зная динамику $u^*(t)$ и начальное значение $x(0) = 0$, можно определить траекторию – функцию состояния по разностному уравнению процесса $x(t) = x(t+1) + u^*(t)$, табл. 9.2.

Таблица 9.2

t	0	1	2	3	4
$x^*(t)$	0	-2	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$

Еще раз обратим внимание на то, что, в отличие от метода Лагранжа–Понтрягина, в методе Гамильтона–Якоби–Беллмана (динамического программирования) искомый процесс оптимальный без дополнительного обоснования, поскольку он адекватен теоремам о достаточных условиях оптимальности. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в разд. 9.5.

9.4. Оптимальное распределение инвестиций между проектами методом динамического программирования

Для задачи управления экономическими проектами, которую будем рассматривать ниже, метод динамического программирования Гамильтона–Якоби–Беллмана не является наиболее подходящим или единственно возможным. Наличие лишь одного линейного ограничения в математической модели, которое, как увидим, имеет место (не считая тривиальных ограничений на неотрицательность переменных), выдвигает практически очевидную возможность применения, например, метода множителей Лагранжа или любого другого метода математического программирования [2]. Метод Гамильтона–Якоби–Беллмана в данном случае играет иллюстративную роль, и мы, воспринимая это как факт, не будем обсуждать его целесообразность.

Итак, предположим, что руководство фирмы ставит задачу распределения некоторого фиксированного инвестиционного фонда между n направлениями, так чтобы максимизировать совокупную эффективность реализации этих инвестиций для фирмы (например, закупки нового оборудования разной эффективности у n поставщиков, i – индекс поставщика).

Обозначим через $\psi_i(y_i)$ эффективность реализации для i-го инвестиционного проекта суммы y_i. Например, это ожидаемое увеличение выпуска фирмой (в стоимостном или натуральном выражении) продукции при выделении суммы y_i в i-е направление. Делаем естественное предположение, что все функции $\psi_i(y_i)$ возрастающие, т.е. $\frac{d\psi_i}{dy_i} > 0$ для $\forall i = 1, 2,..., n$ при $0 \le y_i \le A$. Другими словами, при увеличении инвестиций в возможных пределах эффективность от их реализации возрастает. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод, что весь инвестиционный фонд A в оптимальном плане распределения инвестиций между направлениями должен быть исчерпан.

План распределения инвестиций между направлениями отвечает следующей математической модели:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(y_i) \to \max \tag{9.34}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = A; \tag{9.35}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1, 2,..., n. \tag{9.36}$$

Модель (9.34) – (9.36) в общем случае (при нелинейных функциях $\psi_i(y_i)$) представляет нелинейную задачу математического программирования. Функционал (9.34) предполагается аддитивным, т.е. эффективность каждого из инвестиционных вариантов зависит только от вложенных в него средств и не зависит от других распределений. В силу указанных выше причин сведем задачу к многошаговому управляемому процессу и применим для оптимизации метод динамического программирования. Для случая $n = 3$ полностью проведем вычислительный процесс.

Чтобы свести модель (9.34) – (9.36) к форме многошагового процесса (*см.* разд. 9.3), введем обозначения:

$$n = T,\ t = i - 1,\ y_i = u(t),\quad \psi_i(y_i) = -f^0(t, u(t)),$$

$$i = 1, 2,..., n,\ t = 0, 1,..., T-1. \qquad (9.37)$$

С учетом обозначений (9.37) модель (9.34) – (9.36) примет вид:

$$J = \sum_{i=1}^{T-1} f^0(t,u(t)) \to \min; \qquad (9.38)$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} u(t) = A; \qquad (9.39)$$

$$u(t) \geq 0,\ t = 0, 1,..., T-1. \qquad (9.40)$$

Покажем, что задача оптимизации для модели (9.38) – (9.40) может быть сведена к задаче, рассмотренной в разд. 9.3.

Для этого введем функцию $x(t)$, которую определим следующим образом:

$$x(0) = 0;\ x(t+1) = x(t) + u(t),\ t = 0, 1,..., T-1.$$

При этом ограничение (9.39) примет вид $x(T) = A$. Освободимся от него, введя в функционал (9.34) штрафной терминальный член $M\,[x(t) - A]^2$, где $M > 0$ – произвольно большое число. Получаем окончательную форму необходимой модели:

$$\left.\begin{array}{l} J = \sum\limits_{t=0}^{T-1} f^0(t,u(t)) + M[x(T)-A]^2 \to \min; \\ x(t+1) = x(t) + u(t); \\ u(t) \geq 0;\quad t = 0,1,...,T-1;\quad x(0) = 0. \end{array}\right\} \qquad (9.41)$$

Введение в функционал в качестве терминального члена положительного слагаемого, отвечающего квадрату невязки между

$x(T)$ и A с произвольным положительным сколько угодно большим множителем M, – это вынужденное действие, обусловленное необходимостью отсутствия конечного условия $x(T) = A$.

Модель (9.41) отвечает канонической форме многошагового управляемого процесса. Здесь $x(t)$ – состояние системы, $u(t)$ – управление. Содержательный смысл этих показателей будет ясен в результате анализа полученных и представленных ниже оптимальных решений.

Для модели (9.41) запишем уравнение Беллмана с краевым условием:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(t,x) = \max\limits_{u\geq 0}[\varphi(t+1,x+u) - f^0(t,u)]; \\ t = 0,1,...,T-1; \\ \varphi(T,x) = -M(x-A)^2, \end{array}\right\} \qquad (9.42)$$

откуда оптимальное управление в форме синтеза

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u\geq 0}[\varphi(t+1,x+u) - f^0(t,u)]. \qquad (9.43)$$

Вычисления проведем для случая $n = 3$, $A = 10$.

Примем

$$\psi_1(y_1) = 16y_1 - 0{,}4y_1^2;$$

$$\psi_2(y_2) = 18y_2 - 0{,}6y_2^2;$$

$$\psi_3(y_3) = 25y_3 - 0{,}7y_3^2.$$

С учетом обозначений (9.37) получаем

$$T = n = 3;$$

$$f^0(t,u) = \begin{cases} -16u + 0{,}4u^2, t = 0; \\ -18u + 0{,}6u^2, t = 1; \\ -25u + 0{,}7u^2, t = 2. \end{cases} \qquad (9.44)$$

Далее следуют вычислительные процедуры, принципиально подобные итеративному процессу в примере 9.2.

Первая итерация ($t+1 = 3$, $t = 2$).

В соответствии с условиями (9.42) и (9.44) имеем

$$\varphi(2,x) = \max_{u\geq 0}[-M(x+u-10)^2 + 25u - 0{,}7u^2].$$

Так как $M > 0$ – произвольное сколько угодно большое число, $u^*(2, x)$ должно обратить множитель при M в нуль,т.е.

$$u^*(2, x) = 10 - x. \qquad (9.45)$$

При этом

$$\varphi(2, x) = 25\,(10 - x) - 0{,}7\,(10 - x)^2.$$

Вторая итерация ($t + 1 = 2,\ t = 1$).

В соответствии с условиями (9.42) и (9.44) получаем

$$\varphi(1,x) = \max_{u\ge 0}[25(10 - x - u) - 0{,}7(10 - x - u)^2 + 18u - 0{,}6u^2] =$$

$$= \max_{u\ge 0}(-1{,}3u^2 + 7u - 1{,}4xu + \ldots). \qquad (9.46)$$

Здесь многоточие относится ко всем остальным слагаемым, не зависящим от аргумента максимизации u. Осуществляя максимизацию выражения (9.46) – случай параболы, ориентированной ветвями вниз (*см.*разд. 1.3), получаем

$$u^*(1,x) = \begin{cases} 2{,}69 - 0{,}539x; & x \le 5; \\ 0; & x \ge 5. \end{cases} \qquad (9.47)$$

Подстановка выражения (9.47) в формулу (9.46) с учетом приведения подобных членов дает

$$\varphi(1,x) = \begin{cases} -0{,}324x^2 - 14{,}66x + 189{,}4; & x \le 5; \\ -0{,}7x^2 - 11x + 180; & x \ge 5. \end{cases}$$

Третья итерация ($t + 1 = 1,\ t = 0$):

$$\varphi(0,x) = \max_{u\ge 0}\begin{cases} -0324(x+u)^2 - 14{,}66(x+u) + 189{,}4 + 16u - 0{,}4u^2; & x + u \le 5; \\ -0{,}7(x+u)^2 - 11(x+u) + 180 + 16u - 0{,}4u^2; & x + u \ge 5. \end{cases}$$

После приведения подобных получаем

$$\varphi(0,x) = \max_{u\ge 0}\begin{cases} -0{,}724u^2 + 1{,}34u - 0{,}648xu + \ldots; & u \le 5 - x; \\ -1{,}1u^2 + 5u - 1{,}4xu + \ldots; & x \ge 5 - x. \end{cases} \qquad (9.48)$$

Применительно к обоим вариантам формулы (9.48), осуществляя максимизацию по u функций как парабол (*см.* разд. 1.3), ориентированных ветвями вниз, получим

$$u^*(0,x) = \begin{cases} 0{,}925 - 0{,}44x; & 0 \le x \le 2{,}06; \\ 0; & 2{,}06 \le x \le 5; \end{cases} \qquad (9.49)$$

$$u^*(0, x) = 5 - x;\ 0 \le x \le 5. \qquad (9.50)$$

Вывод формул (9.49) и (9.50), исходя из формулы (9.43), читателю предлагается выполнить самостоятельно.

В результате получим два оптимальных варианта распределения инвестиционных ресурсов по направлениям их вложений:

1) основывается последовательно на формулах (9.49), (9.47), (9.45):

$$\left.\begin{aligned} &u^*(0) = u^*(0,x)|_{x^*=0} = 0{,}925 = y_1; \\ &x^*(1) = x^*(0) + u^*(0) = 0 + 0{,}925 = 0{,}925; \\ &u^*(1) = u^*(1,x)|_{x^*=0{,}925} = 2{,}69 - 0{,}539 \cdot 0{,}925 = 2{,}19 = y_2, \\ &x^*(2) = x^*(1) + u^*(1) = 0{,}925 + 2{,}19 = 3{,}115; \\ &u(2) = u^*(2,x)|_{x^*=3{,}115} = 10 - 3{,}115 = 6{,}885 = y_3; \end{aligned}\right\} \qquad (9.51)$$

2) основывается последовательно на формулах (9.50), (9.47), (9.45):

$$\left.\begin{aligned} &u^*(0) = u^*(0,x)|_{x^*=0} = 5 = y_1; \\ &x^*(1) = x^*(0) + u^*(0) = 0 + 5 = 5; \\ &u^*(1) = u^*(1,x)|_{x^*=5} = 0 = y_2; \\ &x^*(2) = x^*(1) + u^*(1) = 5 + 0 = 5; \\ &u^*(2) = u^*(2,x)|_{x^*=5} = 10 - 5 = 5 = y_3. \end{aligned}\right\} \qquad (9.52)$$

Распределение инвестиционных ресурсов существенно разное: в первом варианте согласно результатам (9.51) ресурсы нужно распределять по всем трем направлениям: y_1, y_2 и y_3, но в разных количествах – больше всего по третьему направлению; согласно второму варианту – только по первому и третьему направлениям поровну: $y_1 = y_3 = 5$.

Функционал (9.34) в обоих проектах, как нетрудно подсчитать, равен 186. Таким образом, как видно из данного примера, решение может быть не единственным. Как поступить в подобном случае на практике? Первое и самое простое – выбрать один из инвестиционных вариантов наудачу. Второе – учесть дополнительные условия, которые в исходной модели (9.34) – (9.36) в ее простейшем варианте не принимались во внимание. Эти дополнительные условия могут решить судьбу вариантов – первого или второго.

9.5. Сравнительный анализ методов Лагранжа–Понтрягина и Гамильтона–Якоби–Беллмана

В процессе изучения курса ТОУ читатель, вероятно, заметил, что для практики наиболее важными могут быть два метода: Лагранжа–Понтрягина и Гамильтона–Якоби–Беллмана (другое название – метод динамического программирования). Поэтому в завершение проанализируем их особенности и проведем сравнительный анализ условий применения.

1. Метод Лагранжа–Понтрягина сводит задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных (для непрерывных процессов) или рекуррентных уравнений (для многошаговых процессов) порядка 2 n, тогда как метод Гамильтона–Якоби–Беллмана ставит в соответствие задачу Коши для уравнений в частных производных (для непрерывных процессов) или рекуррентного функционального уравнения относительно функции $\varphi(t, x)$ от $n + 1$ переменных. В этом отношении метод Гамильтона–Якоби–Беллмана значительно сложнее.

2. Метод Лагранжа–Понтрягина позволяет отыскать оптимальную программу управления $u^*(t)$ и оптимальный вектор состояния системы $x^*(t)$, отвечающие заданным граничным условиям.

Метод Гамильтона–Якоби–Беллмана обеспечивает решение в форме синтеза $u^*(t, x)$ семейства оптимизационных задач с любыми начальными условиями, т.е. отвечает более общей задаче, эквивалентной семейству задач, реализуемых методом Лагранжа–Понтрягина.

3. Процесс $(x^*(t), u^*(t))$, найденный методом Лагранжа–Понтрягина, в общем случае удовлетворяет только необходимым условиям оптимальности, будучи или не будучи оптимальным в действительности. Доказательство оптимальности требует дополнительных исследований.

Синтез оптимальных управлений $u^*(t, x)$ позволяет отыскать оптимальный процесс $(x^*(t), u^*(t))$ путем решения задачи Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений при заданном начальном условии (в векторной форме) $x^*(0) = x_0$. Вопрос об оптимуме решения при этом не возникает, потому что весь вычислительный процесс адекватен теореме о достаточных условиях оптимальности.

4. Метод Гамильтона–Якоби–Беллмана применим только к задаче без ограничений на состояние при $t > t_0$, в том числе и при $t = T$. Впрочем, «освобождение» правого конца траектории $x(t)$ возможно с помощью «M-метода» (*см.* разд. 9.4). Метод Лагранжа–Понтрягина не требует отсутствия ограничений на состояние при $t = T$.

5. Метод Лагранжа–Понтрягина более прост и поэтому более привлекателен для практики. В нем самое сложное – это максимизация функции Гамильтона по управлению (отсюда и название «принцип максимума»). Это же действие выполняется и в методе Гамильтона–Якоби–Беллмана, после чего предстоит решить значительно более сложное уравнение Беллмана.

6. Общий вывод: метод Гамильтона–Якоби–Беллмана значительно сложнее, но полученное при этом решение дает больше информации, за что, как известно, нужно платить сложностью расчетов.

Задачи для самостоятельной работы

В следующих задачах построить синтез оптимальных управлений, пользуясь методом Гамильтона–Якоби–Беллмана.

1. $\int_0^T 2u^2 dt + x^2(T) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = u.$$

2. $\int_0^T u^2 dt + 4x^2(T) \to \min;$

$$\frac{dx}{dt} = x - 2u.$$

3. $$\int_0^T (x_2+u^2)dt + x_1(T) - x_2(T) \to \min;$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u.$$

4. $$\int_0^T u^2 dt + cx^2(T) \to \min;$$

$$\frac{dx}{dt} = a + bu; \quad a,b,c - \text{const}.$$

Методом Гамильтона–Якоби–Беллмана найти оптимальные процессы:

5. $$\sum_{t=0}^{3} [2x(t) + u^2(t)] \to \min;$$

$x(t+1) = x(t) + 2u(t);$

$x(0) = 2; |u| \le t + 1.$

6. $$\sum_{t=0}^{3} [x(t) - u(t)] - x(4) \to \min;$$

$x(t+1) = u(t);$

$|u(t)| \le 1; x(0) = 1.$

7. $$\sum_{t=0}^{3} [x(t) + u(t)] + x(4) \to \min;$$

$x(t+1) = x(t) - u(t);$

$$|u(t)| \le \frac{1}{t+1};$$

$x(0) = 0.$

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Абсцисса – значение некоторого показателя, измеряемое по горизонтальной оси системы координат.

Вектор состояний управляемой системы – вектор переменных (обозначается обычно x), компоненты которого входят в состав уравнений процесса как сами по себе, так и со своими производными (для непрерывных процессов) или в моменты времени $t+1$ и t (для дискретных процессов).

Вектор-функция – вектор, каждая компонента которого является функцией своих аргументов.

Двухточечная краевая задача – решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, при котором часть условий задана в начальный момент времени, а другая часть – обычно в конечный момент (возможно и в другой).

Динамическое программирование – один из разделов теории оптимального управления, связанный с решением уравнения Беллмана. Для *непрерывных процессов* это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Для *дискретных (многошаговых) процессов* – конечно-разностное функциональное уравнение.

Дискретные (многошаговые) процессы – процессы, в которых аргумент t (обычно время) изменяется с заданным шагом, например t, $t+1$, $t+2$ и т. д.

Достаточные условия оптимальности – совокупность теорем В.Ф. Кротова, определяющих признак оптимальности для *непрерывных* и *дискретных (многошаговых)* управляемых *процессов*.

Задача Коши – решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями.

Индикатриса – форма зависимости целевой функции от вектора управления (линейная, нелинейная, выпуклая, логическая и др.).

Инфинум (обозначается inf) – точная нижняя граница изменения функции, такое значение, которого функция на заданном множестве не достигает, но стремится к нему, оставаясь больше его.

Коэффициенты эластичности *производственной функции* по факторам – отношение предельной эффективности ПФ по данному фактору к средней эффективности.

Метод Лагранжа – один из разделов теории оптимального управления, обеспечивающий *необходимые условия оптимальности* для *дискретных (многошаговых) процессов.*

Необходимые условия оптимальности – условия, при невыполнении которых управляемый процесс неоптимальный, при выполнении – может быть оптимальным, а может и не быть.

Непрерывные процессы – процессы, в которых аргумент t (обычно время) изменяется непрерывно в заданном интервале $t \in [t_0; T]$.

Ограничения – совокупность условий, выраженных в форме математических отношений, образующих множество допустимых значений искомых состояния системы и управления.

Ордината – значение некоторого показателя, измеряемое по вертикальной оси системы координат.

Принцип максимума Понтрягина – один из разделов теории оптимального управления, обеспечивающий *необходимые условия оптимальности* для *непрерывных процессов.*

Программа управления $u(t)$ – функция управления в момент времени t при фиксированном состоянии системы $x(t)$.

Производственная функция (ПФ) – функция, устанавливающая связи между выпуском продукции (оказанием услуг) и затрачиваемыми производственными факторами или ресурсами (чаще всего учитываются живой труд и капитал). На практике наиболее распространена ПФ Кобба–Дугласа, в основном используется в макроэкономике.

Проекция множества V **на множество** X (обозначается V_x) – множество всех таких значений $x \in V_x$, для каждого из которых существует хотя бы одно значение управления u, так что пара $(x, u) \in V$.

Сечение множества V **множеством** U **при заданном состоянии системы** X – множество всех значений управления u (обозначается V^u), которые при заданном состоянии системы x принадлежат V: $(x, u) \in V$, $u \in V^u$.

Синтез оптимальных управлений – функция управления $u(t, x)$ в методе *динамического программирования*, задающая совокупность всех допустимых управлений $u(t)$ в момент времени t при текущем состоянии системы x.

Супремум (обозначается sup) – точная верхняя граница, такое значение, которого функция на заданном множестве не достигает, но стремится к нему, оставаясь меньше его.

Терминальный член – слагаемое в *функционале*, отражающее эффективность управляемой системы в конечный момент времени $t = T$.

Точка разрыва функции первого рода – случай, когда в некоторой точке предел значения функции слева не равен пределу ее значения справа и оба предела конечны. При равенстве этих пределов функция в заданной точке непрерывна.

Уравнения процесса – совокупность условий, входящих в состав *ограничений* в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Условие трансверсальности – специальное ограничение, используемое в принципе максимума (*методе Лагранжа*) при отсутствии связей в управляемой системе в конечный момент времени $t=T$.

Функционал (то же, что целевая функция) – отображение множества аргументов на числовую ось, частный случай *функции.*

Функция – отображение множества аргументов на множество значений: числа, векторы, матрицы, логические переменные и т. д.

Функция Гамильтона (то же, что гамильтониан) – одна из основных *функций* в теории оптимального управления, максимизация которой по управлению определяет *синтез оптимальных управлений* в теории *динамического программирования.*

Функция полезности – математическое выражение для оценки эффективности потребления при различных его значениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3т. – М.: Мир, т. 1 – 1972, т. 2 – 1973.
3. Васильков Ю. В., Василькова Н. Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 2000.
4. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979.
5. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
6. Лагоша Б. А., Дегтярева Т. Д. Методы и задачи оптимального управления: Учеб. пособие. – М.: МЭСИ, 2000.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976.
8. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под общ. ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2001.
9. Основы теории оптимального управления / В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов, Н. И. Данилина, С. И. Сергеев; Под общ. ред. В. Ф. Кротова. – М.: Высш. шк., 1990.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Лагоша Борис Александрович

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Заведующая редакцией *Л. А. Табакова*
Редактор *А. М. Маторина*
Младший редактор *Н. А. Федорова*
Художественный редактор *Ю. И. Артюхов*
Технический редактор *Т. С. Маринина*
Корректоры *Т. М. Колпакова, Н. П. Сперанская*
Компьютерная верстка *Н. А. Пиминовой*
Обложка художника *О. В. Толмачева*

ИБ № 4472

Подписано в печать 09.01.2003 г. Формат 60 × 88/16
Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 11,76. Уч.-изд. л. 10,31
Тираж 4000 экз. Заказ 2597. «С» 024

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7
Телефон (095) 925-35-02, 923-18-68
факс (095) 925-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http: // www.finstat.ru

ГУП «Великолукская городская типография»
Комитета по средствам массовой информации Псковской области,
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95
E-mail: VTL@MART.RU